

## СКАЛАРЕН МАГНИТЕН ПОТЕНЦИАЛ НА ЕДНА ФАЗА НА СФЕРИЧЕН ИНДУКТОР

**Константин Костов, Константин Тричков**

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, E-mail: costovs@yahoo.com

**РЕЗЮМЕ.** При вихровата машина с цилиндричен активен обем технологичният процес се осъществява чрез поле, въртящо се около надлъжната ѝ ос. Предлага се конструкция на вихрова машина със сферичен активен обем, в която магнитното поле се върти последователно около трите координатни оси. По този начин се подобряват параметрите на технологичния процес. Изчислява се скаларният магнитен потенциал, създаден от една фаза на индуктора. Резултатът е представен в ред от сферични хармоници.

### SCALAR MAGNETIC POTENTIAL PRODUCED BY A PHASE COIL OF SPHERICAL STATOR

**Konstantin Kostov, Konstantin Trichkov**

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, E-mail: costovs@yahoo.com

**ABSTRACT.** In the vortex machine which is with cylindrical active volume the technological process is realized by a field rotating around its longitudinal axis. It is proposed a structure of vortex machine with spherical active volume where magnetic field rotates consecutively round the three Cartesian coordinates. Thus the operating parameters are improved. The scalar magnetic potential produced by a phase coil of the inductor is calculated. Results obtained are expressed as a series of spherical harmonics.

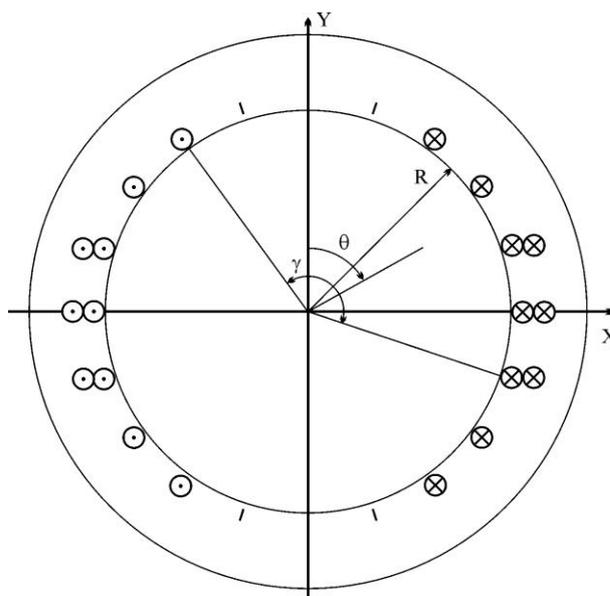
Във вихровите машини се използват въртящи се магнитни полета за задвижване на феромагнитни работни частици, които осъществяват технологичен ефект. С цел подобряване на параметрите му, се предлага вихрова машина със сферичен индуктор. Той представлява сферична повърхнина, която от вътрешната страна е с пръстеновидни канали, разположени като паралелите в географския глобус, в които се полага фазната намотка. Вътрешният радиус на повърхнината е  $R$ , а дебелината – подходяща за осигуряване на ярем на магнитопровода. Независимо от начина на изпълнение на намотката (равносекционна или неравносекционна), в средните канали на фазната група се поставят секции с удвоен брой навивки. Така се получава намотка, еквивалентна на двуслойна. Тя е скъсена в електромагнитно отношение и е с относителна стъпка  $\beta = \frac{\gamma}{\pi}$ , Фиг. 1.

Изследването се извършва при допълнителното допускане, че се пренебрегва напречното сечение на проводниците на намотката. Секциите представляват окръжности върху гладката сферична повърхнина.

Нека първо разгледаме полето, създадено от една фазна намотка. Разпределението на магнитния потенциал по повърхнината на сферата е еднакво във всички равнини, минаващи през оста на фазната намотка. Поради съществуващата симетрия, полето няма компонента, перпендикулярна на тези равнини. Всички силови линии лежат в тях. Това обосновава съществуването на поле с осева симетрия, по-точно плоско-меридианно поле. Тъй като възбудителят е сферичен, се прилага сферична координатна система  $(r, \theta, \varphi)$ , като полярният ъгъл  $\theta$  се

отчита от оста на разглежданата фаза. В уравнението на Лаплас в сферични координати отчитаме факта, че полето не зависи от ъгъла  $\varphi$  и уравнението добива вида

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_{\mu\phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_{\mu\phi}}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (1)$$



Фиг. 1. Схема на една фаза от намотката  
 Представяме магнитния потенциал като произведение:

$$u_{\mu\phi}(r, \theta) = S(r)\Phi(\theta).$$

Заместваме в (1) и получаваме

$$\frac{1}{S} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dS}{dr} \right) = -\frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right).$$

Тъй като лявата част зависи само от  $r$ , а дясната – само от  $\theta$ , следва, че двете части на уравнението могат да са само постоянни. Получават се две обикновени диференциални уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dS}{dr} \right) &= k, \\ \frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) &= -k. \end{aligned} \quad (2)$$

Първото е Ойлерово линейно хомогенно диференциално уравнение. Полага се частното му решение  $S = r^m$  и след заместване получаваме последователно:

$$\begin{aligned} r^{-m} \left[ r^2 m(m-1)r^{m-2} + 2rmr^{m-1} \right] &= k, \\ m(m+1) &= k. \end{aligned}$$

Характеристичното уравнение е  $m^2 + m - k = 0$ . Между корените му съществуват зависимостите:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = -1 \\ m_1 \cdot m_2 = -k \end{cases}$$

Да приемем, че  $m_1 = m$ . Тогава от първото уравнение следва, че  $m_2 = -m - 1$ . Общото решение на Ойлеровото диференциално уравнение е

$$S = Ar^m + \frac{B}{r^{m+1}}.$$

Заместваме установената по-горе връзка  $k = m(m+1)$  във второто уравнение на (2):

$$\frac{1}{\Phi \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Phi}{d\theta} \right) + m(m+1) = 0.$$

Това е диференциално уравнение на Лъожандр. Както ще бъде показано по-долу, интересуваме се само от решението му за  $m = \text{цяло число}$ . Едно негово частно решение за конкретно  $m = \text{цяло число}$  се дава чрез полиномите на Лъожандр (Шимони, 1964):

$$P_m(\cos \theta) = \frac{1}{2^m m!} \left[ \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} (\cos^2 \theta - 1)^m \right]. \quad (3)$$

Съществуват и частни решения от друг вид, които клонят към безкрайност при  $\theta \rightarrow 0$  и затова се изключват при изследване на поле, съдържащо ос на симетрия, (за която  $\theta = 0$ ). Функциите  $P_m(\cos \theta)$  се наричат също зонални сферични хармоници.

Интересуваме се от полето вътре в сферата, където  $r < R$ . За да се избегне безкрайна стойност на потенциала при  $r = 0$ , се приема интеграционната константа  $B = 0$ . За конкретно  $m$  общото решение на уравнението на Лаплас е

$$u_{\mu\phi}(r, \theta) = Ar^m P_m(\cos \theta).$$

Тъй като  $m$  по принцип взема всички цели стойности, по-големи от нула, то общото решение на уравнението на Лаплас е

$$u_{\mu\phi}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^m P_m(\cos \theta). \quad (4)$$

Сечението на сферичния индуктор с коя да е равнина  $\varphi = \text{const.}$ , минаваща през оста на фазата, е окръжност, по която токовете проводници имат разположение, аналогично на това при напречното сечение на цилиндрична неявнополюсна вихрова машина с външен индуктор. Ето защо разпределението на м.д.н. по сечението  $\varphi = \text{const.}$  се определя по формулите за променливотоковите електрически машини (Волдек, 1966) при брой на полюсите  $2p = 2$ . За разглежданата фаза в произволен момент се получава

$$F_{\phi}(\theta, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\phi\nu}(t) \cos \nu\theta,$$

където

$$\nu = 1, 3, 5, 7, \dots;$$

$$F_{\phi\nu}(t) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{wk_{w\nu}}{\nu} I \sin \omega t = F_{\phi\nu \max} \sin \omega t;$$

$$F_{\phi\nu \max} = 2\sqrt{2} \frac{wk_{w\nu}}{\nu\pi} I.$$

Знаците тук са съобразени така, че положителната посока на м.д.н. на фазата и фазовият ток образуват десен винт.

Ще изследваме полето в момента  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , когато

фазовият ток е максимален. Тъй като силовите линии не напускат равнината  $\varphi = \text{const.}$ , намираме аналогично на (Костов, 1987) магнитния потенциал по разглежданата окръжност, създаден от фазната намотка:

$$\begin{aligned} u_{\mu\phi}(R, \theta) &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\phi\nu \max} \sin \frac{\pi}{2} \cos \nu\theta = \\ &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\phi\nu \max} \cos \nu\theta. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно е (Шимони, 1964), че ако една функция и нейната производна са по части непрекъснати, тя може да се представи в ред от сферични хармоници, т.е. чрез сумиране на функции от вида (4) при  $m =$  цяло число. От друга страна, граничното условие (5) трябва да е равно на (4) за  $r = R$ . Следователно наистина  $m$  трябва да е цяло число, което използвахме по-горе за представяне на решението на уравнението на Лъжандр чрез полиномите (3).

Хармониците за една фаза са нечетни:  $\nu = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$ . Да разложим в ред от сферични хармоници първите два пространствени хармоника на Фуриеровия ред на магнитния потенциал по окръжността. Не се интересуваме от нулевия сферичен хармоник, защото е постоянен, (тъй като  $P_0(\cos \theta) = 1 = const.$ ) и следователно е с нулев принос при определянето на магнитния интензитет. Първият Фуриеров хармоник на потенциала е  $u_{\mu\phi 1} = -F_{\phi 1 \max} \cos \theta$  и създава сферични хармоници с коефициенти, (Шимони, 1964)

$$a_m^{(1)} = \frac{2m+1}{2} \int_0^\pi (-F_{\phi 1 \max} \cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Заместваме  $x = \cos \theta$ ,  $dx = -\sin \theta d\theta$  и получаваме

$$a_m^{(1)} = \frac{2m+1}{2} F_{\phi 1 \max} \int_1^{-1} x P_m(x) dx. \quad (6)$$

Ако вземем под внимание, че съгласно (3) за  $m = 1$ , в (6)  $x$  е равно на  $P_1(x)$ , интегралът добива вида

$$\int_1^{-1} P_1(x) P_m(x) dx.$$

Както е известно, полиномите на Лъжандр образуват ортогонална система в интервала  $(-1, 1)$ . Следователно интегралът е равен на нула за всяко  $m \neq 1$ . Изводът е, че първият пространствен Фуриеров хармоник на магнитния потенциал се представя само чрез първия си сферичен хармоник. Тогава

$$\begin{aligned} a_m^{(1)} &= a_1^{(1)} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{2} F_{\phi 1 \max} \int_1^{-1} x P_1(x) dx = \\ &= \frac{3}{2} \int_1^{-1} x^2 dx = -F_{\phi 1 \max}. \end{aligned}$$

Да разложим третия пространствен Фуриеров хармоник  $u_{\mu\phi 3} = -F_{\phi 3 \max} \cos 3\theta$  в ред от сферични хармоници с коефициенти

$$a_m^{(3)} = \frac{2m+1}{2} \int_0^\pi (-F_{\phi 3 \max} \cos 3\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Заместваме

$$\cos \theta = x, \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta = 4x^3 - 3x$$

и получаваме

$$a_m^{(3)} = \frac{2m+1}{2} F_{\phi 3 \max} \int_1^{-1} (4x^3 - 3x) P_m(x) dx. \quad (7)$$

Известно е, че  $P_m(x)$  е полином от  $m$ -та степен, като степените му са или само четни и нула, или само нечетни. За  $m =$  четно ч. и нула подинтегралната функция в (7) е полином само с нечетни степени, поради което интегралът при симетрични спрямо нулата граници е равен на нула. Следователно за  $m = 0, 2, 4, 6, \dots$  се получава, че  $a_m^{(3)} = 0$ . За  $m = 1$ :

$$\begin{aligned} a_1^{(3)} &= \frac{2 \cdot 1 + 1}{2} F_{\phi 3 \max} \int_1^{-1} (4x^3 - 3x) P_1(x) dx = \\ &= \frac{3}{2} F_{\phi 3 \max} \int_1^{-1} (4x^3 - 3x)x dx = \frac{3}{5} F_{\phi 3 \max}. \end{aligned}$$

За  $m = 3$

$$\begin{aligned} a_3^{(3)} &= \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} F_{\phi 3 \max} \int_1^{-1} (4x^3 - 3x) P_3(x) dx = \\ &= \frac{7}{4} F_{\phi 3 \max} \int_1^{-1} (4x^3 - 3x)(5x^3 - 3x) dx = -\frac{8}{5} F_{\phi 3 \max}. \end{aligned}$$

За  $m > 3$  получаваме от (7)

$$a_m^{(3)} = \frac{2m+1}{2} F_{\phi 3 \max} \left[ \int_1^{-1} (5x^3 - 3x) P_m(x) dx - \int_1^{-1} x^3 P_m(x) dx \right].$$

Отчитаме, че  $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = P_3(x)$  и заместваме

$$x^3 = \frac{2}{5} P_3(x) + \frac{3}{5} P_1(x):$$

$$\begin{aligned} a_m^{(3)} &= (2m+1) F_{\phi 3 \max} \left[ \int_1^{-1} P_3(x) P_m(x) dx - \right. \\ &\left. - \frac{1}{5} \int_1^{-1} P_3(x) P_m(x) dx - \frac{3}{10} \int_1^{-1} P_1(x) P_m(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Поради свойството ортогоналност, трите интеграла са равни на нула. Следователно за всяко естествено число  $m > 3$  коефициентът  $a_m^{(3)}$  на  $m$ -тия сферичен хармоник в развитието на третия Фуриеров хармоник е нула. Вижда се, че при разлагането на третия Фуриеров хармоник на потенциала по граничната окръжност се получават първи и трети сферични хармоници.

И така, първите два Фуриерови хармоници на скаларния магнитен потенциал по окръжността, получена от сечението на сферичната повърхнина с коя да е равнина  $\varphi = const.$ , се разлагат в ред от сферични хармоници, (Шимони, 1964), както следва:

$$u_{\mu\phi}(R, \theta) = -F_{\phi 1 \max} \cos \theta - F_{\phi 3 \max} \cos 3\theta = [a_1^{(1)} + a_1^{(3)}]P_1(\cos \theta) + a_3^{(3)}P_3(\cos \theta). \quad (8)$$

Приравняваме последния израз от (8) на  $u_{\mu\phi}(r, \theta)$  от (4) за  $r = R$ . Намираме:

$$A_1 = \frac{a_1^{(1)} + a_1^{(3)}}{R} = \frac{-F_{\phi 1 \max} + 0,6F_{\phi 3 \max}}{R}$$

$$A_3 = \frac{a_3^{(3)}}{R^3} = -\frac{1,6F_{\phi 3 \max}}{R^3}.$$

Препоръчана за публикуване от катедра "Електротехника", МЕМФ

Скаларният магнитен потенциал за всяка точка, съгласно (4) е

$$u_{\mu\phi}(r, \theta) = \frac{-F_{\phi 1 \max} + 0,6F_{\phi 3 \max}}{R} r \cos \theta - \frac{0,8F_{\phi 3 \max}}{R^3} r^3 (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta). \quad (9)$$

Получената формула за потенциала за една фаза от намотката позволява да се изчисли магнитният интензитет във всяка точка. След прилагане на суперпозицията може да се определи полето на многофазна намотка.

## Литература

- Волдек, А. И. 1966, *Електрически машини*. М., Энергия, 782 с.
- Костов, К. 1987, Многополюсно въртящо се магнитно поле при отсъствие на вторична среда. – *Научна сесия "ВМЕИ "Ленин" '87"*, С.
- Шимони, К. 1964, *Теоретическая электротехника*. М., Мир, 773 с.