

$$\begin{aligned}
\bar{W}_1(x, \xi) &= \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}} \left\{ \int_0^\infty \left[1 - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha^2} \exp[-\alpha(x - \xi)] \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \sin[\beta(x - \xi)] + \cos[\beta(x - \xi)] \right) \right] \right. \\
&\quad \cdot \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\xi}\right] d\xi \Bigg\}, \quad x \geq 0 \\
\bar{W}_2(x, \xi) &= \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}} \frac{\alpha^2}{\beta^2 + \alpha^2} \int_{-\infty}^0 \exp[\beta(x - \xi)] \left\{ \frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} \sin[\beta(x - \xi)] + \cos[\beta(x - \xi)] \right\} \\
&\quad \cdot \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\xi}\right] d\xi, \quad x < 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

където $\bar{W}_1(x, \xi)$ е вертикалното преместване над неиззетия пласт; $\bar{W}_2(x, \xi)$ е вертикалното преместване над отработеното пространство.

След като зависимости (1) са представени във вида:

$$\begin{aligned}
\bar{W}_1(x, \xi) &= \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}} \left[I_1 - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha^2} \left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} I_2 + I_3 \right) \right] \\
\bar{W}_2(x, \xi) &= \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}} \frac{\alpha^2}{\beta^2 + \alpha^2} \left[\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha} I_4 + I_5 \right],
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{където } I_1 = \left[\theta\left(\frac{r - x}{\sqrt{2\xi}}\right) - \theta\left(\frac{-x}{\sqrt{2\xi}}\right) \right]$$

От Вълков (2005) за решаване на влизащите в (2) интеграла е използвана формулата на Боне.

Така за интегралите I_2 и I_3 се намира:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{x^2}{4\xi}\right] \cdot \left\{ \frac{\sin[-\alpha(x - \eta_1)] - \cos[-\alpha(x - \eta_1)]}{2} \cdot \exp[-\alpha(x - \eta_1)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin(-\alpha x) - \cos(-\alpha x)}{2} \cdot \exp(-\alpha x) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{(x - r)^2}{4\xi}\right] \cdot \left\{ \frac{\sin[-\alpha(x - r)] - \cos[-\alpha(x - r)]}{2} \cdot \exp[-\alpha(x - r)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin[-\alpha(x - \eta_1)] - \cos[-\alpha(x - \eta_1)]}{2} \cdot \exp[-\alpha(x - \eta_1)] \right\} \\
I_3 &= \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{x^2}{4\xi}\right] \cdot \left\{ \frac{\cos[-\alpha(x - \eta_2)] + \sin[-\alpha(x - \eta_2)]}{2} \cdot \exp[-\alpha(x - \eta_2)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos(-\alpha x) + \sin(-\alpha x)}{2} \cdot \exp(-\alpha x) \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{\alpha} \exp\left[-\frac{(x - r)^2}{4\xi}\right] \cdot \left\{ \frac{\cos[-\alpha(x - r)] + \sin[-\alpha(x - r)]}{2} \cdot \exp[-\alpha(x - r)] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos[-\alpha(x - \eta_2)] + \sin[-\alpha(x - \eta_2)]}{2} \cdot \exp[-\alpha(x - \eta_2)] \right\},
\end{aligned} \tag{3}$$

където $0 < \eta_i < r$ ($i = 1, 2$),

а за I_4 и I_5 - съответно:

$$\begin{aligned}
I_4 = & \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{(x+r)^2}{4\xi} \right] \cdot \left\{ \frac{\sin[\beta(x+r)] - \cos[\beta(x+r)]}{2} \cdot \exp[\beta(x+r)] - \right. \\
& \left. - \frac{\sin[\beta(x-\eta_3)] - \cos[\beta(x-\eta_3)]}{2} \cdot \exp[\beta(x-\eta_3)] \right\} + \\
& + \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{x^2}{4\xi} \right] \cdot \left\{ \frac{\sin[\beta(x-\eta_3)] - \cos[\beta(x-\eta_3)]}{2} \cdot \exp[\beta(x-\eta_3)] - \right. \\
& \left. - \frac{\sin(\beta x) - \cos(\beta x)}{2} \cdot \exp(\beta x) \right\}; \\
I_5 = & \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{(x+r)^2}{4\xi} \right] \cdot \left\{ \frac{\cos[\beta(x+r)] + \sin[\beta(x+r)]}{2} \cdot \exp[\beta(x+r)] - \right. \\
& \left. - \frac{\cos[\beta(x-\eta_4)] + \sin[\beta(x-\eta_4)]}{2} \cdot \exp[\beta(x-\eta_4)] \right\} + \\
& + \frac{1}{\beta} \exp \left[-\frac{x^2}{4\xi} \right] \cdot \left\{ \frac{\cos[\beta(x-\eta_4)] + \sin[\beta(x-\eta_4)]}{2} \cdot \exp[\beta(x-\eta_4)] - \right. \\
& \left. - \frac{\cos(\beta x) + \sin(\beta x)}{2} \cdot \exp(\beta x) \right\},
\end{aligned} \tag{4}$$

където; $-r < \eta_j < 0$ ($j = 3, 4$).

Решението на I_1 не представлява проблем, тъй като влизащата в него функция е табулирана

$$\theta(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^r \exp(-0,5t^2) dt \quad (\text{Borecki, 1980}).$$

Както е известно, формулата на Боне се базира на теоремите за средна стойност на определен интеграл. Сериозно затруднение за прилагането на релации (3) и (4) представлява определянето на стойностите η_i ($i = 1, 2$) и η_j ($j = 3, 4$). То е свързано с провеждането на редица числени експерименти.

Тук за определяне на вертикалните премествания в зоната на влияние на подземните минни работи се използва подход, който може да бъде определен като

За I_2 използваната програма дава следното решение:

$$\begin{aligned}
I_2 = & - \frac{e^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha + i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}} \right] + \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha + \beta + 2icx}{2\sqrt{c}} \right] \right)}{4\sqrt{c}} + \frac{1}{4\sqrt{c}}, \\
& \left(e^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha + i\beta + 2c(-r+x)}{2\sqrt{c}} \right] + \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha + \beta + 2ic(-r+x)}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{където } \operatorname{Erf}(z_0, z_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z_0}^{z_1} e^{-t^2} dt;$$

$$\operatorname{Erfi}(z) = \operatorname{erf}(iz)/i; \quad i \text{ е имагинерната единица.}$$

Зависимостта за I_2 може да бъде опростена чрез опцията Simplify на програмния продукт.

информационно-технологичен. За пресмятане на интегралите, влизащи в релации (2), е използван програмен продукт "Mathematica 4.0". Избраният софтуер се ползва при провеждане на сложни изчисления. Има приложение при научни изследвания, в инженерни анализи и при моделиране на сложни задачи, там където се прилагат количествени методи.

Интегралът I_2 се записва във вида:

$$I_2 = \int_0^r \sin[\beta(x-s)] \exp[-\alpha(x-s) - c(x-s)^2] ds,$$

$$\text{където } c = \frac{1}{4\xi}; \quad a = \alpha; \quad b = \beta.$$

Опростената зависимост за I_2 има вида:

$$I_2^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}} \left(e^{\frac{(\alpha-i\beta)^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha+i\beta+2cx}{2\sqrt{c}} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha+i\beta-2cr+2cx}{2\sqrt{c}} \right] - \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha+\beta+2icx}{2\sqrt{c}} \right] + \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha+\beta+2ic(-r+x)}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right)$$

За интеграла I_3 се намира:

$$I_3 = \int_0^r \cos[\beta(x-s)] \exp[-\alpha(x-s)-c(x-s)^2] ds = \\ = \frac{1}{4\sqrt{c}} \left(ie^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-i \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha+i\beta+2cx}{2\sqrt{c}} \right] + e^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha+\beta-2icx}{2\sqrt{c}} \right] \right) - \frac{1}{4\sqrt{c}} \right. \\ \left. \left(ie^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-i \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha-i\beta+2c(-r+x)}{2\sqrt{c}} \right] + e^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha+\beta-2ic(-r+x)}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right) \right)$$

Опростеният вид се записва, както следва:

$$I_3^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}} \left(e^{\frac{(\alpha-i\beta)^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(\operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha-i\beta+2cx}{2\sqrt{c}} \right] - \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha-i\beta-2cr+2cx}{2\sqrt{c}} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \left(\operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha+\beta+2ic(r-x)}{2\sqrt{c}} \right] - \operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha+\beta-2icx}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right) \right)$$

За интеграла I_4 се получава:

$$I_4 = \int_{-r}^0 \sin[\beta(x-s)] \exp[-\alpha(x-s)-c(x-s)^2] ds = \\ = \frac{e^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha+i\beta+2cx}{2\sqrt{c}} \right] + \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha+\beta+2icx}{2\sqrt{c}} \right] \right)}{4\sqrt{c}} - \frac{1}{4\sqrt{c}} \\ \left(e^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha+i\beta+2c(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] + \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha+\beta+2ic(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right)$$

и в опростен вид

$$I_4^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}} \left(e^{\frac{(\alpha-i\beta)^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha+i\beta+2cx}{2\sqrt{c}} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha+i\beta+2c(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] + \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha+\beta+2icx}{2\sqrt{c}} \right] - \operatorname{Erfi} \left[\frac{i\alpha+\beta+2ic(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right)$$

Аналогично за I_5 се намира:

$$I_5 = \int_{-r}^0 \cos[\beta(x-s)] \exp[-\alpha(x-s)-c(x-s)^2] ds =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{c}} \left(i e^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-i \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha - i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}} \right] + e^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha + \beta - 2icx}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right) + \frac{1}{4\sqrt{c}} \left(i e^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-i \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha - i\beta + 2c(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] + e^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha + \beta - 2ic(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right).$$

Опростеният му вид е

$$I_5^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}} \left(e^{\frac{(\alpha-i\beta)^2}{4c}} \sqrt{\pi} \left(-\operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha - i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}} \right] + \operatorname{Erf} \left[\frac{\alpha - i\beta + 2c(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] - i e^{\frac{i\alpha\beta}{c}} \left(\operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha + \beta - 2icx}{2\sqrt{c}} \right] - \operatorname{Erfi} \left[\frac{-i\alpha + \beta - 2ic(r+x)}{2\sqrt{c}} \right] \right) \right) \right).$$

Решенията на интегралите I_2 , I_3 , I_4 и I_5 се представят в комплексната равнина, което е особеност на ползвания софтуер. При числени експерименти се установява, че имагинерната част е безкрайно малка. В разглежданите случаи имагинерната част съдържа множители от порядъка 10^{-100} , т.е. резултатите са чисто реални величини.

От съпоставянето на двата подхода могат да се направят следните изводи:

Като недостатъци на първото решение могат да се изтъкнат:

- трудното определяне на константите, η_j за прилагане формулата на Боне;
- необходимост от съставяне на (макар и проста) програма за пресмятане на слягането по зависимости (2), след като в тях бъдат заместени релациите за I_2 , I_3 , I_4 и I_5 ;
- необходимост от персонал със значителен опит (в съответните маркшайдерски отдели, следящи преместванията на земната повърхност).

Съществени предимства на информационно-технологичния подход са свързани с:

- фактора време за решаване на задачите;
- липса на допълнителни усложнения при провеждане на решението;
- тежестта на изследователската работа е пренесена на правилното място – там където се

прави научният анализ и се формулират важните за практиката задачи. Ползваният продукт (както и неговите по-късни версии и аналози) дава увереност на изследователя, че поставеният проблем, въпреки неговата сложност, ще бъде решен бързо и ефективно.

В заключение трябва да се подчертае, че информационно технологичният подход е в съответствие и с цялостното преориентиране на дейността в маркшайдерските отдели на минните предприятия към електронно (цифрово) набиране, съхранение, обработка и интерпретиране на информация за дадено находище и прилаганите в него технологии.

Литература

- Будрык, В. и др. 1956, *Вопросы расчета сдвижений поверхности под влиянием горных разработок*, Москва, Углетехиздат, стр.64.
- Вълков М. 2005, *За уточненото задаване на граничните условия в стохастичната теория на Й. Литвинишин*, С., Научна конференция с международно участие ВСУ 2005, стр. VII-77÷VII-81.
- Litwiniszyn J., 1974., *Stochastic Methods in Mechanics of granular bodies*. Wien, Heidelberg, New York, Springer Verlag.
- Borecki H., 1980(red.) *Ochrona powirzchni*, Katowice, Slask.

Препоръчана за публикуване от катедра
"Техническа механика", МТФ