

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ВЪЗМОЖНОСТТА ЗА ВЪЗСТАНОВЯВАНЕ НА НЕПРЕКЪСНАТО ГРАФИЧНО ИЗОБРАЖЕНИЕ ОТ ДИСКРЕТНО ПРЕДСТАВЯНЕ ПРИ ЧИСЛЕНОТО МОДЕЛИРАНЕ НА МИННИТЕ РАБОТИ

Юлиян Димитров

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, България, juldim@abv.bg

РЕЗЮМЕ: Прилагането на компютърната технология при моделирането и проектирането на минни обекти открива нови възможности за бързо и ефективно реализиране на нови технологии.

В настоящия материал се обосновава тезата, че при съвременните компютърни средства се заличава разликата между графичните и аналитичните методи по отношение на точност, достъпност и лесна приложимост. Чрез методите за разпознаване на чертежи и графики на зависимости е възможно създаването на универсална електронна форма на представяне на геомеханичните модели.

Обсъжда се прилагането при численото моделиране на минните работи на възможността за възстановяване на непрекъснато графично изображение от дискретно представяне.

APPLYING OF THE POSSIBILITY FOR RESTORING OF CONTINUOUS GRAPHICAL IMAGE FROM DISCRETE PRESENTATION AT NUMERICAL MODELLING OF MINING

Julian Dimitrov

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, juldim@abv.bg

ABSTRACT: The applying of the computational technology in the modeling and the designing of mining objects opens new possibilities for quick and effective realization of new technologies.

The paper based on the thesis, that with contemporary computer means is obliterating the distinction between graphical and analytical methods in respect of accuracy, accessibility and easy applicability. By the methods for recognition of drawings and graphics of dependencies is possible the making of universal electronic form of the presentation of the geomechanical models.

There is discussed the applying of the possibility for restoring of continuous graphical image from discrete presentation in numerical mining modeling.

Увод

Съвременният специализиран софтуер за проектиране и управление на минните работи използва графични изображения предимно за илюстрация на изходната информация. Изображенията се получават в резултат на прилагането на съответни аналитични методи на механика на непрекъснатите среди. Много информация за такива програмни продукти се съдържа в сайта на GGSD (Geotechnical and Geoenvironmental Software Directory) създаден през 1996 год. от Tim Spink. От многото тематични направления представени в сайта представляват интерес *Rock Mechanics, Mapping* и *Numerical analysis*. Понеже много от задачите в областта на минното дело имат както аналитични така и графични решения (Димитров и Димитрова, 1989), то би трябвало тези тематични направления да се обединят. Същевременно с все по-рационалното прилагане на нови компютърни технологии се видоизменят и графичните методи, като геометричните построения се извършват в паметта на дисплея. Геометричните обекти се описват като структури

от данни. Логиката на решаването на задачата се осъществява на базата на графични методи.

Цел

Да се обоснове еквивалентността между непрекъснатата аналитична зависимост на параметрите на геомеханичен числен модел и графичното (дискретно) представяне на този модел при определени условия.

Да се обсъдят основните свойства на графичното изображение, формулирани от теория на машинната графика, теория на машинното разпознаване на графичното изображение и графичните методи приложими при работа с числени модели на минните технологии.

Да се представи единна схема на оптималното представяне на електронното графично изображение на числен геомеханичен модел.

Прилагани графични методи за решаване на задачи при числено моделиране на минните работи

Теоретична основа на графичните методи при решаване на минно-геометрични задачи е теорията, създадена от проф. П.К.Соболевский за "геохимичното поле". Особен

интерес представляват методите за съставяне и работа с геомеханични карти като средство за описване на свойствата на масива, изразени със стойностите на геомеханичните показатели.

Машинно реализираните графични изображения са дискретизирани в равномерна мрежа от точки. От друга страна, геомеханичните параметри са с големи относителни грешки, достигащи до 50%. Тези факти и съществуващата теория и практика за обработка на изображенията дават възможност геомеханичните параметри да се представят графично с неголяма гъстота на мрежата.

Във Димитров и Димитрова (1989), е въведено понятието графичен модел, с което се обобщават геомеханична карта, план на минните работи, диаграма на напуканост на Шмит и всички други графични изображения, използвани за двумерно или обемно представяне. Развива се идеята за изобразяване на статистически независимите параметри, като базисни и за прилагане на алгебрични операции с тези изображения. Предлагат се основни компютърни инструментални средства за създаване на система за работа с база данни от графични модели и работа с тях. Използването на такива бинарни операции с изображения са дадени в Рыжов (1952), където реализацията се прави с примитивни чертожни инструменти.

Построяването на графичния модел се осъществява чрез прогнозиране на геомеханичните параметри в условията на ограничена информация. В Димитров и Димитрова (1989), са предложени аксиоми на прогнозния модел и от тях е изведена формула за построяване на графичното изображение:

$$z(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n z_i D_i}{\sum_{i=1}^n 1/D_i} \quad (1),$$

където z_i са стойности на изобразявания параметър в критичната точка (x_i, y_i) , n е броят на най-близките до (x, y) токи от множеството на критичните точки

$$T = \{(x_i, y_i)\} \quad \text{и} \quad D_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

Въпросът за избора на n при прилагане на формулата (1) се обсъжда в Букринский (1985). Формула (1) представлява изглаждащ филтър или още е статистическа мода.

Изобразяват се основни геомеханични величини, като тензора на напреженията, на деформациите, модула на срез и максималните тангенциални напрежения при анизотропен масив, коефициента на устойчивост на скалите и други, които формират поле – *полеви параметри на минните технологии*.

Основни елементи на теорията на машинната графика и машинното разпознаване

Предмет на изследванията и приложенията са обработката и анализа на информацията представена във формата на изображение. Изображението представлява информация организирана във вид на правоъгълна, числова матрица (равномерен масив от данни), записана на машинен носител и с определени свойства на изобразяваните обекти, както и дефинирани геометрични трансформации на тези обекти. Аналогично може да се използва и многомерен масив от данни. При определени условия изображението е рационално средство за организиране и представяне на информацията.

В теорията са основни три направления: *машинна графика* – създаване на изображение по изходна информация представена, като последователен запис; *разпознаване на изображение* – получаване на формално описание на свойствата на обекти от изображението (Pavlidis, 1982); *обработка на изображението* – трансформиране на изходното изображение в ново изображение с цел представяне на информацията в определен вид (Pratt, 1978).

При представяне на графичната информация в електронна форма съгласно Pavlidis (1982) изображенията се делят на четири класа: *клас 1* – цветни сканирани изображения в битов формат; *клас 2* – чернобели сканирани изображения, изчистени от шум и получени евентуално от изображенията от клас 1 посредством сегментация; *клас 3* – графични изображения, които са описани чрез криви линии, съхранени в някаква форма на верижен код; *клас 4* са векторни изображения и са получени при описването на кривите линии от клас 3 чрез особените им (критични) точки, отсечки и правоъгълници и правила за възпроизвеждането им. Преминването от един клас към съседен става чрез определена трансформация на изображението (таб.1).

Таблица 1.
Видове стандартни трансформации на електронно представени изображения

Вид трансформация	от клас	в клас
Сегментация	Клас1	Клас 2
Получаване на контур или гръбнак	Клас2	Клас 3
Сегментация на кривите за получаване на критични точки	Клас3	Клас 4
Апроксимация и получаване на контурни криви	Клас4	Клас 3
Запълване на контура (штриховка)	Клас3	Клас 2
Изглаждане (филтрация)	Клас2	Клас 1

Условия за еквивалентност между непрекъснатата зависимост и нейното дискретно представяне

Казваме, че непрекъснатата зависимост F е представена дискретно, когато е избрана таблица \bar{F} от краен

брой стойности на аргумента (възлзи на F) и съответните им функционални стойности. Най-често възлите са равномерно разположени в дефиниционното множество. Таблицата \bar{F} ще наричаме дискретна зависимост (дискретно изображение). Това представяне на зависимостите съответства на стохастичното поведение на параметрите на геомеханичния модел и на използването на стандартни размери в производствената практика. Тук ще разгледаме въпроса за възстановимост на дискретно представени зависимости в механика на непрекъснатите среди.

• Ще казваме, че \bar{F} е възстановимо, когато информацията за процеса, описан с непрекъснатото изображение F се съдържа изцяло в \bar{F} и F може да се възстанови. Ако \bar{F} е представимо с възможно най-малък брой елементи, то казваме че \bar{F} е *оптимално възстановимо*.

Достатъчно общата постановка води до примери с много начини на възстановяване на изображение. Определящо понятие е точността на дискретното представяне. Поради характера на скалния масив, като основен обект, параметрите са с определена *допустима точност*. Това е гранична точност, която не може да се подобри. Конкретната минна технология, също определя гранична точност на параметри като линейни размери, скорост на изпълнение на минните работи и др. Това свойство на геомеханичните параметри е причина дискретното им представяне с определена стъпка на дискретизация, да е оптимално, както относно начина на съхранение и информативност, така и относно възможността за приложение – например приложение на метода MVD (Димитров 2003). Можем да отделим няколко вида възстановяване.

А. Възстановяване при допълване на информацията за достигане на определена достоверност

Построяването на графичното изображение обикновено се изпълнява по критични точки и с формула за получаване на стойности в точките от дискретната мрежа. Оценката за достоверност се определя като плътност на критичните точки отчетена по графиката на изображението в околност на оценяваната точка (Димитров, 1988). Задава се с формулата

$$g(x, y) = \frac{p_n z_{cp} S \left(\sum \frac{1}{D_i} \right)}{\sqrt{z_{cp}^2 + S z_x^2 + S z_y^2}}, \quad (2)$$

$$\text{където } p_n = \frac{1}{\sum_{m=1}^n \left(2 \prod_{v=2}^m \frac{2v-2}{2v-1} \right)^2};$$

z_{cp} - средната стойност на изобразявания параметър в равномерната мрежа;

S - лице на изображението;

$$z = z(x, y) \text{ и } D_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}.$$

След като се определи една допустима стойност на оценката за достоверност може да се приложи алгоритъм формулиран в Димитров (1988) за получаване на области от картираното поле, в които трябва да се разположат нови критични точки за подобряване на точността. Когато се постигне допустимата стойност на оценката за достоверност, се получава изображение, което с достатъчна точност представя стойностите на параметъра в зависимост от координатите и в този смисъл имаме оптимално възстановимо дискретно изображение.

Б. Възстановимост при оптимален избор на дискретната мрежа чрез интегрално преобразуване (Теоремата на Котелников – Шенон в тензорна форма)

Напреженията и деформациите са основни тензорни величини в минната механика. Има и други параметри представляващи непрекъснати тензорни величини.

Нека $X = (x_{ij})_{i,j=1}^3$ и $U = (u_{ij})_{i,j=1}^3$ са тримерни матрици. Нека сме означили $X \cdot U = \text{Sp}[(x_{ij})(u_{kl})] = \sum_i \sum_j x_{ij} u_{ji}$. Нека $F(X)$ е функционално съответствие на тензора X , представимо с многократен интеграл

$$\text{на Фурие } F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} G(U) e^{2\pi i X \cdot U} dU \text{ и}$$

$$G(U) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(X) e^{-2\pi i U \cdot X} dX \text{ е спектър на}$$

$F(X)$. Стойностите на F и G могат да бъдат числа, вектори или най-общо тензори и горните равенства разглеждаме в съответния смисъл. Зависимостта $Y = F(X)$ представя геомеханичен процес с входни параметри X и изходни параметри Y и е изображение, което чрез дискретизиране може да се представи, като графичен модел описан с 6-мерен масив от данни. Понеже F и G представят реален процес, те са дефинирани в ограничени множества извън които можем да приемем, че те или компонентите им имат стойност нула. Нека $G(X)$ е нула извън $\Omega = [-\Omega_{11}, \Omega_{11}] \times [-\Omega_{12}, \Omega_{12}] \times \dots \times [-\Omega_{33}, \Omega_{33}]$.

В Димитров (2003) е изведен следния *критерий за оптимална възстановимост*: Изображението F се определя изцяло (без загуба на информацията) от дискретната

зависимост $\bar{F} \equiv F\left(\frac{1}{2}T\right)$ с точки от Ω , когато стойностите на всяка от променливите е взета със стъпка

$$h_{ij} = \frac{1}{2\Omega_{ij}}. \text{ Големината на стъпката } h_{ij} \leq \frac{1}{2\Omega_{ij}}$$

на равномерната мрежа е условието за еквивалентност между аналитичната зависимост F и нейното дискретно представяне \bar{F} .

В. Възстановимост при оптимален избор на дискретната мрежа чрез оценка на градиента

• Нека в интервала $U \subset \mathbb{R}$ е дефинирана една физична величина v . Ще казваме, че тази величина е с **допустима абсолютна грешка** ε , ако за всеки две стойности $v_1, v_0 \in U$ на величината е изпълнено $|v_1 - v_0| \leq \varepsilon$ точно когато са предметно неразличими – т.е. от технологични или други приложни съображения двете стойности се възприемат като неразличими.

• Нека U не съдържа числото нула. Ще казваме, че v е с **допустима относителна грешка** ε , ако за всеки две стойности $v_1, v_0 \in U$ на величината е изпълнено $\left| \frac{v_1 - v_0}{v_0} \right| \leq \varepsilon$, точно когато v_1 и v_0 са предметно неразличими.

• Нека $A = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$. Ако ε_j е допустима абсолютна грешка на j -тата компонента на A , то $\varepsilon = \|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\|$, където $\|\cdot\|$ е означена евклидовата норма, наричаме **допустима абсолютна грешка** на данните от X . Аналогично се дефинира **допустима относителна грешка**.

Нека $y = f(x)$ е функция на един аргумент, дефинирана в интервала X и $Y = f(X) = [c, d]$. В случая, когато Y е с по-голяма размерност, направените тук разсъждения могат лесно да се обобщат. Нека δ е допустима абсолютна грешка за $y \in Y$. Тогава интервалът $[c, d]$ може да се раздели на подинтервали с възможно най-малък брой дялящи точки, така че във всеки подинтервал числата да са неразличими от една фиксирана, вътрешна за интервала точка, наречена **моделна точка**. Нека числата $x_1, x_2, \dots, x_l \in X$ са избрани така че $\bar{y}_j = f(x_j)$ са моделни числа. Тогава за всяко $x \in X$ съществува такава $x_j \in X$, за което $|f(x) - f(x_j)| \leq \delta$. Означаваме $\bar{f}_\delta(x) = f(x_j) = \bar{y}_j$ и наричаме **дискретно представяне** на f .

• Нека $\varepsilon \geq 0$ и $\delta \geq 0$ са съответно допустимите относителна грешка за X и абсолютна грешка за $Y = [c, d]$. Ще казваме, че дискретното представяне \bar{f}_δ на f **може да се възстанови**, при дадената относителна грешка ε , ако за всеки две предметно различни $y', y'' \in [c, d]$, за които $|y' - y''| \geq \delta$, съществуват съответни предметно различни $A, A_0 \in X$ (т.е.

съществува и $S \in \overline{AA_0}$), такива че $\|AA_0\|_S \geq \varepsilon$ и е изпълнено $f(A) = y'$, и $f(A_0) = y''$.

Критерий за възстановимост: Нека означим $\|BB_0\| = |f(A) - f(A_0)|$, където $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Нека отсечката $\overline{AA_0}$ не пресича координатните равнини и $S \in \overline{AA_0}$, $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Означаваме $\|AA_0\|_S = \sqrt{\sum_i \left(\frac{x_i - x_i^0}{s_i} \right)^2}$. Нека

$\varepsilon \geq 0$ и $\delta \geq 0$ са съответно допустимите относителна грешка за X и абсолютна грешка за Y . Ако е изпълнено $\frac{\|BB_0\|}{\|AA_0\|_S} \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$, то дискретното представяне \bar{f} на f може да се възстанови (Димитров 2003).

Може да се покаже, че $\frac{\|BB_0\|}{\|AA_0\|_S}$ се оценява с неподобряема оценка $\text{grad}_{\ln}(f) = \sqrt{\sum_j \left(\frac{\partial f(E)}{\partial \ln x_j} \right)^2}$. Изображе-

нието е оптимално възстановимо, ако в X и Y моделните елементи са равномерно разположение съответно със стъпки 2ε и 2δ . По този начин, чрез стойностите на $\text{grad}_{\ln}(f)$ и грешките ε и δ се определя възможността за възстановимост на дискретното представяне \bar{f} - в това се изразява метода MVD - Method for Valuation of Dependence (Димитров 2003). и е възможен оптимален избор на измерваните данни от X .

Г. Възстановимост при площни карти (изображения от клас 2)

Изображения от този вид са площните карти представляващи геометрични модели на минните параметри. Съгласно Pavlidis, (1982) *условието за възстановимост* на дискретно изображение от клас 2 е: Нека h е стъпката на правоъгълна мрежа, в която е зададено дискретно изображение \bar{F} съответно на F .

1. Съществува число $d > \sqrt{2}h$, такава че за всяка гранична точка M на област R от един и същи цвят съществува кръг C с радиус d , допиращ се до границата на R в M изцяло лежащ в R ;
2. Свойство 1. е изпълнимо и за допълнението на множеството R .

Изпълнението на условието за възстановимост, означава, че има долна граница за ширината на областта R и кривината на контура на R . В този случай теоремата на Котелников – Шенон гласи: Ако е изпълнено условието за възстановимост, то дискретното изображение \bar{F} запазва топологията на графиката на F (запазва формата на обектите на изображението).

Д. Възстановимост по дадени критични точки и форму-ла за изобразяване

Такива са числените модели, получавани по метода на граничните елементи. В основния вариант критичните точки са равномерно разпределени по границата на изобразяваната област. Изобразяват се поледи параметри. Формулата за изобразяване е аналитично описание на полето създадено от точков източник. Критерия за възстановимост е оценка на стойности на параметъра във вътрешни за областта точки.

В числено отношение методът е по-бърз от методът на крайните елементи, но трудно се прави предварително оценка на грешката. Гъстотата на критичните точки се определя експериментално. Възможно е прилагането му при използване и на вътрешни критични точки и също така, когато всички критични точки са вътрешни. В последния случай оптимално е разположението на критичните точки, когато са с еднаква плътност по графиката на изображението (Димитров, 1988).

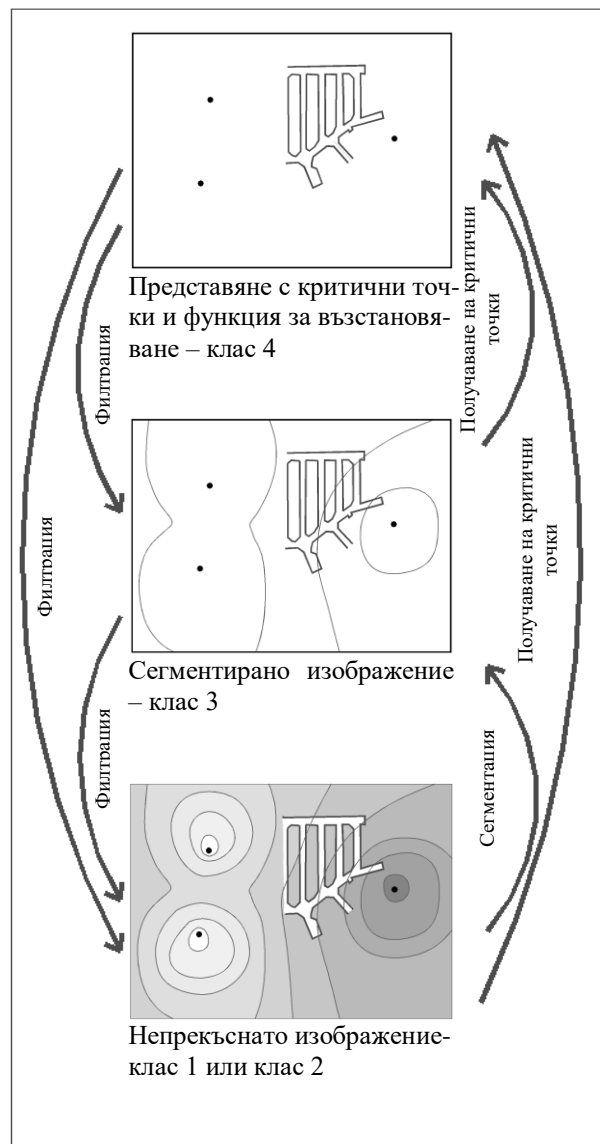
Концепция за оптимално представяне на електронно графично изображение на геомеханичен модел

В минните науки се използват аналитични и графични средства за построяване на моделите. Възстановимостта на електронния графичен модел при оптималното му представяне осигурява възможността за лесно обработване, съхранение в малък обем памет и при необходимост получаване на аналитично описание. Осигурява и еквивалентността между аналитичните и графични средства.

При оптималните графични модели е възможно решение на въпроса за *точността на модела* по начин съответстващ на реалните обекти на моделирането (Димитров 2003). Графичните методи дават възможност за *достъпна и лесна за приложенията среда* за работа с числения модел. На практика се съчетават по-рационални аналитични и графични методи на минните технологии.

Графичните изображения на поледи параметри могат да бъдат обработвани съгласно таб.1. На фиг.1 са дадени трите основни начина за графично представяне на изображенията представляващи графики на поледи променливи и чертежи на минни съоразения, както и трансформациите за преобразуване.

В практическата реализация на такива изображения не се прави съществена разлика между клас 1 и клас 2. Също така този тип изображения се заменят често с изображения от клас 3 или просто с изображения от клас 1, предварително подложени на сегментация за да съдържат само няколко основни области. Поради това може да се приеме, че най-често се работи с изображения от клас 3, които могат да бъдат съхранявани в съгъстена форма като изображения от клас 4

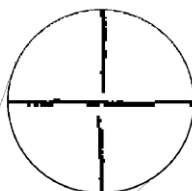


Фиг. 1: Схема на оптимално представяне и стандартни обработки на електронно графично изображение на числен геомеханичен модел

Приложение в научно-изследователската област

В Димитров (2003) е обсъдено едно приложение на възможността за възстановимост на дискретни изображения за получаване на формула по дадена диаграма и на електронна форма на таблици и скали от изображение върху хартиен носител. Възстановяването се осъществява с алгоритмите за разпознаване: оконтурване; описване на контура с основни вектори; разпознаване на скали и редуващи се успоредни отсечки; отделяне на символи; интерполация за получаване на формули на зависимости, съответстващи на дадена графика и разпознаване на символите

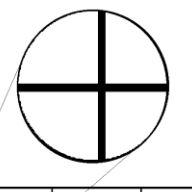
Като илюстрация на фиг. 2 е представено сканирано копие на таблица с разделителна способност 300dpi.



\bar{x}_i	n_i	δ_i	$\delta_i n_i$	$\delta_i^2 n_i$	$\delta_i^3 n_i$	$\delta_i^4 n_i$
1,75	1	-1,51	-1,51	2,2801	-3,4450	5,2020
2,25	2	-1,01	-2,02	2,0402	-2,0606	2,0812
2,75	9	-0,51	-4,59	2,3409	-1,1939	0,6089
3,25	14	-0,01	-0,14	0,0014	0	0
3,75	8	0,49	3,92	1,9208	0,9412	0,4612
4,25	3	0,99	2,97	2,9403	2,9109	2,8818
4,75	1	1,29	1,29	1,6641	2,1467	2,7692
			-0,08	13,1878	-0,7007	14,0043

Фиг. 2: Сканирано копие на таблица

На фиг.3 е изобразен резултатът от векторизиране на таблицата, който се изразява в получаване на електронна копия на таблицата от фиг.2



\bar{x}_i	n_i	δ_i	$\delta_i n_i$	$\delta_i^2 n_i$	$\delta_i^3 n_i$	$\delta_i^4 n_i$
1,75	1	-1,51	-1,51	2,2801	-3,4450	5,2020
2,25	2	-1,01	-2,02	2,0402	-2,0606	2,0812
2,75	9	-0,51	-4,59	2,3409	-1,1939	0,6089
3,25	14	-0,01	-0,14	0,0014	0	0
3,75	8	0,49	3,92	1,9208	0,9412	0,4612
4,25	3	0,99	2,97	2,9403	2,9109	2,8818
4,75	1	1,29	1,29	1,6641	2,1467	2,7692
			-0,08	13,1878	-0,7007	14,0043

Фиг. 3: Векторизирано копие на таблица

Обсъдената възможност за получаване в електронен и аналитичен вид на елементи на геометричния модел може да послужи за създаване на програмна система за числени експерименти и вземане на технологични решения.

Приложение при проектиране на обектите на минните технологии

Прилаганите модели на геомеханиката съответстват само на конкретни геомеханични условия и възприета технология на добив. Налага се да се извършат нови изследвания,

както при проучването и проектирането, така и по време на разработването на минните обекти. Същевременно в научната литература се появяват и нови разработки, коригират се използваните до сега методи и се налагат нови изводи.

Практика е използването на компютърната техника в геомеханиката за изчисления, реализиране на числени методи, числени експерименти и симулации на процесите. Съвременните персонални компютри имат мощни изчислителни и графични възможности. Това позволява всеки графично представим модел да бъде реализиран в електронна форма, задвижен и по всякакъв начин и трансформиран в съответствие с представите на изследователя. Но реализираните до сега по този начин модели са създадени конкретно за илюстриране на решаваната задача и нямат универсална форма подходяща за целите на проектирането.

С настоящия материал се предлага да се използват постиженията на графичния софтуер за адаптиране на методите на минните технологии с цел автоматизиране на моделирането и проектирането на минните работи.

Литература

Букринский В.А. 1985, Геометрия недр. *Недра*
 Димитров Ю. 1988. Определяне на нови замерни станции при прогнозиране на геомеханичните показатели на базата на геометрична достоверност, *Год. ВМГИ*, т. XXXIV
 Димитров Ю. 2003. Оптимизиране на информативността на данните и оценка на числените модели в геомеханиката, Сб. Доклади "Съвременни геомех. методи в минната промишленост и подземното гражданско и тунелно строителство", Несебър
 Димитров Ю. 2003. Оценка на зависимостите използвани за оразмеряване на целици и камери, Сб. Доклади "Съвременни геомех. методи в минната промишленост и подземното гражданско и тунелно строителство", Несебър
 Димитров Ю. 2003. Развитие на графоаналитичните методи при геомеханичното моделиране и проектирането на минните работи със съвременни компютърни средства, Сб. Доклади "Съвременни геомех. методи в минната промишленост и подземното гражданско и тунелно строителство", Несебър
 Димитров Ю., С. Димитрова, 1989. Инструментални средства за работа с прогнозни графични модели в геомеханиката, *Год. ВМГИ*, т. XXXV
 Рыжов П.А. 1952. Геометрия недр, М.
 Pavlidis T. 1982. Algorithms for Graphics and Image Processing, Comp. Sc. Press
 Pratt W.K. 1978. Digital Image Processing, New York