

## ПРИЛОЖЕНИЕ НА МЕТОДА НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ ПРИ РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ В ГЕОМЕХАНИКАТА

*Георги Трапов, Георги Михайлов*

*Минно геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София*

**РЕЗЮМЕ.** На базата на известните начини за използване на метода на крайните елементи при изследване на нелинейни среди е разработен алгоритъм и осъществена програмна реализация. Процедурата включва ускорен итеративен процес за достигане от зададени начални характеристики на скалния масив до такива, при които има съответствие между напреженията и деформациите. Постигнатото решение позволява приложение в многофазна среда с широк диапазон на изменение на физико-механичните свойства. Това е характерно за реалните природни условия, в които се извършват добивните работи. Тестването на програмните модули е направено за реални обекти.

### AN APPLICATION OF FINITE ELEMENTS METHOD FOR GEOMECHANICAL SOLUTIONS

*Georgi Trapov, Georgi Mihaylov*

*University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski"*

**ABSTRACT.** On the basis of traditional approach for realization the Finite Elements Method is presented one solution for nonlinear medium. The program package named FIEL includes option for iterate steps, necessary for attain the conformity between stress-strain state of investigate object and theirs preliminary properties. The case study and the investigations made for multi medium planes demonstrate the package's large possibility utilization to real objects in mining practice.

### Въведение

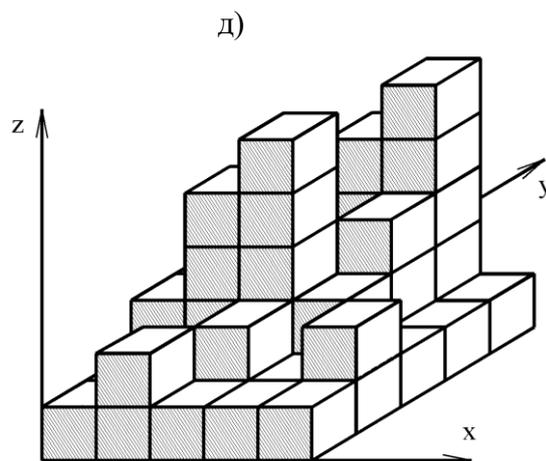
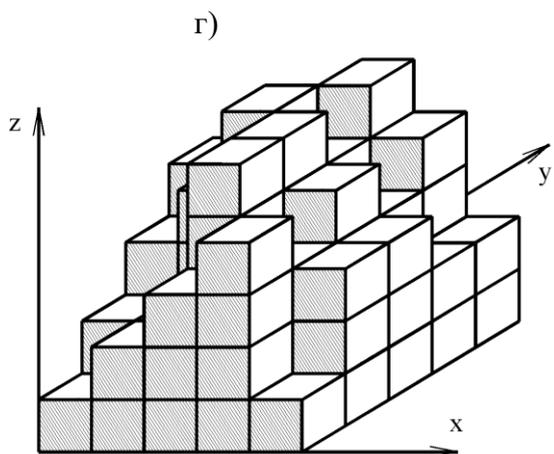
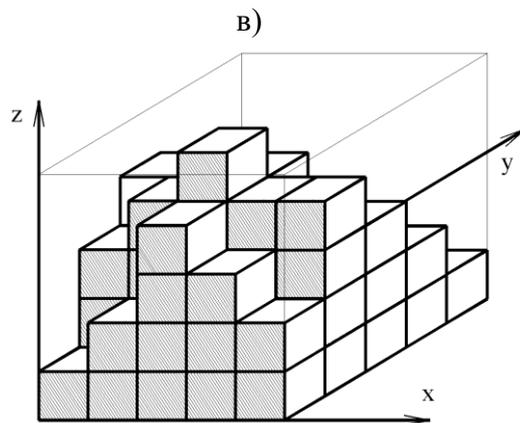
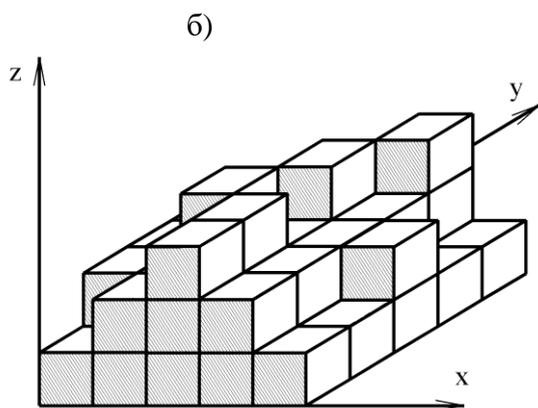
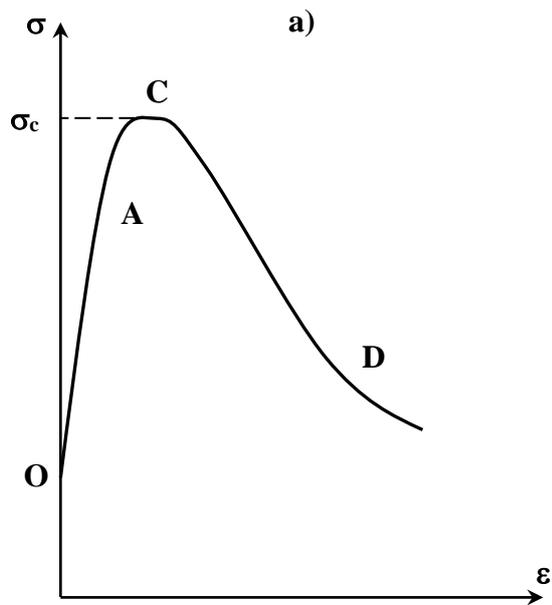
При изследване на напрегнатото и деформирано състояние на масива около конструктивните елементи на системите на разработване широко приложение намира методът на крайните елементи (МКЕ).

Съвременните изчислителни системи и най-вече тяхното бързодействие позволиха значително да се усъвършенстват начините за организация и съхраняване на числовите масиви, както и реализацията на решението на системата линейни уравнения с голям брой неизвестни. В практиката по разработване на находища по подземен начин често пъти се налага отделни детайли от добивната технология да работят в режим на висока концентрация на действащите напрежения. От друга страна не са рядко случаите, когато определени конструктивни елементи загубват устойчивост, причинявайки сериозни аварии. И в двата случая се налага подробен анализ и оценка на състоянието, както на отделните елементи, така и на добивната технология като цяло. В тази обстановка решението на линейната задача по МКЕ води до сериозни отклонения от реалното състояние и не се ползва с добър прием от изследователи, проектантите и технолози. В теоретичен аспект е известна методическата постановка за решаване на нелинейната задача. При реализация на алгоритъма обаче, съществуват препятствия, като в теоретичен план (по отношение на поведението на масива при натоварване), така и от чисто програмно естество. В конкретния случай, благодарение на създадения собствен програмен продукт FIEL, е реализирана процедура за

решаване на нелинейната задача. По този начин значително се разширяват възможностите за прилагане на МКЕ в практиката на подземния добив на полезни изкопаеми.

### Практики по използване на нелинейната задача в минното дело

Камерно-стълбовата система (КСС) на разработване се прилага при изземване на пластове и пластообразни рудни тела. Изискванията към двата основни конструктивни елемента камерите и поддържащите целици се намират в постоянно противоречие. Стремехът за увеличаване на коефициента на извличане (респ. намаляване на загубите) води до намаляване на площта на поддържащите целици. Осигуряване на висока степен на безопасност в добивните пространства налага ширината на камерите да се определя с висок коефициент на сигурност (особено в масиви с ясно изразена слоестост). В практиката са известни случаи на разрушаване на целици. То може да има локален характер, причинено от недооценяване на природните фактори в конкретен участък. Много сериозни последици има масовото разрушаване на целици, следвайки "ефекта на доминото". Това явление настъпва при изчерпване на носещата способност на целиците като поддържащ елемент. Следвайки основната зависимост между напреженията  $\sigma$  и деформациите  $\varepsilon$ :  $\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\})$ , могат да се отделят четири зони, свързани с поведението на целиците при разрушаването им - фиг.1а:



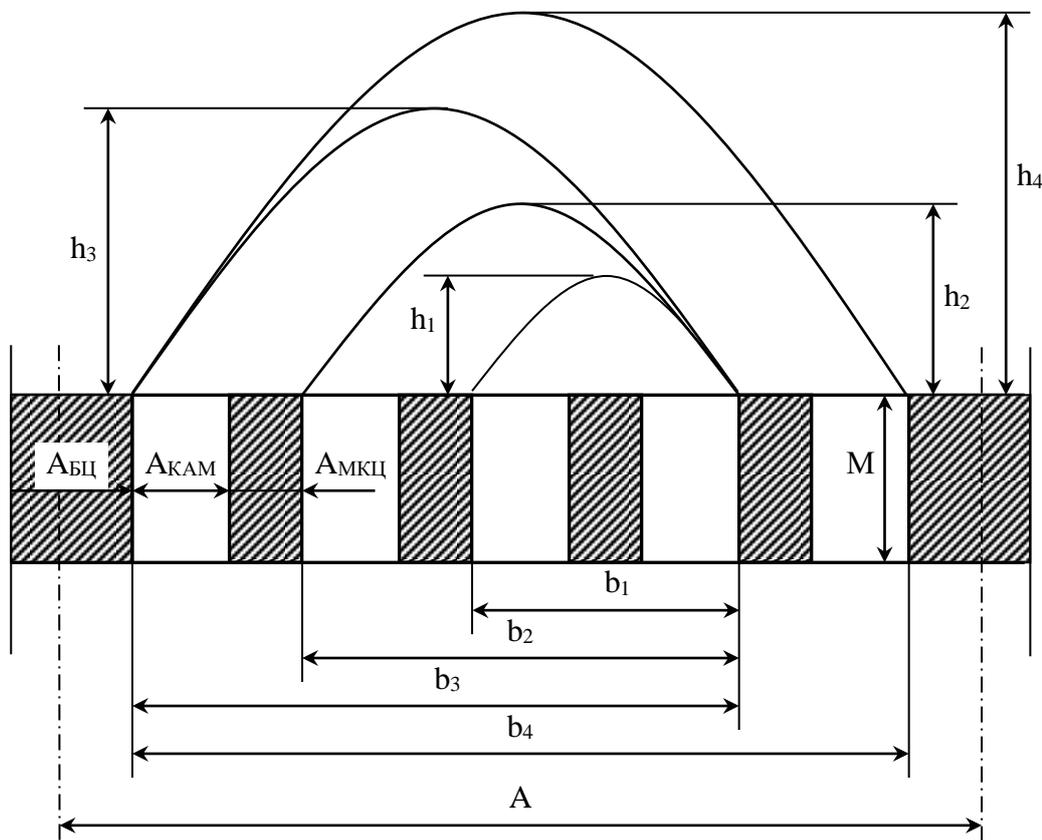
Фиг. 1. Зависимост между вертикалните напрежения  $\sigma$  и деформациите  $\epsilon$  при разрушаване на междукामерни целици. Точките O, A, C, D характеризират различни зони на разрушаване

- зона на еластичните деформации, OA;
- зона на нелинейните деформации, AC;
- върхова стойност на напреженията, при които настъпва разрушаване  $\sigma_c$ ;

- зона на остатъчни напрежения, свързана със значителни деформации (пост разрушителен период).

Интерес представляват регистрираните случаи на разрушаване на целици, отнесени към всяка от посочените зони. При двуфакторен анализ на разпределението (например отношение на геометричните размери и ъгъл на наклона) диаграмите имат вида, показан на фиг.1б - за зоната ОА; фиг.1в - за зоната АС; фиг.1г - за върховата стойност на разрушаващите напрежения; фиг.1д - за зоната на остатъчни напрежения. Най-малка честота на разрушени целици има в диапазона ОА, който съответства на еластично поведение на масива (вж.фиг.1б).

Следователно, при анализиране на причините за възникване на разрушаването, с изключение на този случай, се налага решаване на нелинейната задача. На фиг.2 е показана принципна схема на КСС на разработване. Приема се, че поддържащите целици са стълбообразни или с правоъгълно напречно сечение, тъй като те са най-уязвими към "ефекта на доминото" при разрушаване.



Фиг. 2. Параметри на камерно стълбова система на разработване и зони на обрушаване при разрушаване на междукамерни целици

В среда с крехко поведение при разрушаване (например гипсовото находище "Кошава"), оразмеряването на поддържащите целици следва да се основава изцяло на еластичната характеристика на масива. Същевременно, носещата способност на целиците може съществено да се увеличи чрез използване на различни начини за тяхното заздравяване. Обективен критерий за технико-икономическото сравняване на различни варианти е коефициентът на сигурност  $FS$ . При заздравяване на целиците логически е издържано да се използва нелинейната част на зависимостта  $\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\})$ . Този случай съответства на минималната стойност на коефициента на сигурност  $FS_{min}$ , ( $FS > 1$ ). Тогава при оценка на различните технически решения  $FS_{min}$  ще бъде своеобразна база за сравнение. В практиката широко приложение намира вариантът на КСС с последващо хидравлично запълване на камерите. То изпълнява заздравяващи функции, тъй като напречните деформации на целиците се ограничават за сметка на компресионните свойства на запълнението – фиг.3. Задачата се решава в

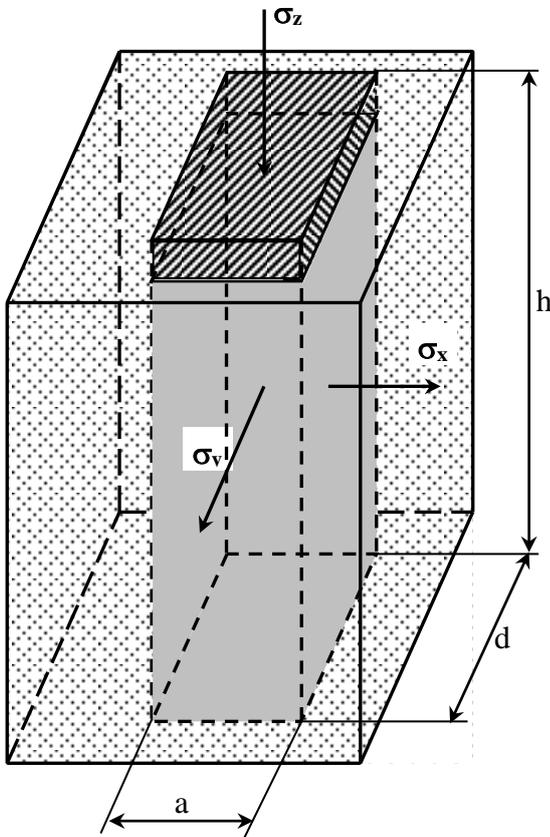
условия на зададени деформации, като се отчита пасивният натиск  $P_p$  на запълнението върху стените на целиците. Тяхната носеща способност се запазва в зоната на нелинейните деформации, разглеждайки общата работа на елемента "целик-хидравлично запълнение" като еласто-пластична сисетема. За оценка на заздравяващите функции на запълнението се използва параметърът  $\Theta$ , определящ изменението на обема на целика в резултат на неговото деформиране при натоварване:

$$\Theta = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$$

където  $V_0$  и  $V_1$  са съответно обемите на целика преди и след деформиране.

Този израз има важно практическо значение, тъй като се явява предпоставка за извеждане на функционалната зависимост  $\Theta = f(P_p)$ . От своя страна  $P_p$  зависи от вида

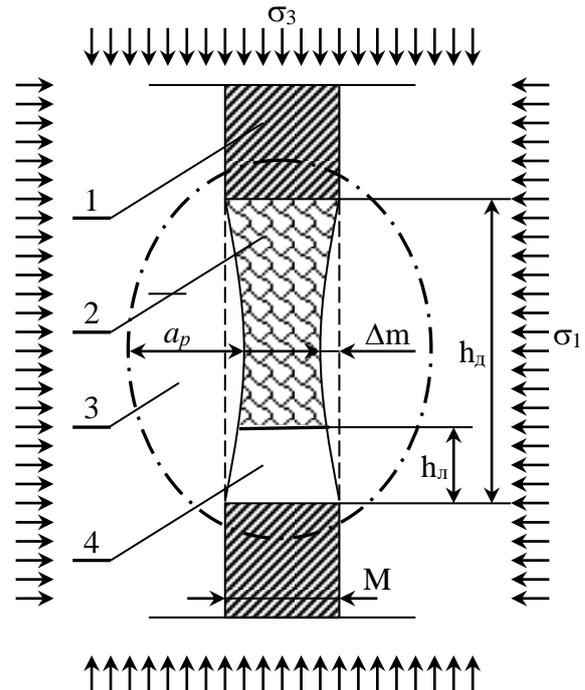
на запълнението и начина за неговото полагане в добивното пространство. Търсеното оптимално решение е в интервала  $[0, \Theta_{\max}]$ . На лице са две ограничаващи условия ( $FS$ ) и  $\Theta$ , които в съчетание с решението на нелинейната задача осигуряват възможност за оценка на широк спектър от технически решения.



Фиг.3. Схема на съвместната работа на междукамерния целик и запълнението

При разработване на стръмно-западащи рудни жили върху запълнението действа Поасоновата компонента на геостатичния товар (страничния отпор) и тектонското поле на напрежения (ако има такова). Възникват предпоставки за сближаване на стените на добивното пространство – фиг.4. Заради високите компресионни показатели на запълнението, основни поддържащи елементи са рудният масив и междуетажните целици. Формира се зона на разтоварване  $a_p$ , която зависи от конкретните природни условия: устойчивост на страничните скали, дълбочина на разработване, дебелина на рудната жила, характер на напрегнатото състояние на масива. Запълвачният материал със своята реактивна сила противодейства на преместванията в добивното пространство. Но тяхната големина е достатъчна за появата на разуплътнена среда в страничните стени на добивната камера. Фактор, който изисква решаване на задачата за съвместната работа на масива и запълнението в условия на еласто-пластично поведение. Това решение осигурява възможност за определяне на оптималните параметри на добивната технология: ред на разработване на запасите в блока (възходящ, низходящ); височина на изземвания слой; начини за закрепване на скалите в горнището и долнището

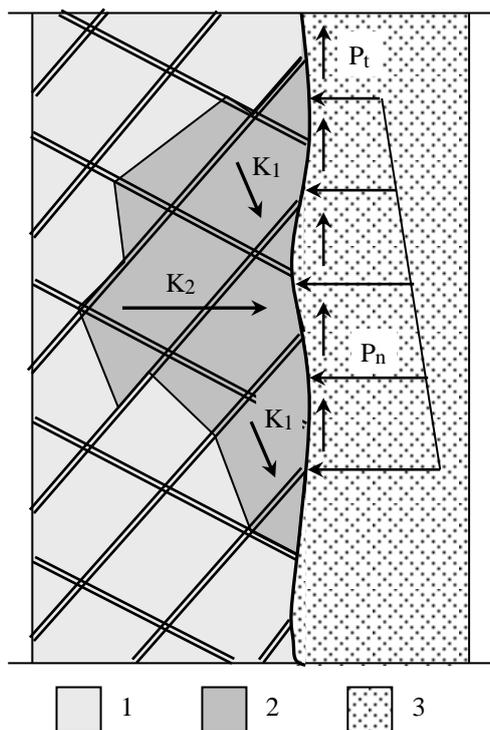
на рудната жила; необходима коравина на изкуствения материал, основаваща се на съответни физико-механични свойства.



Фиг. 4. Схема за определяне на натоварването върху запълнението при разработване на стръмно западаща рудна жила и низходящ ред на изземване. 1 – руда; 2 – изкуствен масив (запълнение); 3 – разтоварена зона; 4 – добивно пространство (експлоатационна лента)

Характерна особеност на реалния руден масив е неговата структурна нарушеност. При наличие на три и повече системи пукнатини се оформят елементарни структурни блокове. Тяхната ориентация спрямо стените на откритите добивни пространства, както и характерът на приложеното натоварване, определят степента на подвижност на масива. Върху основата на подходяща схема се изгражда моделът който следва да отчете геометрията и параметрите на отделните системи пукнатини. Следвайки теоретичните постановки за разрушаване на тела, отслабени с пукнатини, задачата се свежда до изучаване поведението на стените на пукнатините с помощта на подходящ критерий. Независимо от неговата същност (силов, енергетичен, деформационен), първото условие е определяне на напрегнатото и деформирано състояние на масива. Моделът на пукнатината предвижда различен характер на натоварване, но следва да се подчертае, че пространството между стените е винаги освободено от опънови напрежения. На фиг.5 е показано взаимодействието на запълвачния материал със стените на добивното пространство, представени от напукани скали. Дилатацията се разглежда като резултат от комбинираното разрушаване на ненарушен масив (разстоянието между две съседни пукнатини) и движение по съществуващи отслабващи повърхнини на пукнатините. Кинематичният феномен на преместването включва две съставлящи: едната на завъртането на елементарните структурни блокове  $k_1$  и другата – посоката на движение на формиралата се зона на разтоварване в стената на

камерата  $k_2$ . Запълвачният материал мобилизира поведението на рудния масив. Нормалната и тангенциална компоненти, съответно  $P_n$  и  $P_t$ , действащи на контакта на двете среди определят съпротивителната способност на запълнението. Благоприятен фактор за развитието на процеса е статичното взаимодействие, т.е. двете среди остават неподвижни една спрямо друга. Компресионните свойства на запълнението определят ефективността на прилаганата схема. Неговата по-малка коравина, в съчетание с механизма на разрушаване на напукани скали в условия на сложно напрегнато състояние поставят като задължително условие решаване на нелинейната задача.



Фиг. 5. Взаимодействие между запълнението и страничните стени на добивното пространство с отчитане на структурната нарушеност на масива.

1 – руден масив; 2 – нарушена зона; 3 – запълнение.

При разработване на рудни тела с голяма дебелина широко приложение намира камерно-целиковата система (КЦС) на разработване със запълване на добивното пространство. В случая характерна особеност е наличието на първични и вторични камери. Съществуват различни варианти за последователното изземване на камерите. Техничко-икономическата ефективност на тази добивна технология в най-голяма степен зависи от избора на подходящи механични свойства на запълнението. Задачата се свежда до определяне на минимално-допустимата якост на изкуствения материал. Изхожда се от всеобщата констатация, че разходите за отделните съставки, участващи в дадена рецептурна схема, достигат до 65% от общите разходи за запълване. Изчислителната схема отчита т.н. многофазна среда. Необходимостта от тази постановка се налага от обстоятелството, че рудата, запълнението и страничните (вместващите) скали имат различни деформационни свойства. На фиг.6 е показана принципна схема за изследване на напрегнатото и

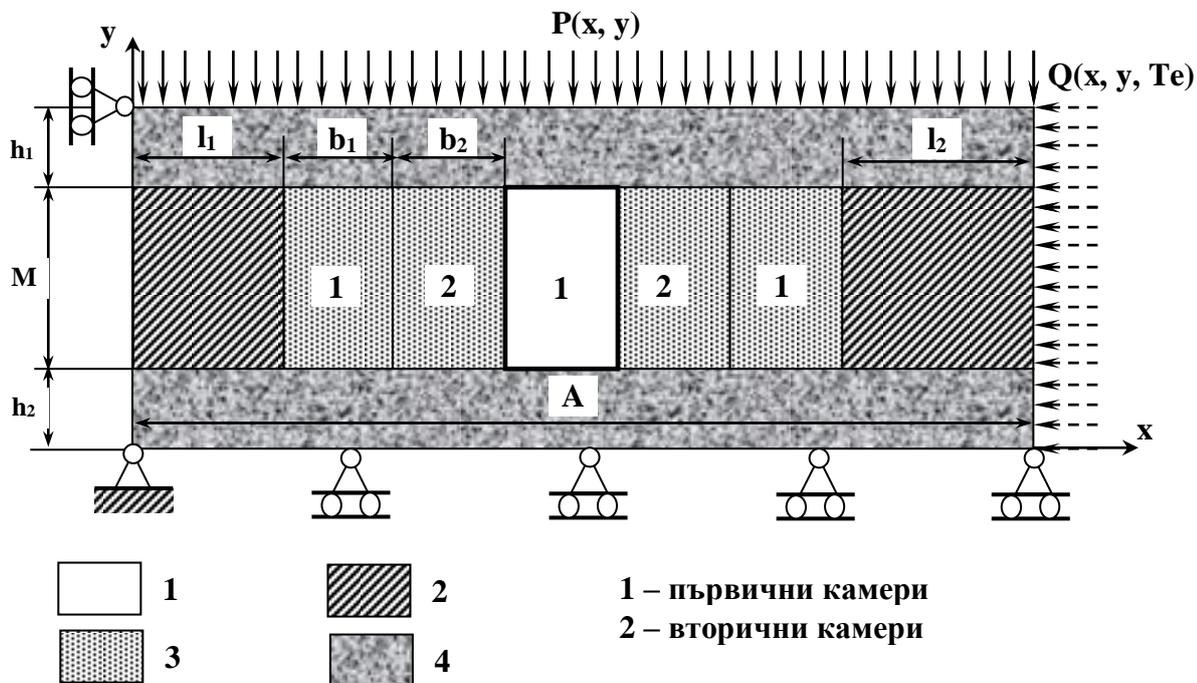
деформирано състояние (НДС) около конструктивните елементи на КЦС. Тя притежава съществени предимства, свързани с отчитане на недоzapълването на камерите; изменението на свойствата на запълнението през различните етапи на добивните работи; характеристиката на силовото поле: геостатичен товар или наличие на тектонски сили. Задължително условие е поведението на масива при натоварване да съответства на нелинейните деформации. Този подход се налага най-малко заради три обстоятелства:

- наличие на многофазна среда, една от съставките на която (запълнението), се отличава с ниски якостни свойства;
- изменение на деформационните свойства на запълвачния материал в зависимост от времето  $t$  на неговото престояване в добивното пространство;
- съвместно изследване на системата “руда-запълнение” най-вече в последните етапи на разработване, когато изкуственият материал изпълнява функции на поддържащ елемент.

Постановката на нелинейната задача при изследване на НДС на масива около добивните изработки има важно практическо значение. От една страна тя дава възможност да се навлезе в детайли при изучаване на поведението на масива в условия, близки до пределно допустимите натоварвания. От друга страна появата на зони с нееластично поведение може да се използва като своеобразен критерий на устойчивост при изследване на конструктивни елементи в напукани скали, където по-голямата част от разрушенията възникват по съществуващите отслабващи повърхнини.

## Съставяне на геомеханичен модел и числено решаване посредством метода на крайните елементи

Методът на крайните елементи (МКЕ) реализира числено решаване на диференциалните уравнения, характеризиращи състоянието на масива при натоварване. Той дава възможност да се моделира нееднородността и анизотропността на средата. Използва се както при решаване на равнини, така и на пространствени задачи. Голямо предимство на МКЕ е възможността за решаване на еластични (линейни) и еласто-пластични (нелинейни) задачи. Основен момент при решаване на задачите по МКЕ е съставяне на подходяща изчислителна схема и определяне на граничните условия. В някои случаи, при решаване на задачи, свързани с устойчивостта на подземни изработки се съставят изчислителни схеми, отчитащи терена на повърхността. Ако обаче на определен етап е известно напрегнатото състояние на ненарушения масив и посоката на главните напрежения, изчислителната схема може да се детайлизира само за част от схемата, където е необходимо да се получи подробна информация. Съществуват програмни продукти за автоматично генериране на мрежата на дискретизация в изчислителната схема. За целта могат да се използват и подходящи човеко-машинни процедури.



Фиг.6. Изчислителна схема за определяне на параметрите на КЦС на разработване  
1 – открита камера; 2 – руден масив; 3 – запълнена камера; 4 – вместиращи скали

В конкретния случай е използван собствен програмнен продукт за решаване на задачи по МКЕ – програмната система FIEL. Алгоритъмът за съставяне на матрицата на коравината на системата предвижда използване на неограничен брой възли и елементи. При съставяне на геомеханичния модел се обръща особено голямо внимание на отчитане на нееднородността на средата. С цел установяване на влиянието на целия скален комплекс върху натоварването на камерите и целиците е целесъобразно да се състави първоначално модел, включващ терена на повърхността т.е. да се отчете цялата дълбочина на разработване. Следва преминаване към детайлизиране на определена част от схемата. Този подход, съчетан с изготвяне на по-подробни изчислителни схеми осигурява по-пълна картина на разпределение на изследваните параметри. Отчитайки физико-механичните свойства на скалите, получени в лабораторни условия, геомеханичният модел следва да може да решава задачата и в зоната на нелинейните зависимости между напрежения и деформации. Модела следва да осигури и възможност за обратен анализ т.е. ако има натрупани натурни наблюдения за движение на скалите, разрушаване на целици, регистрирани провадания в рудника и др., да се търси възможност за определяне на якостните и деформационни показатели в масива.

Основното уравнение на МКЕ се записва във вида

$$[K]\{U\}=\{R\} \quad (1)$$

където  $\{R\}$  е матрицата стълб на силите, приложени във възлите на елементите;

- $[K]$  – обобщената матрица на коравината на системата;
- $\{U\}$  – матрицата стълб на компонентите на преместванията на върховете на елементите.

Матрицата на коравината на системата  $[K]$  се получава от координатите на възлите и от деформационните

характеристики на разглежданата среда. Относително най-простият и същевременно твърде ефективен начин за нейното определяне е този, при който се намира матрицата на коравината  $[K_e]$  на отделните елементи на дискретизация и след това нейните членове по определени правила се адресират към матрицата на коравината на системата  $[K]$ .

При извеждане на (1) се използва линейният закон на съответствие между напрежения и деформации

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \quad (2)$$

Освен това се предполага, че съществува линейна зависимост между деформациите и преместванията, преместванията се считат непрекъснати и с известно приближение се удовлетворяват уравненията за равновесие.

Ако се изпълняват тези условия се казва, че се решава линейна задача.

Както бе посочено още във въведението, в редица случаи решаването на нелинейната задача се явява задължително условие при изследване на напрегнатото и деформирано състояние на масива. Така се избягва значителното презапасяване, съпътстващо решаването в такива случаи на линейната задача. То се изразява преди всичко в определяне на по-големи по площ зони на разрушаване. При решаване на нелинейната задача следва да се измени съотношението (2). Предполага се, че при лабораторни условия, или по друг начин, е получена новата нелинейна зависимост

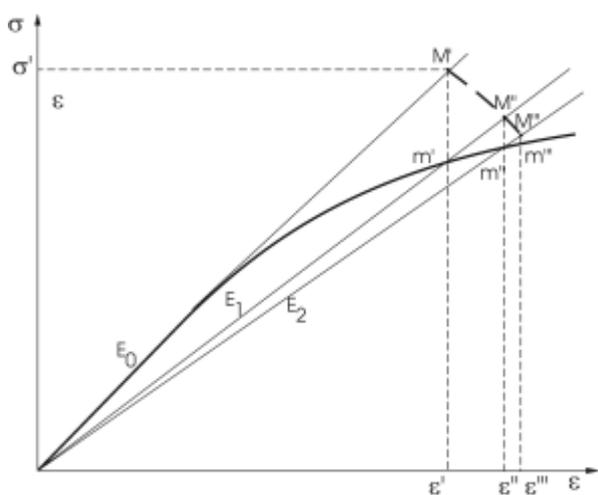
$$\{\sigma\}=f(\{\varepsilon\}) \quad (3)$$

Очевидно, ако се окаже възможно да се намери такова решение на уравнение (1), че при съответен подбор на влизащите в [D] параметри това уравнение и съотношението (3) да се удовлетворяват при едни и същи значения на напреженията и деформациите, то полученото решение ще бъде търсеното.

За реализиране нелинейната задача в практиката съществуват основно три подхода:

- метод на променливата коравина;
- метод на началните напрежения;
- метод на началните деформации.

Определянето на напрегнатото и деформирано състояние на средата с нелинейни характеристики съгласно условие (3) налага използването на итерационна процедура. В конкретния случай е използван методът на променливата коравина.



Фиг. 7.

На фиг.7 е показан принципният подход за използване на тази процедура. Най-напред се решава еластичната задача с модул на еластичност  $E_0$ , съответстващ на началното състояние на елемента. Получават се  $\{\varepsilon\}$  и  $\{\sigma\}$ , т.е. точка  $M'$ . Съгласно съотношение (3) се определя съответната стойност на напреженията в нелинейния елемент – т.е. определя се точката  $m'$  (фиг.7). Ако разликата ( $M'-m'$ ) е по-голяма от предварително зададена величина, съответстваща на необходимата точност на решението, приема се, че точката  $M'$  с координати  $\sigma'$  и  $\varepsilon'$  не съответства на реалните свойства на тялото и следва провеждане на втора итерация. Отново се решава еластичната задача, но при съставяне на матрицата на коравината на елементите, вместо модула  $E_0$  се въвежда секущият модул  $E_1$ . След втората изчислителна процедура на линейната задача се получава точката  $M''$ . Следващите итерации се извършват по вече описания начин. Изчислителният процес продължава докато се достигне такава близост на точките  $M^n$  и  $m^n$ , за която е изпълнено предварително зададеното условие на необходимата точност.

Алгоритмизацията на схемата за реализиране на изчислителния процес предвижда последователна проверка на всички елементи. В зависимост от големината

на натоварване се променя броят на елементите, за които се налага изменение на стойностите на  $E_n$  на съответната итерация. Начина на намаляване на броят на елементите с промяна показва и бързината на сходимост на итерационния процес. Така описаната процедура за реализиране на нелинейната задача е използвана при решаване на множество задачи, свързани с определяне на основни параметри на камерно-стълбовата система на разработване.

Определянето на параметрите на камерно-стълбовата система на разработване има пряко отношение към оценката на устойчивото състояние на конструктивните елементи: камерите, целиците, непосредственото горнище, долнището, връзките на камерите с подготвителните изработки. Определянето на характера на разпределение на напреженията с помощта на МКЕ е първият етап в решаването на задачата за намиране на параметрите на камерно-стълбовата система. Не помаловажен е вторият етап - оценката на устойчивото състояние на конструктивните елементи на системата на разработване. За целта е необходимо да се използват подходящи критерии за оценка. Световната практика показва, че са известни множество критерии, като особено важно е да се отбележи, че различните критерии реагират по различен начин, т.е. няма универсален критерий, с който да се оцени устойчивото състояние, независимо какви са скалите, в които е изградено даденото съоръжение.

Авторите на тази разработка използват главно критериите на Mohr Coulomb (M-C), Hoek-Brown (H-B), модифициран критерий (MOD). Първите два са широко известни в литературата. Модифицираният критерий е собствена разработка. Той се основава на отношението между задържащи и свличащи сили и е особено подходящ при оценката на устойчивото състояние на съоръжения, прокарани в здрави, но напукани скали. Критерият на Mohr Coulomb се прилага с допълнително развитие, въз основа на което устойчивостта се оценява с параметъра  $FS$ . Съставя се функция от вида  $FS=f(t)$ , където  $t=A\sigma_1+B\sigma_2$  е аргумент, описващ напрегнатото състояние на масива в дадена точка;  $A, B$  са константи;  $\sigma_1, \sigma_2$  са главните напрежения. По този начин вместо зависимостта  $\tau=F(\sigma)$  се използва  $FS=f(t)$ , което не е новост за световната практика. След несложни преобразувания функцията  $FS=f(t)$  може да се представи така, че:

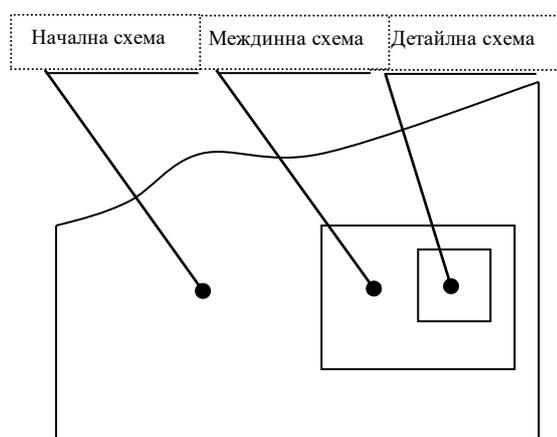
$FS > 1$  означава устойчиво състояние;

$0 < FS < 1$  означава разрушаване.

Естествено, когато  $FS \gg 1$  конструкцията притежава висока степен на устойчивост. Следователно, показателят  $FS$  може да се използва и при количествено сравняване на два и повече варианта на изменение на параметрите на системата на разработване.

Детайлизирането на решението на задачата за определяне на оптималните параметри на добивната технология се основава на подход, съчетаващ постепенно приближаване на изчислителната схема до разглеждания участък. Целта на подобна реализация на решението по

метода МКЕ е постепенно да се намали площта на разглеждания сектор, което осигурява много голяма детайлност на представянето на различните конструктивни параметри на системата на разработване. Същевременно, всяка предишна реализирана вече схема се явява информационна база, формираща началните условия за следващата. По този начин се достига до схема, представляваща конкретен разрез от документацията на рудничното поле. На фиг. 8 е показана общата идея на този подход, която е приложена при решаване на редица задачи. Изследователят има възможност да насочи своето внимание към строго определена зона, в която да бъде изградена мрежата на базата на неговото субективно желание. Например това могат да бъдат стените, пода и тавана на добивните камери. Налице е една ръчно-машинна процедура, съчетаваща в себе си елементи на автоматично генериране на мрежата с ръчно избиране на детайлната изследвана област.



Фиг. 8.

## Заклучение

Разработеният подход за решаване на нелинейната задача по МКЕ, както и получените практически резултати, дават основание да се направят следните изводи:

1 При решаване на нелинейни геомеханични задачи е подходящо използването на метода на променливата коравина. Итеративният режим, както и условията, осигуряващи сходимост на изчислителния процес, работят устойчиво без да се изисква значителен ресурс от време и памет на компютъра;

Препоръчана за публикуване от

Катедра "Подземно разработване на полезни изкопаеми", МТФ

2 Постановката на нелинейната задача изисква детайлно представяне на зависимостта  $\{\sigma\} = f(\{\varepsilon\})$ . Точността на полученото решение зависи и от условията, при които е изведена тази зависимост. Използваните данни при реализация на нелинейната задача показват, че мащабния ефект при изследване на поведението на масива при натоварване оказва съществено влияние върху крайните резултати;

3. Важно постижение на реализирания алгоритъм на нелинейната задача при изследване на многофазни среди е автоматичното включване само на тези части от изчислителната схема, които изискват този тип решение;

4. Сравнителният анализ на резултатите, получени за една и съща изчислителна схема, но при решаване на задачата като линейна, респективно нелинейна, показва отклонения в действащите напрежения. Това е гаранция за устойчиво изпълнение на изчислителния процес в поредицата от програмни модули, включени в програмния пакет FIEL.

Практиката по използването на нелинейната задача има сериозни основания за развитие. Тя следва да намери място при изучаване на първичното напрегнато състояние (ненарушения с минни изработки масив); при оценка на структурната нарушеност (напукаността) на масива; при използване на технологии със запълване на добивното пространство като най-перспективни в следващите 15 – 20 години.

## Литература

- Амусин, Б.З., А. Б. Фадеев. *Метод конечных элементов при решении задач горной геомеханики*. Москва, Недра, 1975.
- Гудман, Р. *Механика скальных пород*. Москва, Стройиздат, 1987.
- Мюлер, Л. *Инженерная геология. Механика скальных массивов*. Мир, Москва, 1971.
- Зенкевич, О. *Метод конечных элементов в технике*. Мир, Москва, 1975.
- Миренков, В.Е. Расчет деформирования блоков пород с трещинами. Известия ВУЗов Горный журнал. 2007/3, с.117-122.
- Brady, B.H.G., E. T. Brown. *Rock mechanics For Underground mining*. Second Edition. Champan&Hall. London. Glasgow. New York. Tokyo. Madras. 1993.