

## ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕДИН МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА ЧЕТИРИПРОВОДНА ПРЕДАВАТЕЛНА ЛИНИЯ

**Любомир Георгиев, Васил Ангелов**

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, e-mail: lubo\_62@mgu.bg  
Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, e-mail: angelov@mgu.bg

**РЕЗЮМЕ.** Представено е общото решение на една система от диференциални уравнения, характеризираща модела на четирипроводна предавателна линия.

### INVESTIGATION ON MATHEMATICAL MODEL OF FOUR-CONDUCTOR TRANSMISSION LINE

**Vasil Angelov, Ljubomir Georgiev**

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, e-mail: lubo\_62@mgu.bg

**ABSTRACT:** A solution of system of differential equations, arising in the model of four-conductor line is presented.

### Въведение

Актуалността на проблемите на електромагнитната съвместимост са изложени в книгите на С.Р. Paul (1992, 1994, 2002). В настоящата работа се изследва един модел на електромагнитната съвместимост на четирипроводна предавателна линия, представен от В. Ангелов (2006). Там се поставя задачата за намиране най-напред на общото решение на една система от 6 диференциални уравнения със 6 неизвестни - напреженията  $(u_k)$  и токовете  $(i_k)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , на трите предавателни линии (за четвърта е прието замасяване или заземяване). Основната цел на настоящия доклад е представянето на полученото общо решение.

### Постановка на задачата

Разглеждаме системата

$$\frac{du}{dt} + M \frac{du}{dx} = 0, \quad (1)$$

където  $u = (u_1, i_1, u_2, i_2, u_3, i_3)^T = u(t, x)$  е 6-мерна вектор-функция на позицията  $x$  и времето  $t$ ,  $\frac{du}{dt}, \frac{du}{dx}$  - съответните производни, а  $M$  е  $6 \times 6$ -матрица:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 & 0 & C_6 \\ D_1 & 0 & D_3 & 0 & D_5 & 0 \\ 0 & C_6 & 0 & C_2 & 0 & C_4 \\ D_5 & 0 & D_1 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & C_4 & 0 & C_6 & 0 & C_2 \\ D_3 & 0 & D_5 & 0 & D_1 & 0 \end{pmatrix},$$

чийто елементи са както следва:

$$C_2 = \frac{(1+\alpha)^2}{C_\alpha}, C_4 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{C_\alpha}, C_6 = \frac{\alpha^2}{C_\alpha}$$

$$C_\alpha = C(1+3\alpha+3\alpha^2);$$

$$D_1 = \frac{1}{L_\alpha}, D_3 = -\frac{\alpha}{L_\alpha}, D_5 = \frac{\alpha^2}{L_\alpha}$$

$$L_\alpha = L(1+\alpha^3) \quad (\alpha = \text{const} > 0).$$

Търсим общото решение на (1).

### Основен резултат

**Теорема:** Нека  $f_1(p), f_2(p)$  са произволни диференцируеми функции и нека двойките (хармонични) функции  $(g_3, h_3), (g_4, h_4)$  са произволни решения на системата (условия) на Коши-Риман, т.е.

$$(g_k)'_x = (h_k)'_y, (h_k)'_x = -(g_k)'_y \quad (k = 1, 2)$$

Тогава общото решение  $u$  на системата (1) има координати:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{f_1(x-t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) - f_2(x+t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3C}} + \\ &+ \frac{\theta(t,x) - \sqrt{3}\beta(t,x)}{\sqrt{3}}; \\ i_1 &= \frac{f_1(x-t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) + f_2(x+t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3L(1+\alpha)}} + \\ &+ \frac{\gamma(t,x) - \sqrt{3}\delta(t,x)}{\sqrt{3}}; \\ u_2 &= \frac{f_1(x-t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) - f_2(x+t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3C}} + \\ &+ \frac{\theta(t,x) + \sqrt{3}\beta(t,x)}{\sqrt{3}}; \\ i_2 &= \frac{f_1(x-t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) + f_2(x+t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3L(1+\alpha)}} + \\ &+ \frac{\gamma(t,x) + \sqrt{3}\delta(t,x)}{\sqrt{3}}; \\ u_3 &= -\frac{2\theta(t,x)}{\sqrt{3}} + \\ &+ \frac{f_1(x-t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) - f_2(x+t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3C}}; \\ i_3 &= -\frac{2\gamma(t,x)}{\sqrt{3}} + \\ &+ \frac{f_1(x-t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) + f_2(x+t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3L(1+\alpha)}}, \end{aligned}$$

където функциите (на  $(t, x)$ )  $\theta, \beta, \gamma, \delta$  се изразяват чрез  $g_3, h_3, g_4$  и  $h_4$  както следва:

$$\begin{aligned} \theta(t, x) &= R_c[g_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) - g_4(x+tR_\mu, tI_\mu)] - \\ &- I_c[h_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) - h_4(x+tR_\mu, tI_\mu)]; \\ \beta(t, x) &= R_c[h_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) - h_4(x+tR_\mu, tI_\mu)] + \\ &+ I_c[g_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) - g_4(x+tR_\mu, tI_\mu)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t, x) &= R_d[g_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) + g_4(x+tR_\mu, tI_\mu)] - \\ &- I_d[h_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) + h_4(x+tR_\mu, tI_\mu)]; \\ \delta(t, x) &= R_d[h_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) + h_4(x+tR_\mu, tI_\mu)] + \\ &+ I_d[g_3(x-tR_\mu, -tI_\mu) + g_4(x+tR_\mu, tI_\mu)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_c &= \sqrt{\frac{c_0}{2}(1+\varphi(\alpha))}, I_c = -\sqrt{\frac{c_0}{2}(1-\varphi(\alpha))} \\ (c_0 &= \frac{1}{C\sqrt{1+3\alpha+3\alpha^2}}, \varphi(\alpha) = \frac{2+3\alpha}{2\sqrt{1+3\alpha+3\alpha^2}}), \\ R_d &= \sqrt{\frac{d_0}{2}(1+\psi(\alpha))}, I_d = \sqrt{\frac{d_0}{2}(1-\psi(\alpha))} \\ (d_0 &= \frac{1}{L\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}, \psi(\alpha) = \frac{2-\alpha}{2\sqrt{1-\alpha+\alpha^2}}), \\ R_\mu &= \sqrt{\frac{\mu_0}{2}(1+\chi(\alpha))}, I_\mu = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}(1-\chi(\alpha))} \\ (\mu_0 &= c_0d_0, \chi(\alpha) = \frac{1+\alpha}{\sqrt{(1+\alpha)^2+3\alpha^4}}). \end{aligned}$$

Преди да преминем към доказателството, отбелязваме, че тъй като  $\alpha$  е малко положително число, стойностите на функциите  $\varphi(\alpha)$ ,  $\psi(\alpha)$  и  $\chi(\alpha)$  са по-малки, но приблизително равни на 1 - съответно  $I_c$ ,  $I_d$  и  $I_\mu$  са приблизително равни на 0, а  $R_c \approx \sqrt{c_0} \approx \sqrt{\frac{2}{C(2+3\alpha)}}$ ,

$$R_d \approx \sqrt{d_0} \approx \sqrt{\frac{2}{L(2-\alpha)}},$$

$$R_\mu \approx \sqrt{c_0d_0} \approx \frac{1}{\sqrt{LC(1+\alpha)}}.$$

**Основни елементи от доказателството:**

Тук ще скицираме само основните елементи от доказателството на теоремата. Представянето на подробното доказателство ще бъде изложено в следваща работа.

Обикновено най-напред се търсят собствените стойности на матрицата  $M$ . Втората степен на  $M$  е циркулантата

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & m_2 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & m_2 & 0 & m_4 \\ m_4 & 0 & m_0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & m_4 & 0 & m_0 & 0 & m_2 \\ m_2 & 0 & m_4 & 0 & m_0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & m_4 & 0 & m_0 \end{pmatrix}, \text{ където}$$

$$(m_0 m_2 m_4) = (C_2 C_4 C_6) \begin{pmatrix} D_1 D_3 D_5 \\ D_5 D_1 D_3 \\ D_3 D_5 D_1 \end{pmatrix}.$$

Намираме собствените стойности на  $M^2$  - те са стойностите на  $f(p) = m_0 + m_2 p^2 + m_4 p^4$ , когато  $p$  описва множеството от всички 6-ти корени на 1:

$$p_1 = 1, p_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2};$$

$$p_3 = -\overline{p_2}, p_4 = -p_1, p_5 = -p_2, p_6 = \overline{p_2}.$$

Тогава числата:

$$\mu_1 = f(\pm 1) = m_0 + m_2 + m_4,$$

$$\mu_2 = f(\pm p_2) = m_0 - m_2 p_2 - m_4 \overline{p_2},$$

$$\overline{\mu_2} = f(\pm p_2) = m_0 - m_2 \overline{p_2} - m_4 p_2$$

са трите различни (и трите - двукратни) собствени стойности на  $M^2$ .

В частност собствените стойности на  $M$  са:

$$\pm \lambda, \pm \mu, \pm \overline{\mu}: \lambda^2 = \mu_1 = \frac{1}{CL(1+\alpha)};$$

$$\mu^2 = \mu_2 = \frac{(1+\alpha) + i\sqrt{3}\alpha^2}{CL(1+3\alpha+3\alpha^2)(1-\alpha+\alpha^2)}.$$

Умножаваме отляво двете страни на (1) с  $M$ , въвеждаме нова вектор-функция  $u = Tv$ , където  $T$  е матрицата,

$$T^{-1}M^2T = P = \text{diag}(\mu_1 \mu_1 \mu_2 \mu_2 \overline{\mu_2} \mu_2), \quad \text{след}$$

това умножаваме още веднъж отляво с  $T^{-1}$  и получаваме (с  $N = T^{-1}MT$ ) системата:

$$N \frac{dv}{dt} + P \frac{dv}{dx} = 0. \quad (2)$$

Последната система се състои от три независими системи от по две уравнения с две неизвестни, тъй като

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu & 0 & \overline{\nu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \nu & 0 & \overline{\nu} \\ 1 & 0 & \overline{\nu} & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \overline{\nu} & 0 & \nu \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\nu = p_2);$$

$$N = T^{-1}MT = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{c_\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{d_\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

където

$$c = \frac{1}{C}, d = \frac{1}{L(1+\alpha)} (cd = \lambda^2);$$

$$c_\nu = \frac{1}{C(1+\alpha+\alpha\nu)}, d_\nu = \frac{1}{L(1-\alpha\nu)} (c_\nu d_\nu = \mu^2).$$

Системата от първите две уравнения в (2) е еквивалентна на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dv_1}{dt} \\ \frac{dv_2}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dx} \\ \frac{dv_2}{dx} \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

чието общо решение е двумерната вектор-функция с координати:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{C}} [f_1(x-t\lambda) - f_2(x+t\lambda)]$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{L(1+\alpha)}} [f_1(x-t\lambda) + f_2(x+t\lambda)]$$

с произволни диференцируеми функции на една реална променлива  $f_1$  и  $f_2$ .

Системата от третото и четвъртото от уравненията в (2) е еквивалентна на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dv_3}{dt} \\ \frac{dv_4}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_\nu \\ d_\nu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dx}{dx} \\ \frac{dv_4}{dx} \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Системата (4) се състои от две уравнения с комплексни коефициенти за две неизвестни функции (на  $(t, x)$ ) с комплексни стойности. Нейното общо решение е двумерната вектор-функция с координати:

$$\begin{aligned} v_3 &= \theta(t, x) + i\beta(t, x) \\ v_4 &= \gamma(t, x) + i\delta(t, x), \end{aligned} \quad (5)$$

където  $\theta, \beta, \gamma, \delta$  са представените по-горе функции с реални стойности на двойната променлива  $(t, x)$ .

Поставеното условие (на Коши-Риман) за двойките функции  $(g_3, h_3), (g_4, h_4)$ , заедно с избора на числата  $R_c, I_c, R_d, I_d$ :

$(R_c + iI_c)^2 = c_v, (R_d + iI_d)^2 = d_v$ , е достатъчно общото решение на (4) да се задава с (5).

Системата от последните две уравнения в (2) е с коефициенти пред неизвестните  $v_5$  и  $v_6$ , които са комплексно спрегнати на съответните коефициенти в (4).

Тъй като търсим реални решения на поставената в началото задача, а от смяната  $u = Tv$  следва

$$v = T^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 \\ i_1 + i_2 + i_3 \\ \bar{v}u_1 + v u_2 - u_3 \\ \bar{v}i_1 + v i_2 - i_3 \\ v u_1 + \bar{v}u_2 - u_3 \\ v i_1 + \bar{v}i_2 - i_3 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$v_5 = \bar{v}_3, v_6 = \bar{v}_4$ , решението на последната система е вектор-функция с координати:

$$v_5 = \theta(t, x) - i\beta(t, x)$$

$$v_6 = \gamma(t, x) - i\delta(t, x).$$

Общото решение на (1)  $u = (u_1, i_1, u_2, i_2, u_3, i_3)^T$  получаваме като заместим намерените

$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  в първоначалната смяна  $u = Tv$ :

$$u_1 = \frac{v_1 + \operatorname{Re} v_3 - \sqrt{3} \operatorname{Im} v_3}{\sqrt{3}} = \frac{v_1 + \theta - \sqrt{3}\beta}{\sqrt{3}};$$

$$i_1 = \frac{v_2 + \operatorname{Re} v_4 - \sqrt{3} \operatorname{Im} v_4}{\sqrt{3}} = \frac{v_2 + \gamma - \sqrt{3}\delta}{\sqrt{3}};$$

$$u_2 = \frac{v_1 + \operatorname{Re} v_3 + \sqrt{3} \operatorname{Im} v_3}{\sqrt{3}} = \frac{v_1 + \theta + \sqrt{3}\beta}{\sqrt{3}};$$

$$i_2 = \frac{v_2 + \operatorname{Re} v_4 + \sqrt{3} \operatorname{Im} v_4}{\sqrt{3}} = \frac{v_2 + \gamma + \sqrt{3}\delta}{\sqrt{3}};$$

$$u_3 = \frac{v_1 - 2 \operatorname{Re} v_3}{\sqrt{3}} = \frac{v_1 - 2\theta}{\sqrt{3}};$$

$$i_3 = \frac{v_2 - 2 \operatorname{Re} v_4}{\sqrt{3}} = \frac{v_2 - 2\gamma}{\sqrt{3}},$$

което приключва доказателството на теоремата.

## Литература

- Paul, C. R. 1992: Introduction to electromagnetic compatibility, *Wiley InterScience, New York* (1992)
- Paul, C. R. 1994: Analysis of multiconductor transmission lines, *A Wiley InterScience Publication, J. Wiley&Sons, New York* (1994)
- Paul, C. R. 2002: Solution on the transmission line equations under weak-coupling assumption, *IEEE Transactions on Electromagnetic compatibility*, v.44, №3 (2002), 413-423
- Angelov, V. G. 2006: Investigation on electromagnetic compatibility of four-conductor transmission line, *Proceedings International Conference VSU 2006, Sofia – Bulgaria, vol I*, 55-60
- Ангелов, В. Г. 2003: Намиране на напреженията на прислушване в трипроводна предавателна линия, *ЮНС 2003, ВСУ "П. Каравелов"*, 93-99