МИННО-ГЕОЛОЖКИ УНИВЕРСИТЕТ
„СВ. ИВАН РИЛСКИ“

София

РЕШЕНИЯ

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

Учебна година 2026/2027

ВАРИАНТ I

Задача 1. Дадена е геометрична прогресия с първи член

$$a_1 = 8$$

и частно

$$q = -\frac{1}{2}.$$

(a) Намерете петия член a_5 на прогресията.

Използваме формулата за n-тия член на геометрична прогресия:

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Следователно

$$a_5 = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{a_5 = \frac{1}{2}}$$

(б) Намерете сумата на първите шест члена S_6.

Използваме формулата

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad q \neq 1.$$

За $n = 6$:

$$S_6 = 8\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^6}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{3}{2}}.$$

$$S_6 = 8 \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{2}{3} = \frac{21}{4}.$$

$$\boxed{S_6 = \frac{21}{4}}$$

(в) Намерете най-малкия брой членове n, за който е изпълнено

$$|a_n| < 0.1.$$

Имаме

$$|a_n| = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Търсим

$$8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0.1.$$

Последователно:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < \frac{1}{80}.$$

Проверяваме степени на $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} > \frac{1}{80},$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} < \frac{1}{80}.$$

Следователно

$$n - 1 = 7$$

и

$$\boxed{n = 8}.$$

(г) Намерете сумата на безкрайната геометрична прогресия.

Тъй като

$$|q| = \frac{1}{2} < 1,$$

безкрайната сума съществува и е

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}.$$

Следователно

$$S_\infty = \frac{8}{1+\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}.$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{16}{3}}$$

Решение на задача 2

(а) За да бъдат дефинирани логаритмите, трябва да е изпълнено

$$x - 1 > 0 \qquad \text{и} \qquad x - 3 > 0.$$

Следователно

$$x > 1 \qquad \text{и} \qquad x > 3.$$

Оттук получаваме

$$\boxed{x > 3}$$

или

$$\boxed{D = (3, +\infty)}.$$

(б) При $m = 3$ уравнението е

$$\log_2(x-1) + \log_2(x-3) = 3.$$

Използваме свойството

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc).$$

Получаваме

$$\log_2\big((x-1)(x-3)\big) = 3.$$

Следователно

$$(x-1)(x-3) = 2^3 = 8.$$

Разкриваме скобите:

$$x^2 - 4x + 3 = 8,$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Решаваме квадратното уравнение:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36.$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 6}{2}.$$

Следователно

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = -1.$$

Понеже допустимите стойности са $x > 3$, коренът $x = -1$ не е допустим.

Затова

$$\boxed{x = 5}.$$

Решение на задача 3

(а) Функцията е дробно-рационална, затова знаменателят трябва да е различен от нула:

$$x^2 - 9 \neq 0.$$

Разлагаме:

$$x^2 - 9 = (x-3)(x+3).$$

Следователно

$$x \neq 3 \qquad \text{и} \qquad x \neq -3.$$

Дефиниционното множество е

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}}.$$

(б) Търсим стойностите на x, за които

$$f(x) = x - 3.$$

Това означава, че

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 8}{x^2 - 9} = x - 3.$$

Понеже $x \neq -3$ и $x \neq 3$, можем да умножим двете страни по $x^2 - 9$:

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = (x-3)(x^2-9).$$

Разкриваме дясната страна:

$$(x-3)(x^2-9) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27.$$

Следователно

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 8 = x^3 - 3x^2 - 9x + 27.$$

Съкращаваме еднаквите членове:

$$6x - 8 = -9x + 27.$$

Получаваме

$$15x = 35,$$

$$x = \frac{7}{3}.$$

Понеже

$$\frac{7}{3} \neq -3 \qquad \text{и} \qquad \frac{7}{3} \neq 3,$$

стойността е допустима.

$$\boxed{x = \frac{7}{3}}$$

(в) Трябва да докажем, че

$$f(x) = x - 3 + \frac{15x - 35}{x^2 - 9}.$$

За $x \in D$ имаме $x^2 - 9 \neq 0$. Започваме от дясната страна:

$$x - 3 + \frac{15x - 35}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2-9)}{x^2 - 9} + \frac{15x - 35}{x^2 - 9}.$$

Обединяваме дробите:

$$x - 3 + \frac{15x - 35}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2-9) + 15x - 35}{x^2 - 9}.$$

Разкриваме скобите:

$$(x-3)(x^2-9) = x^3 - 3x^2 - 9x + 27.$$

Следователно

$$\frac{(x-3)(x^2-9) + 15x - 35}{x^2 - 9} = \frac{x^3 - 3x^2 - 9x + 27 + 15x - 35}{x^2 - 9}.$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 8}{x^2 - 9}.$$

Това е точно

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 8}{x^2 - 9}.$$

Следователно за всяко $x \in D$ е изпълнено

$$\boxed{f(x) = x - 3 + \frac{15x - 35}{x^2 - 9}}$$

Решение на задача 4

(а) Основата е правоъгълник със страни 18 cm и 24 cm. Неговите диагонали са равни.

$$d = \sqrt{18^2 + 24^2}$$

$$d = \sqrt{324 + 576} = \sqrt{900} = 30 \text{ cm}.$$

Следователно

$$\boxed{d_1 = d_2 = 30 \text{ cm}}$$

(б) Понеже околните ръбове са равни, височината на пирамидата минава през центъра на описаната около основата окръжност.

Разстоянието от центъра на правоъгълника до негов връх е половината от диагонала:

$$\frac{d}{2} = 15 \text{ cm}.$$

Околният ръб е 25 cm. Получаваме правоъгълен триъгълник с хипотенуза 25 cm и катет 15 cm:

$$h^2 + 15^2 = 25^2.$$

$$h^2 = 625 - 225 = 400.$$

$$h = 20 \text{ cm}.$$

Следователно

$$\boxed{h = 20 \text{ cm}}$$

(в) Да се намери косинусът на ъгъла между околна стена и основа.

Разглеждаме околната стена, построена върху страната с дължина 24 cm.

Нека M е средата на тази страна. Тъй като пирамидата е права, проекцията на върха S върху основата е центърът O на правоъгълника.

Разстоянието от центъра на правоъгълника до страната с дължина 24 cm е

$$OM = \frac{18}{2} = 9 \text{ cm}.$$

От т. (б) знаем, че височината на пирамидата е

$$SO = 20 \text{ cm}.$$

В сечението през точките S, O и M получаваме правоъгълен триъгълник SOM с прав ъгъл при O.

Намираме

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \sqrt{20^2 + 9^2} = \sqrt{481}.$$

Ъгълът между околната стена и основата е равен на ъгъла между правите SM и OM, т.е. на $\angle SMO$.

Следователно

$$\cos\alpha = \frac{OM}{SM} = \frac{9}{\sqrt{481}}.$$

Следователно

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{481}}}.$$