

APPLICATION OF LINEAR OPTIMISATION IN WASTE MANAGEMENT

Antoaneta Georgieva, Marina Nikolova

University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”, 1700 Sofia; E-mail: any_76@abv.bg; mnikolova@mgu.bg

ABSTRACT. This article presents the application of linear optimisation in waste management. A characteristic feature of linear optimisation is that the mathematical model consists of a system of equations and inequalities, and the objective function is linear. An optimisation problem for the collection and transportation of municipal waste is solved using a graphical method for solving a linear optimisation model with two variables. The results of the calculations are presented.

Key words: linear optimization, waste management.

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ЛИНЕЙНОТО ОПТИМИРАНЕ В УПРАВЛЕНИЕТО НА ОТПАДЪЦИТЕ

Антоанета Георгиева, Марина Николова
Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“, 1700 София

РЕЗЮМЕ. В статията е представено приложението на линейното оптимизиране в управлението на отпадъците. Характерно за линейното оптимизиране е, че математическият модел представлява система от равенства и неравенства и целевата функция е линейна. Решена е оптимизационна задача за сметопочистване и превозване на битови отпадъци с прилагането на графичен метод за решаване на линеен оптимизационен модел с две променливи. Представени са резултати от направените изчисления.

Ключови думи: линейно оптимизиране, управление на отпадъци.

Въведение

Управлението на отпадъците в Европейския съюз е приоритет на предотвратяването на образуването на отпадъци и повторната им употреба и същевременно насърчава постигането на високи нива извозване и последващо рециклиране.

Задължително количествата на образуваните отпадъци трябва да бъдат оценени и прогнозирани поотделно за отпадъците от домакинствата и подобните отпадъци от търговски и административни обекти и от производствени предприятия в общината с цел оптимизиране на сметопочистването и извозването. За целта е приложимо използването на линейното оптимизиране.

При линейното оптимизиране математическият модел представлява система от равенства и неравенства и целева функция, която е линейна.

$$z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n$$

Търсят се такива стойности на $x_1, x_2, \dots, x_n$, за които линейната функция достига екстремална стойност (максимум или минимум).

За намирането на $x_1, x_2, \dots, x_n$ се прилага Симплекс – методът, чийто алгоритъм е следният:

1. Основна задача.
2. Канонична задача.
3. Решение чрез Симплекс – метода.
4. Изводи.

Под „симплекс“ се разбира най-простият многостен в n – мерното пространство, който има $n + 1$ върха.

Основната задача е в каноничен вид, когато са изпълнени следните условия:

- за всяка променлива $x_1, x_2, \dots, x_n$ има условие за неотрицателност;
- свободните членове на всички ограничителни условия са неотрицателни числа;
- всички ограничителни условия са уравнения;

- на всяко уравнение съответства единичен базисен вектор.

Ако някои от свободните членове са отрицателни числа, то умножаваме двете страни на съответното ограничително условие с (-1) .

Ограничителните условия, които са неравенства се превръщат в уравнения с помощта на допълнителни променливи. При „ $\leq$ “, към лявата страна се прибавя допълнителна променлива. При „ $\geq$ “, към лявата страна се изважда допълнителна променлива.

Допълнителните променливи се включват в целевата функция с коефициент „0“. Ако в някое уравнение липсва единичен базисен вектор, в уравнението се въвежда изкуствена променлива, която е неотрицателна. Изкуствените променливи се включват в целевата функция с коефициент

$$+M \rightarrow \min; \quad -M \rightarrow \max \\ M = 10 \max [C_j] \quad 1 \leq j \leq n,$$

където C_j са коефициентите в целевата функция.

В началната Симплекс таблица

- Ц.Б. – Целеви базисен стълб;
- БН – стълб на базисните променливи;
- В – десните страни на ограничителните условия.

Последния ред на таблицата се нарича индексен ред.

- Z_0 е равно на скаларното произведение на първия стълб с третия стълб;
- D_1 – скаларното произведение на първия стълб с четвъртия стълб минус C_1 ;
- $D_j = \sum C_j \cdot i - C_j$.

Критерии за оценка:

$$D_j \leq 0 - Z_{\min} \\ D_j \geq 0 - Z_{\max}$$

като D_j се нарича индексна оценка.

Оценките на базисните неизвестни са нули.

Смяна на базиса

1. Разрешаващ стълб – стълбът, който има най-лоша оценка

$$Z_{min} \rightarrow \max D_j$$

$$Z_{max} \rightarrow \min D_j$$

2. Разрешаващ ред – образуваме частните от стълба В и съответните положителни числа от разрешаващия стълб (за нулите и отрицателните числа не образуваме такива частни). Избираме най-малкото от частните и определяме разрешаващия ред.

Елементът, който се получава при пресичането на разрешаващия ред и разрешаващия стълб се нарича разрешаващо число.

Ако разрешаващият стълб не съдържа положителни числа, то задачата няма решение, т.е. целевата функция е неограничена – отдолу, ако се търси Z_{min} и неограничена отгоре, ако се търси Z_{max} .

Смяната на базиса продължава докато за всеки стълб се изпълни критерият за индексната оценка.

$$Z_{min} = 0$$

$$(0; 0; 40; 20; 30)$$

$$Z = 2.0 + 5.0 + 0.40 + 0.20 + 0.30 = 0$$

Таблица 2. При $Z_{max}=0, 150$ и 170

ЦБ	БН	В	2	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	40	1	1	1	0	0
0	x_4	20	1	0	0	1	0
0	x_5	30	0	1	0	0	1
$Z_{max} = 0$			-2	-5	0	0	0
0	x_3	10	1	0	1	0	-1
0	x_4	20	1	0	0	1	0
5	x_5	30	0	1	0	0	0
$Z_{max} = 150$			-2	0	0	0	5
2	x_1	10	1	0	1	0	-1
0	x_4	10	0	0	-1	1	1
5	x_2	30	0	1	0	0	1
$Z_{max} = 170$			0	0	2	0	3

$$Z_{max} (10, 30, 0, 0, 0)$$

$$Z_{max} = 2.10 + 5.30 = 170$$

Задача

Фирма за сметопочистване събира и превозва битови отпадъци на цена 5 евро на 1 тон за 1 km и пластмаси на цена 2 евро на 1 тон за 1 km. Фирмата събира общо пластмаси и битови отпадъци не повече от 40 тона, пластмаси не повече от 20 тона и битови отпадъци не повече от 30 тона. Да се намерят количествата пластмаси и битови отпадъци.

Означаваме x_1 – тона пластмаси, x_2 – тона битови отпадъци.

$$Z = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \min (\max)$$

Ограничителните условия са:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 20 \\ x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Привеждаме в каноничен вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ x_1 + x_4 = 20 \\ x_2 + x_5 = 30 \end{cases}$$

В таблица 1 и 2 е представено решението на задачата.

$$Z = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

Таблица 1. При $Z_{min}=0$

ЦБ	БМ	В	2	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	40	1	1	1	0	0
0	x_4	20	1	0	0	1	0
0	x_5	30	0	1	0	0	1
$Z_{min} = 0$			-2	-5	0	0	0

Графичен метод за решаване на линеен оптимизационен модел с две променливи x_1 и x_2

Целевата функция има вида $Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$.

Етапите при решаване на линеен оптимизационен модел са:

1. Определяне на областта на допустимите решения
 - а) ОДР е празно множество – моделът няма решение.
 - б) неограниченост на целевата функция в ОДР – моделът няма решение.
2. Построяване градиента на целевата функция – вектор $\vec{n} (C_1, C_2)$.
3. Определяне на координатите на точките, в които правата $q \perp \vec{n}$ за последен път докосва ОДР.
4. Пресмятане стойността на целевата функция.
5. Отчитане на решенията.

Моделът има решение:

а) единствено оптимално решение, когато се достига в един от върховете на ОДР.

б) Безброй много решения т.е. алтернативен оптимум
- по отсечка;
- по лъч.

За предходната задача прилагаме графичния метод

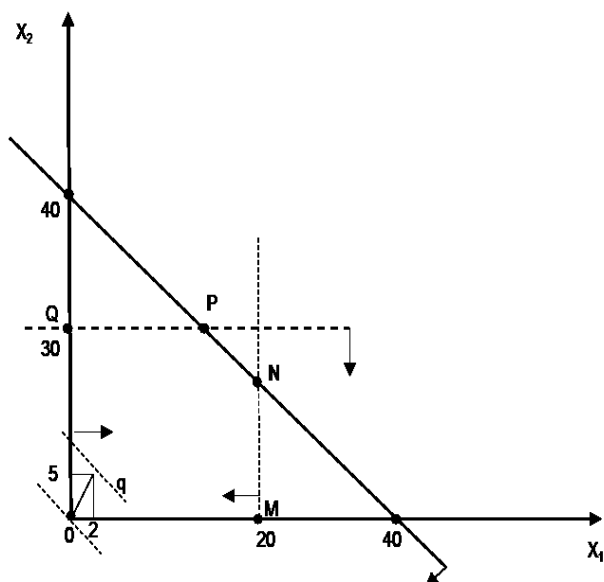
$$\min (\max) Z = f(x) = 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 40 \\ x_1 \leq 20 \\ x_2 \leq 30 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{x_1}{40} + \frac{x_2}{40} = 1 \text{ отрезково уравнение}$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 20 \\ x_2 \leq 30 \end{cases}$$

На фиг. 1. графично е представено решението на задачата.



Фиг. 1. Графично решение на задачата

ОДР $\rightarrow$ OMNPQ

$\vec{n}(2, 5)$ градиент на целевата функция

Точка P $\rightarrow x_2 = 30$

$$x_1 + x_2 = 30$$

$$x_2 = 30 \quad x_1 = 10$$

$$\min Z(0,0) = 0$$

$$Z(\max) = (10, 30)$$

$$(\max) Z = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 30 = 170$$

Заклучение

Симплекс методът е приложен при решаване на оптимизационна задача за сметопочистване и превозване на битови отпадъци. В резултат на направените изчисления са определени количествата пластмаси и битови отпадъци за извозване.

Литература

Георгиев Л., Николова, Н., Кацаров, М., Георгиева, А. (2013). Приложение на линейното оптимизиране за прогнозиране добива на нефт. IV Международна научно-техническа конференция Геология и въглеродороден потенциал на Балканско-Черноморския регион, 2013, с. 230-237. ISBN978-954-92738-5-4.

Иванова К., Атанасова, Т. (2015). *Линейно оптимизиране*.

Математически методи в икономиката. Издателски комплекс – ВУТП. ISBN: 978 954 9332-93-3 (printed)

Радев Ю., Георгиев, Л., Бояджиев, М. (2008). Устойчиво развитие в условията на ограниченост на природните ресурси. Proceedings of scientific and technical conference with international participation “Oil and Gas prospectivity of the BALKAN-BLACK SEA REGION”. Varna, p.165-171.

Ръководство за определяне броя и вида на необходимите съдове и техника за събиране и транспортиране на рециклируеми и зелени отпадъци. (2023). Оперативна програма околна среда 2014-2020, <https://www.moew.government.bg/static/media/ups/tiny/%D0%A3%D0%9E%D0%9E%D0%9F/>.

Директива 2008/98/ЕО на Европейския Парламент и на Съвета от 19 ноември 2008 година относно отпадъците и за отмяна на определени директиви, изменена с Директива (ЕС) 2018/851 на Европейския парламент и на Съвета от 30 май 2018 година.