

REVIEW OF BENDING AND TORSIONAL VIBRATIONS IN SHAFTS AND ROTOR SYSTEMS

Malina Ivanova

University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”, 1700 Sofia; E-mail: malina_vatz@abv.bg

ABSTRACT. The present paper provides a comprehensive review of analytical, numerical, and experimental approaches for investigating bending and torsional vibrations in shafts and rotor systems. Special attention is paid to systems with complex geometry, including stepped shafts and transitional curved segments, as well as multilayer mechanical structures subjected to dynamic loading. The study synthesises results from analytical mechanics, energy-based methods, iterative computational approaches, and experimental strain-gauge measurements. Classical and modern approaches for vibration analysis are discussed, including Rayleigh-based approximations, fixed-point iteration techniques, and coupled dynamic models for torsional and bending motion. Particular attention is paid to the influence of geometric features on natural vibration frequencies and the stress-strain state of shaft systems. Experimental validation of combined bending and torsion is also considered, confirming the reliability of theoretical predictions. The review demonstrates that accurate prediction of dynamic behaviour in rotor systems requires integration of analytical modelling, numerical methods, and experimental verification. The discussed methodologies provide a unified framework for improving the design and reliability of rotating mechanical systems under complex loading conditions.

Key words: shafts; torsion; bending; rotor systems; vibrations.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ОГЪВАЩИ И УСУКВАЩИ ТРЕПЕНИЯ ПРИ ВАЛОВЕ И РОТОРНИ СИСТЕМИ

Малина Иванова

Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“, 1700 София

РЕЗЮМЕ. Настоящата статия представя цялостен обзор на аналитичните, числените и експерименталните подходи за изследване на огъващите и усукващите трептения във валове и роторни системи. Специално внимание е отделено на системи със сложна геометрия, включително валове със стъпаловидна форма и преходни криволинейни участъци, както и на многослойни механични конструкции, подложени на динамично натоварване. Изследването синтезира резултати от аналитичната механика, енергийните методи, итеративните изчислителни подходи и експерименталните тензометрични измервания. Разгледани са класически и съвременни методи за анализ на трептенията, включително апроксимации, базирани на метода на Рейли, техники за итерация с фиксирана точка и свързани динамични модели за усукващо и огъващо движение. Особено внимание е обърнато на влиянието на геометричните характеристики върху собствените честоти на трептене и напрегнато-деформационно състояние на валовите системи. Разгледана е и експерименталната проверка на комбинираното огъване и усукване, потвърждаваща надеждността на теоретичните прогнози. Обзорът показва, че точното прогнозиране на динамичното поведение на роторните системи изисква интегриране на аналитично моделиране, числени методи и експериментална проверка. Обсъжданите методологии осигуряват единна рамка за подобряване на проектирането и надеждността на въртящи се механични системи при сложни условия на натоварване.

Ключови думи: валове; усукване; огъване; роторни системи; трептения.

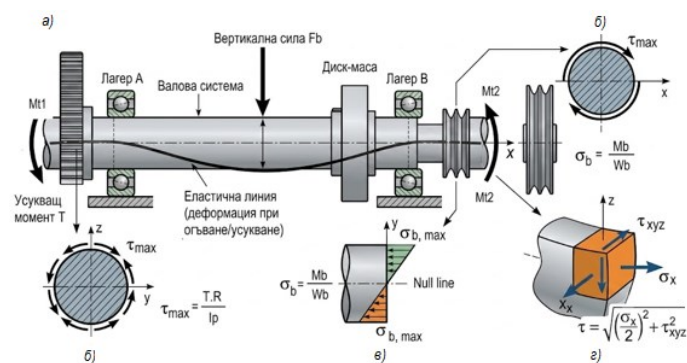
Въведение

Динамичното поведение на валове и роторни системи представлява основен проблем в съвременното машиностроене и минната механика. Много често огъващите и усукващите трептения се проявяват едновременно. Тяхното взаимодействие води до сложни динамични ефекти, включително резонансни явления и повишени напрежения, които определят надеждността и експлоатационния живот на механичните системи. Теоретичните основи на вибрационния анализ и резонансните явления при механичните системи са подробно разработени в класическите трудове по механични трептения и продължават да бъдат фундамент за съвременните инженерни изследвания (Timoshenko et al., 1974; Den Hartog, 1985).

В редица изследвания се подчертава значението на аналитичните модели за оценка на собствените честоти и напрегнатото състояние на валови системи. Например, при тежко динамично натоварени валове (в транспортните и минните машини) е установено значително влияние на геометричните и масово-инерционните параметри върху вибрационния отговор на системата (Тонкова, 2018). Подобни резултати подчертават необходимостта от интегрирани подходи за анализ. Други изследвания показват, че геометричните особености на валовите,

включително преходни зони и стъпаловидни участъци влияят съществено върху динамичните характеристики на системата (Trifonova-Genova and Tonkova, 2017). Подобни зависимости са ключови при проектиране на роторни системи с повишени изисквания за точност и устойчивост.

На фиг. 1 е представено схематично взаимодействието между огъващите и усукващите натоварвания.



Фиг. 1. Схематично представяне на валова система, подложена на едновременно огъване и усукване: (а) система вал-маса; (б) напрежения от усукване; (в) напрежения от огъване; (г) комбинирано напрегнато състояние

Класическите зависимости от теорията на еластичността запазват своята валидност с инженерна точност и при комбинирано натоварване на огъване и усукване. Това се потвърждава от експериментални изследвания, при които разминаванията между теория и практика са строго ограничени (Tonkova, 2025).

Цел на изследването:

Настоящият обзор има за цел да систематизира съвременните аналитични, числени и експериментални методи за анализ на огъващи и усукващи трептения, като акцентира върху тяхното практическо приложение в реални инженерни конструкции.

Аналитични и енергийни методи за вибрационен анализ

За определяне на собствените честоти на валови системи традиционно се прилагат аналитични подходи, базирани на енергийни методи и приближени вариационни изчисления. Сред тях методът на Рейли се доказва като ефективен инструмент при анализ на обекти със сложна геометрия и нееднородни свойства (Trifonova-Genova and Tonkova, 2017).

Енергийните методи, базирани на съотношението между кинетичната и потенциалната енергия, остават сред най-широко използваните инженерни подходи за оценка на собствените честоти на механични системи със сложна геометрия (Timoshenko et al., 1974).

Допълнително развитие на аналитичните подходи се наблюдава при модели с преходни зони и стъпаловидна геометрия, при които се отчита влиянието на локалните изменения на коравината и масата върху динамичния отговор на системата (Tonkova and Trifonova-Genova, 2018). Такива модели позволяват по-точно определяне на честотите на собствените трептения при реални инженерни конструкции.

Като алтернатива се въвеждат и итерационни методи с фиксирана точка, които позволяват определяне на принудени трептения без директно решаване на диференциалните уравнения на движението. Първоначалната верификация на метода е извършена при едномасова система и показва добра сходимост в надрезонансната област (Stefanov and Tonkova, 2014a). В последващи изследвания подходът е разширен за определяне на принудени усукващи и огъващи трептения на валови системи, моделирани чрез крайни елементи, което потвърждава приложимостта му при по-сложни механични конструкции (Stefanov and Tonkova, 2014b). Това разширява възможностите за анализ на по-сложни механични системи с множество степени на свобода.

Развитието на съвременните изчислителни методи позволява успешно комбиниране на аналитичните модели с дискретни числени подходи за анализ на системи с множество степени на свобода и сложни гранични условия (Lalanne & Ferraris, 1998).

Основните аналитични методи, използвани при вибрационния анализ са обобщени в (таблица 1).

Таблица 1. Сравнение на основните подходи за вибрационен анализ

Метод	Основни предимства	Ограничения
Метод на Рейли	Бърза оценка на собствени-те честоти	Приближена точност на резултатите
Итерации с фиксирана точка	Подходящ за решаване на нелинейни задачи	Зависимост на сходимостта от началното приближение
Числено моделиране (МКЕ)	Висока точност и възможност за анализ на сложни системи	По-голяма изчислителна сложност и зависимост от качеството на модела
Експериментални методи	Осигуряват реална оценка на динамичното поведение	Необходимост от специализирана апаратура и експериментална постановка

От таблица 1 се вижда, че колкото по-висока е търсената точност, толкова по-голяма е необходимостта от изчислителни ресурси. Освен това не всички методи са универсални по отношение на поведението на системата. Например итерациите с фиксирана точка са подходящи за решаване на нелинейни задачи, където стандартните линейни подходи не са ефективни и биха отчели грешни резултати. В инженерната практика се използва най-често комбинирания подход, който завършва с експериментално изследване за потвърждаване на получените теоретични данни.

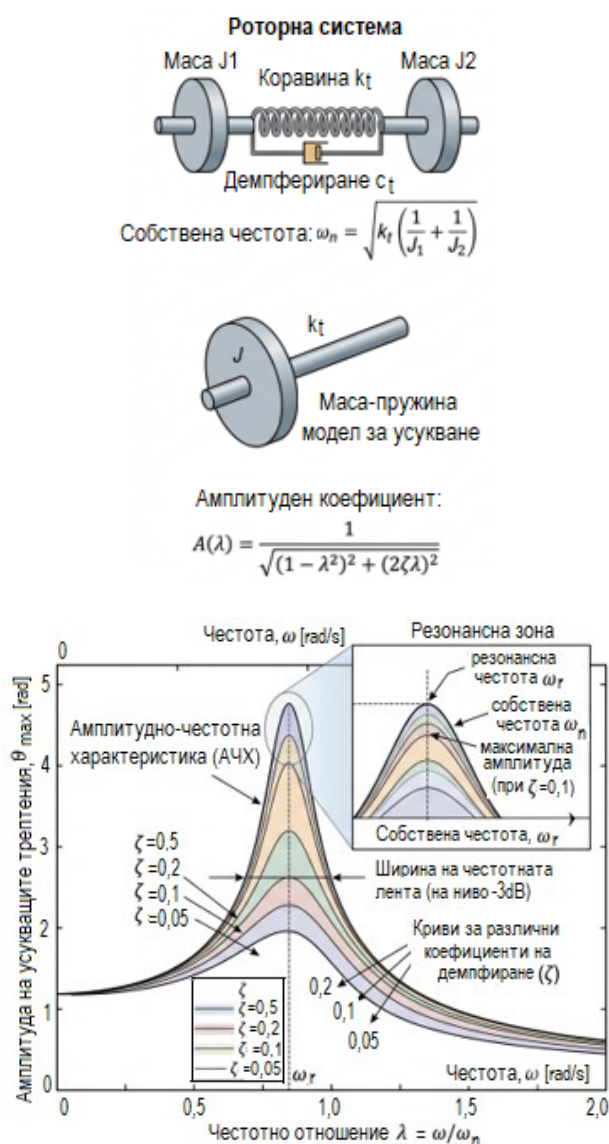
Динамика на усукващи трептения в роторни системи

Усукващите трептения са критичен фактор при работа на роторни системи, особено при наличие на хармонични смущения и инерционни ефекти. Анализът на системи с въртящи се маси показва, че оптимизацията на параметрите на системата може да доведе до значително намаляване на еластичния усукващ момент (Tonkova and Pulev, 2021).

При роторните системи усукващите трептения са тясно свързани с инерционните характеристики на въртящите се елементи и взаимното влияние между отделните маси в системата, което е един от основните обекти на съвременната роторна динамика (Eshleman, 1999; Genta, 2005).

Моделирането на динамично натоварени валове показва, че честотните характеристики са силно зависими от масово-инерционните параметри и конфигурацията на системата, като критичните зони са свързани с концентрации на напрежения (Тонкова, 2018). В резонансни режими се наблюдава значително увеличение на амплитудите, което изисква прецизно проектиране на конструктивните параметри.

На фиг. 2 е представена амплитудно-честотната характеристика на двумасова роторна система с демпфиране.



Фиг. 2. Амплитудно-честотна характеристика на роторна система при усукващи трептения

Подобно поведение се наблюдава и при сложните роторни системи, при които съвместното действие на динамичните и инерционните моменти предизвиква сериозни напрежения в елементите на ротора. Конкретно при центробежните сачмени съединители е установено, че общият момент върху лопатките зависи едновременно от динамичното ускорение и инерционното натоварване, което води до появата на големи огъващи напрежения (Тасев и Тасев, 2013).

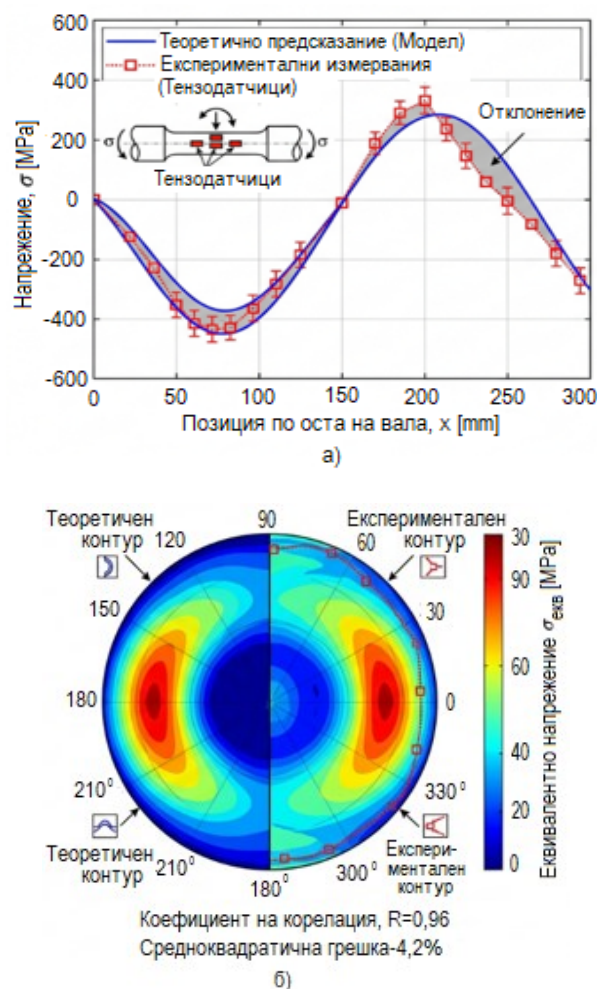
Огъващи трептения и комбинирани натоварвания

Комбинираното действие на огъващи и усукващи трептения води до сложно напрегнато-деформационно състояние, което не може да бъде описано чрез отделни линейни модели. Проведените експерименти чрез

тензометрични измервания потвърждават високата степен на съответствие между теоретично изчислените и реално отчетените стойности на главните напрежения (Tonkova, 2025).

Комбинираното действие на огъване и усукване е сред най-често срещаните причини за възникване на повишени напрежения и повреди от умора в машинните елементи, поради което неговото коректно моделиране има съществено практическо значение (Den Hartog, 1985).

На фиг. 3 е показана съпоставка между теоретичните и експерименталните резултати, както и оценка на съответствието между модела и измерванията.



Фиг. 3. Сравнение между теоретични и експериментално измерени напрежения при комбинирано действие на огъване и усукване: а) Съпоставка между теоретично предсказани и експериментално измерени напрежения по дължината на вала при комбинирано огъващо и усукващо натоварване; б) Съпоставка между теоретични и експериментални резултати

Допълнително, численото моделиране на динамично натоварени валове потвърждава, че конфигурацията на масите и режимът на работа са определящи фактори за разпределението на напреженията и деформациите в конструкцията (Тонкова, 2018).

В инженерната практика подобни комбинирани натоварвания са характерни за ротационни механизми с хидравлично или кинематично задвижване. Типичен пример са хидравличните системи за разтоварване на самосвали, където върху цилиндрите действат значителни сили

натоварвания, налагащи детайлно и прецизно оразмеряване на изпълнителните органи (Тасев, 2024).

Влияние на геометрични и кинематични особености

Конструктивните изменения в геометрията, като преходни участъци и стъпаловидни преходи, оказват съществено влияние върху динамичните характеристики на валовите. Аналитичните изследвания показват, че тези зони променят локалната коравина и водят до изменение на собствените честоти (Trifonova-Genova and Tonkova, 2017).

Аналогични зависимости са установени и при изследванията на роторни системи, при които локалните изменения на геометрията оказват пряко влияние върху разпределението на коравината и честотния спектър на конструкцията (Lalanne and Ferraris, 1998; Genta, 2005).

Прилагането на разширени модели, базирани на дискретизация на системата на отделни сегменти, позволява по-точно определяне на динамичния отговор на обекти със сложна геометрия и нееднородно разпределение на масата (Tonkova and Trifonova-Genova, 2018).

Аналогични принципи на моделиране се използват и при проектирането на кормилни системи на съчленени транспортни средства. В този случай кинематичният анализ служи като база за определяне на необходимите сили в задвижващите хидравлични цилиндри и прецизния избор на съответните помпени агрегати (Тасев, 2023).

Инженерни механизми и роторни системи

Съвременните инженерни системи често комбинират роторни, хидравлични и механични подсистеми, в които динамичните натоварвания играят определяща роля. В подобни системи взаимодействието между геометричните параметри, масово-инерционните характеристики и експлоатационните натоварвания е определящо за динамичното поведение и експлоатационната надеждност на конструкцията (Lalanne and Ferraris, 1998; Eshleman, 1999). По-конкретно, при изследването на центробежни съединители е установено, че напреженията в лопатките зависят от баланса между статични и динамични моменти, съчетано с инерционните параметри на системата (Тасев и Тасев, 2013). Тези анализи доказват необходимостта от комплексен подход при проектирането, който успешно съвместява аналитичните модели на трептенията с практическите инженерни методи за конструктивно оразмеряване на реални механизми.

На фиг. 4 е представена обобщената взаимовръзка между геометрията, натоварването и динамичния отговор на системата.

Фигура 4 показва, че динамичното поведение на роторните системи се определя от комплексното взаимодействие между геометричните параметри, външните натоварвания и инерционните характеристики на конструкцията. Това взаимодействие налага използването на различни аналитични и инженерни подходи в зависимост от конкретното приложение.



Фиг. 4. Обобщена схема на взаимовръзката между геометрия, натоварване, вибрации и конструктивно оразмеряване в роторни системи

Приложението на разгледаните методи в инженерната практика е обобщено в (таблица 2).

Таблица 2. Приложение на методите за динамичен анализ в инженерни системи

Инженерна система	Основен обект на анализ
Валови системи	Собствени честоти и форми на трептене
Роторни системи	Огъващи и усукващи трептения
Хидравлични системи на самосвали	Силови натоварвания и конструктивно оразмеряване
Съчленени транспортни машини	Кинематични зависимости и силови параметри на управление
Центробежни съединители	Динамични напрежения и инерционни ефекти

Данните в таблица 2 показват, че независимо от различията между отделните инженерни системи, основните принципи на вибрационния анализ остават приложими при широк спектър от роторни и хидромеханични конструкции.

Заклучение

Настоящият обзор показва, че изследването на огъващи и усукващи трептения при валове и роторни системи изисква прилагането на интегриран подход, който включва аналитични, числени и експериментални методи. Фактори като геометрични особености, масово-инерционни параметри и комбинирани силови въздействия имат определящо значение за цялостното динамично поведение на конструкциите.

Разгледаните инженерни приложения в областта на хидравличните и роторните механизми доказват универсалния характер на динамичния анализ и неговия потенциал за оптимизиране на конструктивните решения. Бъдещите изследвания следва да бъдат насочени към разработване на хибридни модели, които успешно да балансират между прецизността на теоретичните изчисления и практическото инженерно приложение.

Литература

Den Hartog, J. P. (1985). *Mechanical Vibrations* (4th ed.). Dover Publications, New York.

- Eshleman, R. L. (1999). *Basic Machinery Vibrations: An Introduction to Machine Testing, Analysis and Monitoring*. VI Press, Clarendon Hills.
- Genta, G. (2005). *Dynamics of Rotating Systems*. Springer, New York.
- Lalanne, M., & Ferraris, G. (1998). *Rotordynamics Prediction in Engineering* (2nd ed.). John Wiley & Sons, Chichester.
- Stefanov, S., & Tonkova, G. (2014a). The Method of Fixed-Point Iterations for Determination of Forced Vibrations in the Simplest Case and Ensuring the Convergence in the Above-Resonance Regime. *Mechanics of Machines*, 105, 48-51.
- Stefanov, S., & Tonkova, G. (2014b). An Example for the Determination of Forced Torsional and Bending Vibrations of a Shaft by Means of the Fixed-Point Iterations Method. *Mechanics of Machines*, 105, 52-55.
- Timoshenko, S. P., Young, D. H., & Weaver, W. (1974). *Vibration Problems in Engineering* (4th ed.). John Wiley & Sons, New York.
- Tonkova, G. (2025). Experimental Determination of the Principal Stresses at a Point of a Beam Loaded Simultaneously in Bending and Torsion. *Proceedings of the Technical University of Sofia*, 76(1). <https://doi.org/10.47978/TUS.2025.76.01.033>
- Tonkova, G., & Pulev, S. (2021). Reducing the Elastic Torsional Moment of a Vibrating Shaft. *Annual of the University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”*, 64, 165-167.
- Tonkova, G., & Trifonova-Genova, V. (2018). Determining the Natural Frequency on a Stepped Shaft with a Transitional Curved Section. *Journal of Mining and Geological Sciences*, 61(III), 60-63.
- Trifonova-Genova, V., & Tonkova, G. (2017). An Approach for Determining the Natural Frequency of a Stepped Shaft. *Proceedings of the University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”*, 60(III), 39-43.
- Тасев, В., & Тасев, Л. (2013). Напрежения в ротора на центробежните сачмени съединители с водещ шестлопатен ротор. *Годишник на Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“*, 56(III), 7-11.
- Тасев, Л. (2023). Методика за оразмеряване на кормилното управление на съчленени пневмоколесни транспортни средства. *Годишник на Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“*, 66, 280-283. <https://doi.org/10.5281/zenodo.8339084>
- Тасев, Л. (2024). Методика за оразмеряване на хидравличната система за разтоварване на коша на нископлатформени самосвали. *Годишник на Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“*, 67, 236-239. <https://doi.org/10.5281/zenodo.13762851>
- Тонкова, Г. (2018). Изследване на якостно-деформационното състояние на динамично натоварен вал. *Индустриални технологии*, 5(1), 70-77.