

НЯКОИ ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА АНАЛИТИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ТРИМЕРНИ ПОТЕНЦИАЛНИ ПОЛЕТА

Андрей Козаров, Снежана Стоянова

Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“, София 1700

Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“, София 1700; E-mail: stoyanova_8000@abv.bg

РЕЗЮМЕ. Изведени са изразите за потенциалните функции на пространствени електрични полета. Предимство на метода е възможността за аналитично изследване на интензитета на конкретно реално електрично поле.

Ключови думи: потенциални функции, електрическа интензивност, идентични потенциални повърхности

SOME POSSIBILITIES FOR ANALYTICAL STUDYING OF 3-D POTENTIAL FIELDS

Andrey Kozarov, Snezhana Stoyanova

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", Sofia 1700, Bulgaria

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", Sofia 1700, Bulgaria; E-mail: stoyanova_8000@abv.bg

ABSTRACT. Expressions of potential functions for spacial electric fields are found. The priority of the method is the possibility for an analytic investigation of the intensity for a concrete real electric field.

Key words: potential functions, electric intensity, potential identical surfaces.

Известно е [1], че методът на комплексната променлива дава възможност да се получат неограничен брой аналитични изрази, определящи потенциала на плоскопаралелни полета. Аналогичен подход може да се използва и за анализ на тримерни потенциални полета въз основа на следните разсъждения.

Разглежда се комплексната аналитична функция

$$\pi = \pi(x, y, z) = R_e(\pi) + j I_m(\pi),$$

където $R_e(\pi) = U_R(x, y, z)$ и $I_m(\pi) = U_I(x, y, z)$ са реални

функции на координатите. Нека функцията $\pi(x, y, z)$ зависи от координатите по следния начин:

$$\pi = \pi(W), \text{ където } W = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

В такъв случай, за да бъде изпълнено условието на

Лаплас $\Delta \pi = 0$, е достатъчно да е в сила равенството:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \pi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial W^2} \cdot \alpha^2 +$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial W^2} \beta^2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial W^2} \gamma^2 = 0$$

Следователно, за да удовлетворява функцията π условието на Лаплас, е достатъчно да е в сила равенството:

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

Лесно се установява, че ако функцията π удовлетворява уравнението на Лаплас, то и реалната и имагинерната ѝ части задължително трябва да удовлетворяват това уравнение. От тук се установява, че функциите $U_R(x, y, z)$ и $U_I(x, y, z)$ са потенциални.

Вижда се, че съществува възможност да се получават неограничен брой потенциални функции, някои от които може да имат практическо приложение. Интерес представляват функциите от вида:

$$U(x, y, z) = U_1(W_1) + U_2(W_2), \text{ където:}$$

$$W_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \text{ и } W_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z;$$

$$\frac{W_1}{W_2} \neq \text{const}$$

и съответните коефициенти отговарят на условието (1).

С помощта на съвременната изчислителна техника лесно може да се анализират голям брой тримерни потенциални функции и да се архивират тези, които може

да имат отношение към решаването на конкретни задачи, например в електростатиката.

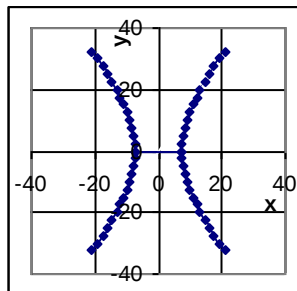
Вижда се, че методът на конформното изображение, прилаган при плоскопаралелни полета представлява частен случай, определен от условието:

$$\alpha_1=1, \beta_1=j, z=0; \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=0.$$

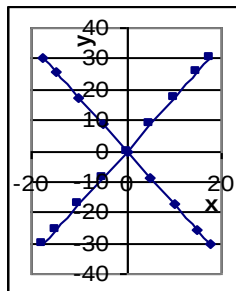
Пример 1:

$$U = R_e \left\{ \pi_1 + \pi_2 \right\} = R_e \left\{ W_1 \left\{ +k W_2^2 \right\} ; \right\}$$

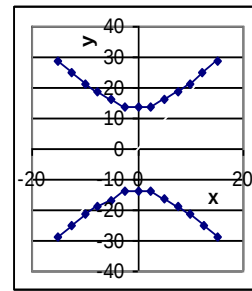
$\alpha_1=1, \beta_1=j, \gamma_1=0; \alpha_2=1, \beta_2=0, \gamma_2=j$. От тук се получава



$C=+27$



$C=0$



$C=-27$

Фиг.1. Пресечници на три екипотенциални повърхнини с равнината $z=0$ и $k=2$

Пример 2:

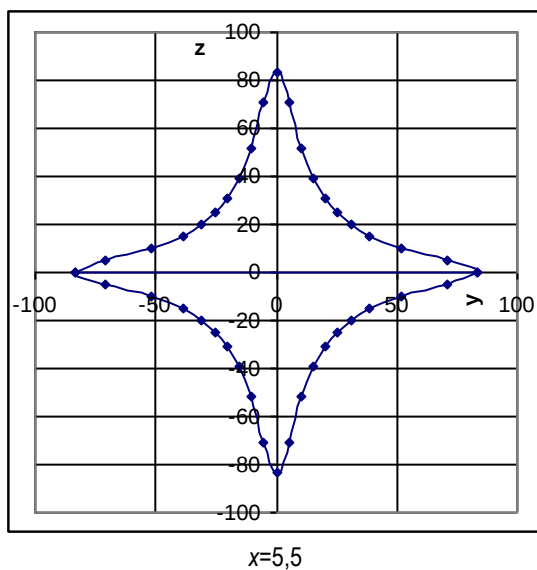
$$U(x,y,z) = R_e \left\{ \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \right\}$$

$\alpha_1=1, \beta_1=j, \gamma_1=0; \alpha_2=1, \beta_2=0, \gamma_2=j$

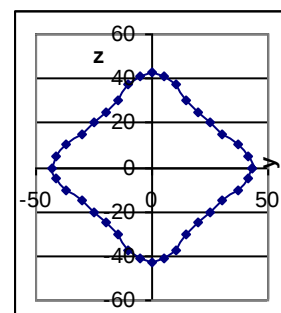
Получава се:

$$U(x,y,z) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + z^2}$$

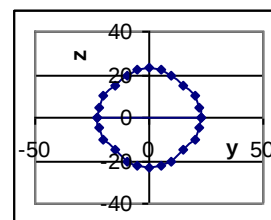
Фигура 2 дава представа за екипотенциалната повърхност $U(x,y,z)=0,2$. Показани са кривите при пресичане на тази повърхност с равнините $x=9, x=7, x=5,5$.



$x=5,5$



$x=7$



$x=9$

Фиг.2. Криви на пресичане на екипотенциалната повърхност $U(x,y,z)=0,2$ с равнините $x=9, x=7$ и $x=5,5$

Интерес представлява аналитичното определяне на електрическия интензитет в една характерна точка-върхът на изпъкналостта с координати: $x=10$, $y=0$, $z=0$.

$$\vec{E} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = k_U \cdot \frac{2}{x^2} \vec{i}$$

Тук коефициентът k_U се определя от стойността на потенциала на разглежданата екипотенциална повърхност, изразен във волтове и приетата единица за измерване на координатите. При стойност на потенциала $U=100 \text{ kV}$ и единица за измерване на координатите $[cm]$, $k_U=500 \text{ kV/cm}$. Тогава $E=E_x=10 \text{ kV/cm}$.

Интересно е да се отбележи, че ако околността на върхната точка, например с радиус 3 cm се апроксимира със сфера, заредена до същия потенциал $U=100000 \text{ V}$, за чиито радиус се получава $R=5 \text{ cm}$, интензитетът се получава $E_{сф.}=20 \text{ kV/cm}$.

Значението на предложения подход е твърде ограничено. Причината е обстоятелството, че получаваните тримерни потенциални функции за цялото пространство не отговарят на полета, създадени от реални електроди.

Препоръчана за публикуване от
Катедра "Електротехника", МЕМФ

Ползата все пак е във възможността да се определят аналитично и сравнително лесно потенциални тримерни функции, които да са твърде близки до реални полета в отделни области от пространството. При наличието на изчислителни устройства с много голяма памет е възможно да се създаде база данни за много голям брой такива аналитични функции, измежду които компютърът да намира най-подходящия аналитичен израз за зададена част от екипотенциална повърхност.

Предимство на аналитичното изразяване на потенциалното поле, дори и за ограничена област от пространството, е възможността да се определи аналитично и полето на електрическия интензитет чрез израза:

$$\vec{E} = -grad U$$

Литература:

Нейман, Л.Р. и К.С. Демирчан. Теоретические основы электротехники т. II.