

АНАЛИТИЧНО ФОРМУЛИРАНЕ И ОПТИЧНА ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НА ДИСКРЕТНОТО ПРЕДСТАВЯНЕ НА НЕПРЕКЪСНАТИ ЗАВИСИМОСТИ

Юлиян Димитров ¹, Таня Любенова ²

¹ Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, juldim@abv.bg

² СУ "Св. Кл. Охридски", Факултет по физика, 1000 София

РЕЗЮМЕ. Моделите на геомеханиката се характеризират с големи относителни грешки на важни параметри на процесите като напрежение, деформационни параметри и др. Тази статия се основава на възможността за дискретно представяне на зависимостите между параметрите на реален процес, описани в тензорна форма. Предлаганият подход е приложен в математическото моделиране в геомеханиката.

ANALITICAL FORMULATION AND OPTICAL INTERPRETATION OF DISCRETE PRESENTATION OF CONTINUOUS DEPENDENCES

Julian Dimitrov ¹, Tania Lyubenova ²

¹ University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, juldim@abv.bg

² University of Sofia, Faculty of Physics, 1000 Sofia

ABSTRACT. The geomechanical models characterized by the large relative error main defining parameters of processes as stress, deformation parameters and etc. This material is based on the possibility of the discrete presentation of the dependencies between the parameters of real process in tensor form. The offered approach is applicable in mathematical modeling in geomechanic.

Въведение

Характерът на геомеханичните процеси е такъв, че методите за изследване трябва да са свързани непосредствено с реалната среда. Основно се разчита на аналогията с други приложни области като механика на твърдото тяло, на класто-механичните среди, на насипните среди и др. Съществуващите теоретични изследвания и съответни модели в теорията на скалния натиск са с ограничено, върху конкретни минни обекти, приложение и трудно се адаптират за други геомеханични и минно-технологични условия. Необходими са средства за привеждане на сложни аналитични модели в достъпни правила, формули, таблици и др., без това да повлияе на качеството на проектирането на минния обект или разрешаването на конкретен технологичен проблем. Тази задача може да се формулира и като задача за избор на такива методи за моделиране, които водят до най-голяма информативност на данните.

Дискретно представяне на зависимостите

При геомеханичното моделиране на скалния масив се приема схема с определена степен на приближение на механичните свойства – квазинепрекъсната среда. Най-разпространени са модели, при които скалата е еднородна или слоиста среда, еластична или с трошливи, или пластични деформации. Такава среда съдържа определени

структурни елементи, поради което описването на геомеханичните модели с непрекъснати зависимости е приближено.

За да бъде един модел изразен със зависимостта $y = F(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, съобразен с предметните свойства на участващите в неговото описание величини, трябва да се отчита и приближения му характер. Това може да се направи чрез възстановимо дискретно представяне $\bar{y} = \bar{F}(x)$ на зависимостта между параметрите.

Казваме, че непрекъснатата зависимост F е представена дискретно, когато е избрана таблица $\bar{F}$ от краен брой стойности на аргумента (възли на F) и съответните им функционални стойности. Най-често възлите са равномерно разположени в дефиниционното множество. Тогава $\bar{F}$ ще наричаме дискретна зависимост (дискретно изображение). Това представяне на зависимостите съответства на вероятностното поведение на параметрите на геомеханичния модел и на използването на стандартни размери в производствената практика.

Определения:

- Нека в интервала $U \subset \mathbb{R}$ е дефинирана една физична величина v . Ще казваме, че тази величина е с **допустима абсолютна грешка** ε , ако за всеки две стойности $v_1, v_0 \in U$ на величината е изпълнено $|v_1 - v_0| \leq \varepsilon$ точно когато са предметно неразличими –

т.е. от технологични или други приложни съображения двете стойности се възприемат като неразличими.

• Нека U не съдържа числото нула. Ще казваме, че v е с **допустима относителна грешка** ε , ако за всеки две стойности $v_1, v_0 \subset U$ на величината е изпълнено

$$\left| \frac{v_1 - v_0}{v_0} \right| \leq \varepsilon, \text{ точно когато } v_1 \text{ и } v_0 \text{ са предметно}$$

неразличими.

• Нека $A = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$. Ако ε_j е допустима абсолютна грешка на j -тата компонента на A , то $\varepsilon = \|(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)\|$ наричаме **допустима абсолютна грешка** на данните от X . Аналогично се дефинира **допустима относителна грешка**.

Нека $y = f(x)$ е функция на един аргумент, дефинирана в интервала X и $Y = f(X) = [c, d]$. В случая, когато Y е с по-голяма размерност, направените тук разсъждения могат лесно да се приложат.

Нека δ е допустима абсолютна грешка за $y \in Y$. Тогава интервалът $[c, d]$ може да се раздели на подинтервали с възможно най-малък брой делящи точки, така че във всеки подинтервал числата да са неразличими от една фиксирана, вътрешна за интервала точка, наречена **модална точка**. Нека числата $x_1, x_2, \dots, x_l \in X$ са избрани така че $\bar{y}_j = f(x_j)$ са модални числа. Тогава за всяко $x \in X$ съществува такова $x_j \in X$, за което $|f(x) - f(x_j)| \leq \delta$. Означаваме $\bar{f}_\delta(x) = f(x_j) = \bar{y}_j$ и наричаме **дискретно представяне** на f .

Ще казваме, че $\bar{F}$ е възстановимо, когато информацията за процеса, описан с непрекъснатото изображение F се съдържа изцяло в $\bar{F}$ и F може да се възстанови.

Определение: Нека $\varepsilon \geq 0$ и $\delta \geq 0$ са съответно допустимите относителна грешка за X и абсолютна грешка за $Y = [c, d]$. Ще казваме, че дискретното представяне $\bar{f}_\delta$ на f **може да се възстанови**, при даденото ε , ако за всеки две предметно различни $y', y'' \in [c, d]$, $(|y' - y''|) > \delta$, съществуват съответни предметно различни $A, A_0 \in X$ (т.е. съществува и $S \in \overline{AA_0}$), такива че $\|AA_0\|_S > \varepsilon$ и е изпълнено $f(A) = y'$, и $f(A_0) = y''$.

В механиката на скалите, където преобладават малки скорости на динамични прояви е в сила принципът на Галилей за независимост при равномерно движение. Поточно в геомеханичните системи протичат процеси инвариантни относно линейни трансформации в мировото пространство и изцяло зависещи от началното състояние (Арнольд, 1989). Т.е. състоянието на механичната система във всеки следващ момент зависи само от нарастването на координатите и нарастването на скоростта спрямо

началния момент. От този извод, пренесен за други физични величини освен път и скорост следва, че за да се получат за еквивалентните геомеханични системи еднакви оценки трябва:

1. Оценката да зависи само от нарастването на аргументите и съответното нарастване на функционалната стойност;
2. Оценката да е независима от пропорционалната промяна на мащабите на аргументите и функционалните стойности.

Критерий за възстановимост:

Нека означим $\|BB_0\| = |f(A) - f(A_0)|$, където $A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Нека отсечката $\overline{AA_0}$ не пресича координатните равнини и $S \in \overline{AA_0}$, $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Означаваме

$$\|AA_0\|_S = \sqrt{\sum_i \left(\frac{x_i - x_i^0}{s_i} \right)^2}. \text{ Нека } \varepsilon \geq 0 \text{ и } \delta \geq 0 \text{ са}$$

съответно допустимите относителна грешка за X и абсолютна грешка за Y . Ако е изпълнено

$$\frac{\|BB_0\|}{\|AA_0\|_S} \leq \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad (1)$$

то дискретното представяне $\bar{f}$ на f може да се възстанови.

Доказателство: Нека $|y' - y''| > \delta$ и $y' = f(A)$, $y'' = f(A_0)$. От $\frac{|y' - y''|}{\|AA_0\|_S} \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$ следва

$$\|AA_0\|_S \geq \frac{\varepsilon}{\delta} |y' - y''| > \varepsilon.$$

Установихме, че частното $\frac{\|BB_0\|}{\|AA_0\|_S}$ може да се оцени

с неподбрана оценка $\text{grad}_{\ln}(f)$. Тогава неравенство (1) може да се напише във вида

$$\text{grad}_{\ln}(f) \leq \varepsilon, \quad (2)$$

което представлява условието за възстановимост.

Следователно, чрез стойностите на градиента и грешките ε и δ се определя възможността за възстановимост на дискретното представяне $\bar{f}$ и е възможен оптимален избор на измерваните данни от X .

Представяне на непрекъсната зависимост с ред на Котелников

Тук ще разгледаме въпроса за възстановимост на дискретно представени зависимости в механика на непрекъснатите среди, където процесите се описват със зависимости между тензорни величини (Ильющин, 1971). Представяме доказателството на теоремата на Котелников

– Шенон в тензорна форма (Котельников; 1933, Котельников, 1956; Shanon, 1948).

Нека $X = (x_{ij})_{i,j=1}^3$ и $U = (u_{ij})_{i,j=1}^3$ са тримерни матрици от променливи. Използваме тензорната операция $X \cdot U = \text{Sp}[(x_{ij})(u_{kl})] = \sum_i \sum_j x_{ij} u_{ji}$ (Минчев, 1980).

Операцията е комутативна $X \cdot U = U \cdot X$

Нека $F(X)$ е функционално съответствие на тензора X , представимо с многократен интеграл на Фурие

$$F(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} G(U) e^{2\pi i X \cdot U} dU, \quad (4)$$

където е означена диференциалната форма $dU = du_{11} du_{12} \dots du_{33}$. Тогава ще бъде изпълнено

$$G(U) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F(X) e^{-2\pi i U \cdot X} dX, \quad (5)$$

където $G(U)$ е спектър на $F(X)$. Стойностите на F и G могат да бъдат числа, вектори или най-общо тензори и горните равенства разглеждаме в съответния смисъл. Зависимостта $Y = F(X)$ представя геомеханичен процес с входни параметри X и изходни параметри Y . Понеже F и G представят реален процес, те са дефинирани в ограничени множества извън които можем да приемем, че те или компонентите им имат стойност нула. Нека $G(X)$ е нула извън

$$\Omega = [-\Omega_{11}, \Omega_{11}] \times [-\Omega_{12}, \Omega_{12}] \times \dots \times [-\Omega_{33}, \Omega_{33}]$$

$$\text{Тогава } F(X) = \int_{\Omega} G(U) e^{2\pi i X \cdot U} dU.$$

Нека G е представена с реда

$$G(U) = \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} a_{-T} e^{\pi i T \cdot U}, \quad (6)$$

където $T = \left(\frac{n_{ij}}{\Omega_{ij}} \right)$, $n_{ij} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$a_{-T} = \frac{1}{\prod_{i,j} (2\Omega_{ij})} \int_{\Omega} G(U) e^{-\pi i T \cdot U} dU = \frac{1}{\prod_{i,j} (2\Omega_{ij})} F\left(-\frac{1}{2} T\right)$$

$$\text{следователно } G(U) = \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} a_{-T} e^{-\pi i T \cdot U} =$$

$$= \frac{1}{\prod_{i,j} (2\Omega_{ij})} \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{1}{2} T\right) e^{-\pi i T \cdot U}$$

и

$$F(X) = \int_{\Omega} \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} a_{-T} e^{-\pi i T \cdot U} \cdot e^{2\pi i X \cdot U} dU =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} a_{-T} \int_{\Omega} e^{-\pi i (2X-T) \cdot U} dU = \\ & = \frac{1}{\prod_{i,j} (2\Omega_{ij})} \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{1}{2} T\right) \prod_{i,j=1}^3 \frac{2\Omega_{ij}}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi (2\Omega_{ij} x_{ij} - n_{ij})}{2\Omega_{ij} x_{ij} - n_{ij}} = \\ & = \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{1}{2} T\right) \prod_{i,j=1}^3 \frac{\sin \pi (2\Omega_{ij} x_{ij} - n_{ij})}{\pi (2\Omega_{ij} x_{ij} - n_{ij})} \\ & F(X) = \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{1}{2} T\right) \prod_{i,j=1}^3 \frac{\sin(\varpi_{ij} x_{ij} - n_{ij} h_{ij})}{(\varpi_{ij} x_{ij} - n_{ij} h_{ij})}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{където } \varpi_{ij} = 2\pi\Omega_{ij} = \frac{\pi}{h_{ij}}$$

Така се доказва, че ако F е с ограничен в Ω спектър то F се определя изцяло от дискретната зависимост $\bar{F} = \left\{ F\left(\frac{1}{2} T\right) \right\}$ с точки във всяка от променливите със

$$\text{стъпка } h_{ij} = \frac{1}{2\Omega_{ij}} \text{ т.е. без загуба на информация.}$$

Полученото развитие на F е ред на Котелников. От гледна точка на приложенията F също може да се приеме, че има краен носител – компонентите на F приемат стойност 0 извън определено дефиниционно множество

$$D = [a_{11}, b_{11}] \times [a_{12}, b_{12}] \times \dots \times [a_{33}, b_{33}].$$

Тогава F е представена като крайна сума от вида (1) и е развиваема в степенен ред навсякъде в D . От горните изводи е ясно, че F може да се разглежда, като достатъчно точно непрекъснато представяне на дискретното изображение $\bar{F}$.

В този случай критерият за възстановимост, разгледан по-горе е изпълнен, когато моделните точки $\left\{ \frac{1}{2} T \right\}$ са зададени, така че стъпката h_{ij} не надминава допустимата относителна грешка $|h_{ij}| \leq \varepsilon_{ij}$.

Това е изпълнено при достатъчно големи Ω_{ij} . В този случай съгласно теоремата на Котелников – Шенон $F \equiv \bar{F}$. В общия случай е възможно областта Ω да не е достатъчно голяма. Тогава ако означим реда на Котелников съответен на $\bar{F}$ с $\bar{F}_K$ е изпълнено $F \neq \bar{F}$. В случая на $F \equiv \bar{F} \equiv \bar{F}_K$ може да смятаме, че дискретното представяне на зависимостта $\bar{F}$ съдържа цялата информация и е с допустима абсолютна грешка.

Оптическа интерпретация

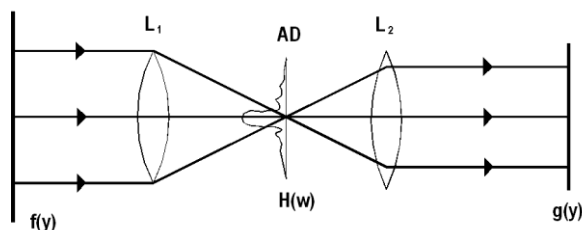
Опитът, който има и научните изследвания, които са правени в областта на цифровата оптика, може да бъде

използван за подходяща обработка на дискретната функция с цел повишаване на точността на модела. Един пример на такова приложение е представен в (Димитров, 2003).

Независимо от броя на участващите параметри използваните в реалните модели зависимости имат свойства аналогични на двумерните изображения. Следва за тях да се прилагат подходящи числени методи на оптиката, като подробно представените в Prat (1978) и Pavlidis (1986).

Според Бриджмен, физически са само тези величини, които могат да се измерят (Brillouin, 1964). Обектите, които не се наблюдават и не подлежат на измерване нямат действително физическо съществуване. При всяко измерване или използване на параметър в практиката се допуска неизбежно случайна грешка. Случайната грешка се получава от неточност на уредите за измерване и неточност на приложния модел.

Можем да направим аналогия между приближения характер на параметрите на моделите в геомеханиката и моделите на оптични системи с ограничаваща апертура.



Фиг. 1. Оптична система с ограничаваща апертура

На фиг. 1 схематично е представена оптична система с апертурна диафрагма AD , която пропуска само част от спектъра. От входния за системата образ $f(y)$ се формира образът $g(y)$. На фиг.1 е представена телескопична оптична система, състояща се от две лещи L_1 и L_2 и апертурна диафрагма AD .

Оптичната система изкривява образа $f(y)$ по различни причини: не идеални среди на оптичните елементи; грешки при калибрирането на системата; сферична и други aberации. Прекъсването на вълновия фронт от апертурата предизвиква дифракция на Фраунхофер. Така възникват вълнови aberации на полето след апертурната диафрагма. Диафрагмата представлява и филтър за спектъра. Един от начините за подобряване на изображението $g(y)$ е преодоляването на ограничаващите свойства на апертурната диафрагма.

Когато дискретното представяне е такова, че не може да се възстанови, може по аналогия да се съпостави на оптична система с по-малка апертура от допустимата. Необходимо е спектърът на дискретното представяне да се продължи извън областта, която го ограничава.

Повишаването на качеството на изображението (аналогично точността на $\bar{F}$) може да се постига чрез аналитично продължаване на спектъра, извън дифракционното ограничение. За целта е създаден ефективен метод, използващ изтеглени сфероидални

вълнови (ИСВ) функции (Slepian, 1964; Slepian, 1965; Хонина, 2000).

Това е редица от едномерни функции $\{\Psi_{nc_{ij}}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, където функциите $\Psi_{nc_{ij}}(x)$ са дефинирани в $(-\infty, +\infty)$

и зависят освен от x и от $c_{ij} = \frac{T_{ij}\Omega_{ij}}{2}$, $i, j = 1, 2, 3$.

(ИСВ) функциите се дефинират със следните свойства:

1. Спектъра на редицата от функции $\Psi_{nc_{ij}}(x)$ е

ограничен в

$$\Omega = [-\Omega_{11}, \Omega_{11}] \times [-\Omega_{12}, \Omega_{12}] \times \dots \times [-\Omega_{33}, \Omega_{33}]$$

2. Функциите $\{\Psi_{nc_{ij}}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ са ортонормирани по

реалната ос

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{nc_{ij}}(x) \Psi_{mc_{ij}}(x) dx = \delta_{nm} \quad (8)$$

3. Функциите $\{\Psi_{nc_{ij}}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ са ортонормирани в

множеството

$$T = [-T_{11}, T_{11}] \times [-T_{12}, T_{12}] \times \dots \times [-T_{33}, T_{33}]$$

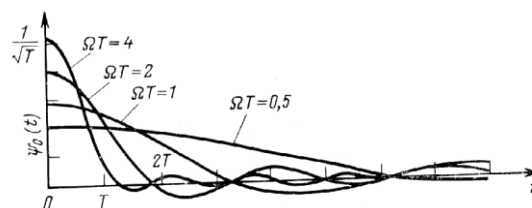
$$\int_{\frac{-T_{ij}}{2}}^{\frac{T_{ij}}{2}} \Psi_{nc_{ij}}(x) \Psi_{mc_{ij}}(x) dx = \delta_{nm} \quad (9)$$

4. За всяко x е изпълнено

$$\lambda_{ij} \Psi_{nc_{ij}}(x) \int_{\frac{-T_{ij}}{2}}^{\frac{T_{ij}}{2}} \frac{\sin \Omega_{ij}(x-t)}{\pi(x-t)} \Psi_{nc_{ij}}(t) dt \quad (10)$$

Изтеглените сфероидални вълнови (ИСВ) функции представляват пълна ортонормирана система, както върху цялата права така и в краен интервал. Изображението развито в ред по ИСВ функциите е устойчиво спрямо дифракционния ефект при система с ограничена апертура. ИСВ функциите притежават свойството да се "самовъзпроизвеждат" – те са собствени функции на оператора на дифракцията на Френел при ограничена апертура.

За прсмятането на ИСВ функциите са създадени числени методи (Хонина, 1999; Волотовский и др., 2000).



Фиг. 2. ИСВ функции при различни стойности на параметъра $\frac{c}{2}$

Описание на метода на аналитично продължаване на спектъра:

Нека $N = (\lambda_{ij})_{j,j=1}^3$. Интерполирането на спектъра се осъществява по формулата

$$U(X) = \sum_{n_{11}=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{n_{33}=-\infty}^{+\infty} a_N \prod_{i,j=1}^3 \Psi_{n_{ij}c_{ij}}(u_{ij}), \quad (11)$$

където

$$a_T = \frac{1}{\prod_{i,j=1}^3 (\lambda_{ij})} \int \prod_{i,j=1}^3 \Psi_{n_{ij}c_{ij}}(u_{ij}) dU. \quad (12)$$

Приложение на дискретното представяне на зависимостите

В реалните геомеханичните модели параметрите са с големи относителни грешки: за якост на натиск на скалата – 20%; за линейни размери – 5% и за натиск на горнището върху целици или крепеж – от 50% до 100%. Тези стойности за грешките са допустими грешки. Както е показано в Димитров (2003) съответното дискретно представяне $\overline{F}$ е не възстановимо ($F \neq \overline{F}_K$). Разгледан е пример с хоризонтална минна изработка с образуван свод. Данните при конкретните геомеханични условия за един участък включват следните механични величини:

l - ширина на изработката при дименсия (дефиниционен интервал) $2.8m \div 4.2m$ и размерност $[l] = L$.

През периода, когато са набирани данните, са се провеждали минните работи при указаната ширина на изработката;

h - височина на свода след обрушаване с дименсия $2m \div 4m$ и размерност $[h] = L$;

γ - обемно тегло на скалата, $\gamma \in \{21, 22, 23, 24\} \text{ kN/m}^3$ и размерност $[\gamma] = NL^{-3}$;

σ_R - якостна (структурна) константа на скалата с дименсия $6kN/m^2 \div 25kN/m^2$ и $[\sigma_R] = NL^{-2}$;

Допустимата грешка за параметрите е зададена с:

$$l \in [2.8, 4.2] \pm 0.1, \quad h \in [2, 4] \pm 0.25, \\ \gamma \in \{21, 22, 23, 24\} \pm 0.5, \quad \sigma_R \in [6, 25] \pm 20\%$$

$$\text{Връзката между параметрите е } h = 0.15 \frac{\gamma l^2}{\sigma_R}.$$

Съответните допустими относителни грешки за параметрите са $\varepsilon_l = \frac{0.1}{l}$, $\delta_h = \frac{0.25}{h}$, $\varepsilon_\gamma = \frac{0.5}{\gamma}$.

При зададените допустими грешки за параметрите l , γ и σ_R , се проверява дали грешката на изчислената по формулата стойност на h не надминава числото 0.25.

Пресмята се градиента

$$\begin{aligned} \text{grad}_{\ln}(F) &= \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial \ln l}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \ln \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \ln \sigma_R}\right)^2} = \\ &= h \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = h\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Допустимата средна относителна грешка за данните се представя с

$$\varepsilon = \|AA_0\|_S = \sqrt{\left(\frac{0.1}{1}\right)^2 + \left(\frac{0.5}{\gamma}\right)^2 + (0.2)^2} \geq 0.2.$$

По критерия за възстановимост (2) за грешката на получените стойности за h имаме $\Delta h \geq h \cdot \sqrt{6} \cdot \varepsilon \approx h \cdot 0.49 > 2.0 \cdot 0.49 > 0.25$.

Получава се, че ползвайки формулата в цялото дефиниционно множество X се допуска грешка значително по-голяма от допустимата за h .

В Димитров (2003) е направена оценка на формули за оразмеряване на камери и целици. Установено е, че при пресмятането по някои формули се получава не допустима грешка в резултата. Може да се забележи, че част от формулите, при които пресмятането е с допустима грешка могат да се разглеждат като теглови средни. При пресмятането по тези формули грешката не надвишава грешката на данните.

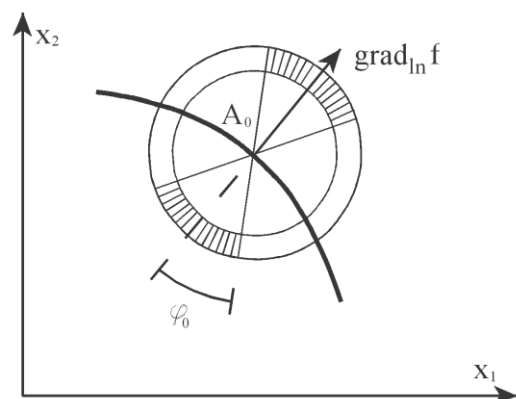
В Димитров (2008) е отслабено условието за възстановимост, като е прието неравенството (2) да е изпълнено навсякъде освен в достатъчно малък доверителен интервал.

На Фиг.3 е илюстрирано пространството на аргументите $X \subset \mathbb{R}^n$, градиента $\text{grad}_{\ln} f$ в точка A_0 и графиката на повърхнината на f . Изобразено е кълбо с радиус ε и сегмент от кълбото с ос успоредна на $\text{grad}_{\ln} f$ и ъгъл φ_0 .

Вероятността p точки от кълбото да попаднат в сегмента е равна на отношението на обема на сегмента

$$\text{към обема на кълбото } p = \frac{V(\varphi_0)}{V} = \frac{\int_0^{\varphi_0} \sin^{m-2} \varphi d\varphi}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \varphi d\varphi},$$

където m е броя на аргументите на f , за които модела се прилага с неточни данни.



Фиг. 3. Приведено кълбо на грешките и критична област

Кълбото на грешките се определя от три независими параметъра $k = \cos \varphi_0$, $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_m^2}$ и $\|grad_{in} f\|$. Смятаме, че в интервала на всеки параметър е определена критична област (подинтервал) с вероятност p . Вероятността точка от кълбото да попадне едновременно в трите критични области е p^3 и тогава числото $1 - \bar{p} = 1 - p^3$ е доверителната вероятност F да се възстанови. При този избор на $\bar{p}$ можем да смятаме, че имаме намаляване на радиуса на кълбото $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \dots + \varepsilon_m^2}$ на $\bar{\varepsilon} = (1 - p)\varepsilon$ и аналогично на дължината на градиента $\|grad_{in} f\|$ на $(1 - p) \cdot \|grad_{in} f\|$.

Окончателно условието за възстановимост е

$$k \cdot (1 - p)^2 \cdot \|grad_{in} f\| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}, \quad (13)$$

където $k = \cos \varphi_0$, $\varphi_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

В [Димитров 18] е разгледана задачата за определяне на граничната височина H на откоса на съпало от неработния борд [5]. Височината H се изчислява по формулата $H = \frac{2c}{\gamma} \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin^2 \left(\frac{\alpha - \varphi}{2}\right)}$ [m], където:

γ - обемно тегло на скалата, kN/m^3 ;

α - ъгъл на наклона на откоса;

c - кохезия на скалата kN/m^2 ;

φ - ъгъл на вътрешно триене.

Използвани са следните стойности за параметрите на модела: $\alpha = 45^\circ$, $c = 24 kN/m^2$, $\gamma = 18 kN/m^3$, $\varphi = 18^\circ$ и е даден коефициент на сигурност $\eta = 1.2$.

Величините c и $v = \tan \varphi$ са представени с абсолютна и относителна грешки съответно

$$c = \{20, 24\} \pm 2 = \{24\} \pm 9.1\% [kN/m^2] \quad \text{и} \\ v = \tan \varphi = \{0.27, 0.32\} \pm 0.027 = \{0.32\} \pm 9.1\%.$$

За градиента се получава $grad_{in} H = H\sqrt{1 + Q^2}$, където

$$Q = H \frac{v}{1 + v^2} \left(\cos \frac{\alpha - \arctg v}{2} - v \sin \frac{\alpha - \arctg v}{2} \right)$$

Таблица 1.

Две групи експериментални данни

№ група	c kN/m ²	v = tgφ	Q	H [m]	grad _{in} f [m]
1	20	0.27	0.226	22.87	23.44
2	24	0.32	0.261	32.90	33.99

Допустимата грешка на данните е

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{9.1}{100}\right)^2 + \left(\frac{9.1}{100}\right)^2} = \frac{9.1}{100} \sqrt{2} = 12.87\%$$

Таблица 2.

Точност на решението при абсолютно презапасяване

№ група	$\delta = \ grad_{in} H\ \cdot \varepsilon [m]$
1	3.02
2	4.37

Като се приеме $1 m$ за допустима грешка за параметъра H , то за експерименталните данни от група №1 условието (13) е изпълнено с достоверност 95%, а за група №2 – с достоверност 91%.

Литература

- Арнольд В.И. 1989. *Математические методы классической механики*, Москва.
- Волотовский С.Г., Казанский Н.Л., Хонина С.Н. 2000. Анализ и разработка методов вычисления собственных значений вытянутых сфероидальных функций нулевого порядка // Труды 5-й между-народной конференции РОАИ-5-2000. Самара. Россия. № 4. С. 697-700.
- Димитров Ю. 2003. Развитие на графоаналитичните методи при геомеханичното моделиране и проектирането на минните работи със съвременни компютърни средства, *Сб.доклади "Съвременни геомех. методи в минната промишленост и подземното гражданско и тунелно строителство*, Несебър.
- Димитров Ю. 2003. Оптимизиране на информативността на данните и оценка на числените модели в геомеханиката, *Сб.доклади "Съвременни геомех. методи в минната промишленост и подземното гражданско и тунелно строителство*, Несебър.
- Димитров Ю. 2003. Оценка на зависимостите използвани за оразмеряване на целици и камери, *Сб.доклади "Съвременни геомех. методи в минната промишленост и подземното гражданско и тунелно строителство*, Несебър.
- Димитров Ю. 2007. Оценка на зависимостите между параметрите в открити рудници, *Сб.доклади "Открит и подводен добив на полезни изкопаеми – висока ефективност, екологично производство"*, Варна.
- Ильошин А. А. 1971. *Механика сплошной среды*. М., Изд. Московского университета.
- Котельников В. А. 1933 *О пропускной способности "эфира" и проволоки в элктросвязи*. Изд. Управления связи РККА.
- Котельников В. А. 1956. *Теория потенциальной помехоустойчивости*. Гос-энергоиздат.
- Минчев Ив. 1980. *Механика на непрекъснатите среди*, София.
- Хонина С.Н. 2000. Котляр В.В. Вытянутые сфероидальные функции в дифракционной оптике // *Материалы международной молодежной школы по*

- оптике, лазерной физике и биофизике. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. С. 50-51.
- Хонина С.Н. 1999. Приближение сфероидальных волновых функций конечными рядами // *Компьютерная оптика*, Самара, ИСОИ РАН, 19, С. 65-70.
- Brillouin L. 1964. *Scientific Uncertainty and Information* Ac Press. New York.
- Pavlidis T. 1986. *Algrithms for Graphics and Image Processing*, Computer science press.
- Prat W. K. 1978. *Digital Image Processing*, New York.
- Shanon C.E. 1948. *A mathematical theory of communication*. Bell System Techn. Journ., vol. 27,
- Slepian D. 1964. Prolate spheroidal wave functions. *Fourier Analysis and Uncertainty – IV: Extensions to many dimensions; generalized prolate spheroidal functions*, The Bell System Technical Journal, 43, P. 3009-3057.
- Slepian D. 1965. *Some asymptotic expansions for prolate spheroidal wave functions* // J. Math. & Phys., 44, P. 99-140.

Препоръчана за публикуване от
Катедра "Математика", МГУ