

## ИЗСЛЕДВАНЕ НА СПЕЦИФИЧНОТО ЕЛЕКТРИЧЕСКО СЪПРОТИВЛЕНИЕ НА СКАЛИТЕ ЧРЕЗ СЪСТАВЯНЕ НА ЕКВИВАЛЕНТНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ СХЕМИ

**Стефан Димовски**

*Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София; dimovski@mgu.bg*

**РЕЗЮМЕ.** Разработени са подход и методика за изследване на специфичното електрическо съпротивление на скалите чрез съставяне на еквивалентни електрически схеми. Специфичното електрическо съпротивление на всяка среда, съдържаща  $n$ -компоненти с различно специфично съпротивление, може да се представи чрез еквивалентна електрическа схема, която съдържа паралелно свързани обобщени електрически съпротивления. Всяко едно от тези съпротивления интегрира съвкупност от паралелно свързани съставни съпротивления, които в общия случай се представят от последователно свързани елементи. Електропроводимостта  $\gamma$  на скалите ( $\gamma \neq 0$ ) се обуславя от присъствието на "токопроводящи канали" в електрическата верига, т.е. от паралелно свързаните в еквивалентната схема електрически съпротивления, за които  $R \neq \infty$ . Пространственото разпределение на компонентите определя съотношението между специфичния "електропроводящ" обем и специфичния "токопроводящ" обем в изследваната среда.

### STUDYING ROCKS SPECIFIC ELECTRICAL RESISTANCE BY DESIGNING EQUIVALENT ELECTRICAL CIRCUITS

**Stefan Dimovski**

*University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia; dimovski@mgu.bg*

**ABSTRACT.** An approach and methodics for studying rocks specific electrical resistance by designing equivalent electrical circuits are developed. The electrical resistivity of each medium that contains  $n$ -components characterized by different specific electrical resistance can be presented by an equivalent electrical circuit that consists of compound resistors connected in parallel. Each of these components integrates a set of connected in parallel composite resistors that can be represented by elements connected in series. The rocks electrical conductivity  $\gamma$  ( $\gamma \neq 0$ ) is caused by the presence of "current-conducting channels" in the electrical circuit, i.e. by the connected in parallel in the electrical circuit resistors for which  $R \neq \infty$ . The special distribution of the components determines the ratio between the specific "electrically conductive" volume and the specific "current-conducting" volume in the studied rock sample.

### Въведение

За определяне на средните стойности на специфичното електрическо съпротивление на двукомпонентна среда са извършвани изследвания чрез синтетични модели. При тези модели в едната компонента са вместени включения от втората, които имат еднаква форма и размер и са с равномерно разпределение. Като се изхожда от предпоставките за минералния състав на твърдата фаза се задават много високи, близки до безкрайност стойности за едната от компонентите и сравнително ниски стойности за втората компонента. Обобщено прилаганият подход за определяне на специфичното електрическо съпротивление на двукомпонентни синтетични модели, формирани от електропроводяща и непроводяща компоненти, се свежда до определяне площта на електропроводящата компонента в сечението на модела, през което протича тока. Основната насоченост на извършваните изследвания е ориентирана към връзката между специфичното електрическо съпротивление и специфичния обем на електропроводящата компонента. Този обем за условията на йонна електропроводимост и коефициент на водонасищане  $k_b = 1$  съответства на коефициента на порестост  $k_p$ .

При проведените моделни проучвания вниманието е насочено към унифициране на подхода за използване на

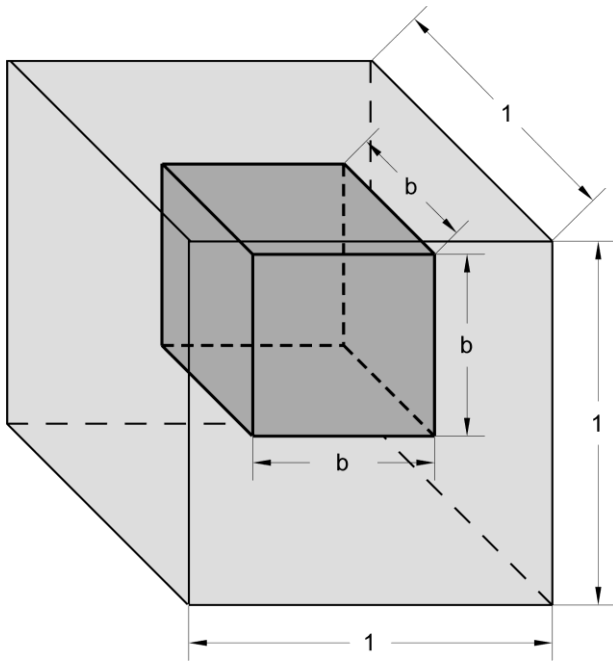
еквивалентни електрически схеми при изследване специфичната електропроводимост на скалите.

### Подход и методика за изследване на специфичното електрично съпротивление чрез съставяне на еквивалентни електрически схеми

Моделирането на специфичното електрическо съпротивление на скалите е възможно чрез съставянето на еквивалентни схеми от електрически съпротивления, формирани в съответствие с разпределението в изследваната среда (скала) на компонентите с различно електрическо съпротивление.

Модел за електрически изотропна двукомпонентна среда може да се представи чрез поместване в куб с ръб  $b_d = 1$  (съответно  $L = 1$  и  $S = 1$ ) на симетрично разположено кубично включение с ръб  $b$ . Пространството между основния куб и кубичното включение е запълнено от компонента със специфично електрическо съпротивление  $\rho_1$ , а специфичното електрическо съпротивление на включението е  $\rho_2$ . (фиг. 1). Кубичното включение се разполага симетрично единствено с оглед равнозначност

при формиране на еквивалентните съпротивления по трите посоки на измерване.



Фиг. 1. Примерен вариант за изследване на специфичното електрично съпротивление на двукомпонентна изотропна среда – модел с едно кубично включение

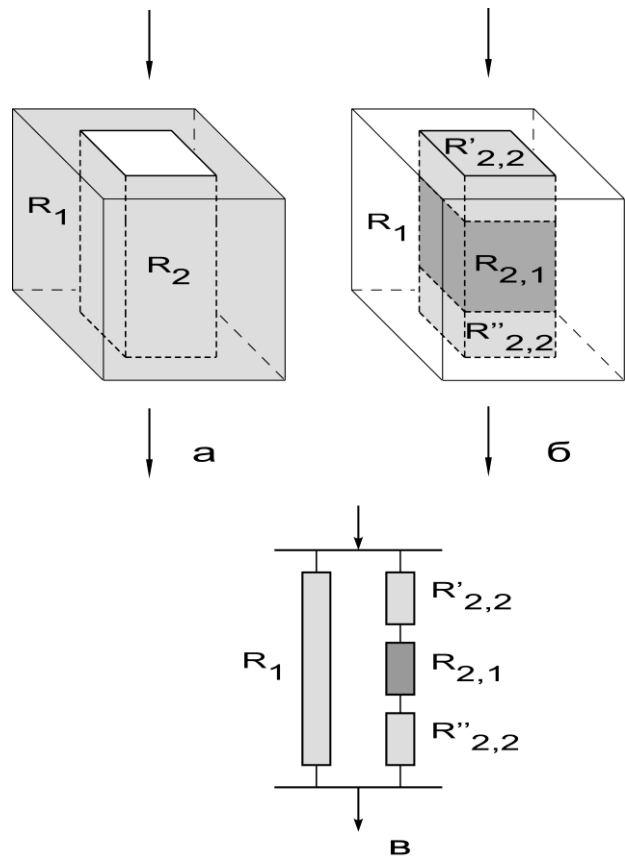
Еквивалентната електрическа схема за определяне на електрическото съпротивление  $R$  на двукомпонентната среда включва електрически съпротивления, дефинирани в съответствие с взаимното разположение на двете компоненти (фиг. 2):

- еквивалентно съпротивление  $R_1$ , което се формира от компонентата със специфично електрическо съпротивление  $\rho_1$ , обкръжаваща кубичното включение и разположените симетрично (под и над него) фрагменти от същата компонента. Това съпротивление е със сечение  $S_1 = 1 - b^2$  и с дължина  $L = 1$  (фиг. 2а);
- еквивалентно съпротивление  $R_2$ , което се представя от три последователно включени електрически съпротивления  $R_{2,1}$ ,  $R'_{2,2}$  и  $R''_{2,2}$  ( $R'_{2,2} = R''_{2,2}$ ) (фиг. 2б):
  - еквивалентното съпротивление  $R_{2,1}$  се формира от компонентата със специфично съпротивление  $\rho_2$  (кубичното включение); то има сечение  $S_{2,1} = b^2$  и дължина  $L_{2,1} = b$
  - еквивалентното съпротивление  $R_{2,2}$  се формира от два фрагмента на компонентата със специфично електрическо съпротивление  $\rho_1$ , разположени симетрично над и под кубичното включение; тези съпротивления  $R'_{2,2}$  и  $R''_{2,2}$  ( $R'_{2,2} = R''_{2,2}$ ) са със сечение  $S_{2,2} = b^2$  и дължина  $L_{2,2} = (1 - b) / 2$

При тази постановка електричното съпротивление  $R$  на модела се представя от две паралелно включени съпротивления  $R_1$  и  $R_2$  (фиг. 2в):

$$R_1 = \frac{\rho_1}{1 - b^2} \quad (1)$$

$$R_2 = R_{2,1} + R'_{2,2} + R''_{2,2} = \frac{\rho_2 b}{b^2} + \frac{2\rho_1 \left( \frac{1-b}{2} \right)}{b^2} = \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{b^2} \quad (2)$$



Фиг. 2. Примерен вариант за съставяне на еквивалентна електрическа схема на двукомпонентна изотропна среда чрез модел с едно кубично включение (фиг. 1): а – формиране на еквивалентните електрически съпротивления  $R_1$  и  $R_2$ ; б – формиране на еквивалентното съпротивление  $R_2$  чрез последователно включване на компоненти със специфични съпротивления  $\rho_2$  и  $\rho_1$ ; в – еквивалентна електрическа схема

Въз основа на (1) и (2) за електрическото съпротивление на модела се получава:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1 - b^2}{\rho_1} + \frac{b^2}{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)} \quad (3)$$

От (3):

$$R = \rho_{1,2} = \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{b^2 \rho_1 + (1 - b^2)[\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)]} \rho_1 = \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + b(1 - b^2)(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \quad (4)$$

В (4) стойността на  $b$  може да се представи чрез специфичното обемно съдържание  $\omega_1$  на средата, в която се разполага кубичното включение:

$$\omega_1 = 1 - b^3 \quad (5)$$

$$\text{и съответно: } b = \sqrt[3]{1 - \omega_1} \quad (6)$$

Израз (4) може да се редуцира за частния случай когато една от компонентите е електрически непроводяща и съответно с много високо специфично електрическо съпротивление. При непроводящо кубично включение  $\rho_2 \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} \Big|_{\rho_2 \rightarrow \infty} &= \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + b(1 - b^2)(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \Big|_{\rho_2 \rightarrow \infty} = \\ &= \frac{\rho_1}{1 - b^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Заместваме стойността на  $b$  от (6) в (7) и получаваме:

$$\rho_{1,2} = \frac{\rho_1}{1 - \sqrt[3]{(\omega_1 - 1)^2}} \quad (8)$$

Израз (8) е аналогичен с получения израз чрез традиционния подход на определяне на специфичното електрическо съпротивление за двукомпонентна изотропна среда, в която непроводящата компонента се представя от равномерно разположени кубични включения.

От израз (4) при електрически непроводяща вместицата компонента, т.е. при  $\rho_1 \rightarrow \infty$  се получава:

$$\rho_{1,2} \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} = \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + b(1 - b^2)(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} \rightarrow \infty \quad (9)$$

Израз (9) е напълно физически мотивиран, като се отчита, че и двете паралелно свързани в еквивалентната схема електрически съпротивления са "безкрайно" големи:

$$(1) \Rightarrow R_1 \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} = \frac{\rho_1}{1 - b^2} \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} \rightarrow \infty \quad (10)$$

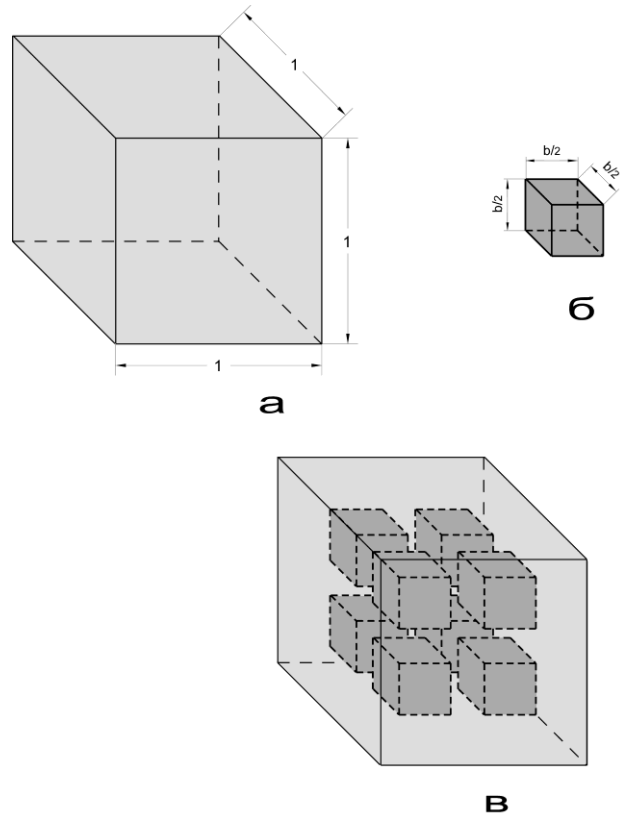
$$(2) \Rightarrow R_2 \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} = \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{b^2} \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} \rightarrow \infty \quad (11)$$

Изследваните два частни случая илюстрират голямото влияние върху специфичното съпротивление на разпределението на електропроводящата компонента в средата (скалата) и съответно възможностите за формиране на "токопроводящ канал".

Приложеният подход за съставяне на еквивалентни електрически схеми може да се приложи за неограничен брой кубични включения.

Например, може да се илюстрира вариант с осем кубични непроводящи включения, разположението на които осигурява електрически изотропна среда. Съответно кубичните включения са вместиени в основния куб така, че страните им са успоредни и проводящият слой за всички кубове е еднакъв (фиг. 3).

За да се реализира директно съпоставяне на еквивалентните схеми за 1 и 8 куба приемаме, че ръба на всеки от осемте куба  $b'$  е равна на  $\frac{1}{2}$  от ръба  $b$  на куба в модела с едно кубично непроводящо включение (фиг. 1), съответно  $b' = \frac{1}{2} b$ .



Фиг. 3. Модел на изотропна среда, формиран чрез вместиране в основен куб (а) на кубични включения (б), които са 8 на брой и са симетрично разположени (в)

При съставянето на вариантната еквивалентна схема (фиг. 4) се изхожда от предпоставката, че тя може да се представи от пет паралелно свързани еквивалентни съпротивления (фиг. 4в):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \quad (12)$$

При това съпоставимо с еквивалентната схема за едно кубично включение съпротивлението  $R_1$  се формира от компонентата със специфично електрическо съпротивление  $\rho_1$ , обкръжаваща кубичните включения и разположените симетрично (под, между и над тях) фрагменти от същата компонента. Това съпротивление е със сечение  $S'_1 = 1 - 4\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1 - b^2$  и с дължина  $L = 1$  (фиг. 4а). Следователно:

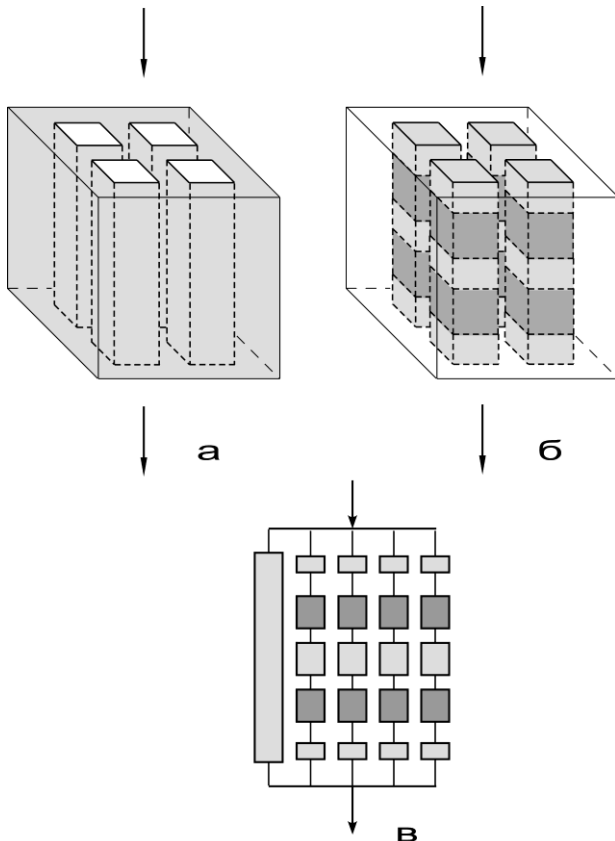
$$R_1 = \frac{\rho_1}{1 - b^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1 - b^2}{\rho_1} \quad (13)$$

Електрическите съпротивления  $R_2, R_3, R_4$  и  $R_5$  са еднакви и се представят от високоомната компонента (кубичните включения) и фрагментите от електропроводящата

компонента, които се разполагат над, между и под кубичните включения по посока на електрическата верига, т.е. напречно на разпространението на тока:

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 2 \frac{\rho_2 \frac{b}{2}}{\left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{\rho_1 (1-b)}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 4 \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{b^2} \quad (14)$$



Фиг. 4. Примерен вариант за съставяне на еквивалентна електрическа схема на двукомпонентна изотропна среда чрез модел с осем кубични включения (фиг. 3): а – базово фрагментиране на средата; б – формиране на еквивалентното съпротивление чрез паралелно и последователно включване на компоненти със специфични съпротивления  $\rho_1$  ( $\rho_1 \neq \infty$ ) и  $\rho_2$  ( $\rho_2 \rightarrow \infty$ ); в – еквивалентна електрическа схема

Полагайки (13) и (14) в (12), получаваме:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} = \frac{1-b^2}{\rho_1} + \frac{4b^2}{4[\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)]} =$$

$$= \frac{\rho_1 + b(1-b^2)(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1[\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)]} \quad (15)$$

$$\rho = \frac{\rho_1 + b(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + b(1-b^2)(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \quad (16)$$

Полученият израз (16) за специфичното електрично съпротивление на двукомпонентна изотропна среда,

моделирана чрез 8 кубични непроводящи включения, е аналогичен с получения израз (4) за модел с 1 кубично непроводящо включение.

Идентичните изрази за едно и осем непроводящи кубични включения, симетрично разположени в основния куб, могат да бъдат обобщени за произволен брой кубични непроводящи включения. Използваме подход, аналогичен на приложения за вече съставените еквивалентни схеми.

В куб с ръб  $b_d = 1$  се разполагат симетрично  $N^3$  еднакви съставни кубични елемента. При това по всеки ръб на основния куб се подреждат по  $N$  съставни кубични елемента с дължина на ръба:

$$b'' = \frac{1}{N}$$

Във всеки съставен елемент се помещава симетрично разположено непроводящо включение ( $\rho \rightarrow \infty$ ) с кубична форма и ръб с дължина  $b'$ . При това общата дължина на непроводящата компонента по дължината на всеки ръб на основния куб е  $b = Nb'$  и съответно:

$$b' = \frac{b}{N}$$

В разглеждания общ случай съпоставимо със схемата за едно кубично включение еквивалентната електрическа схема се представя от  $N^2$  паралелно включени токопроводящи канала със специфично електрическо съпротивление  $\rho_1$ . Всеки от тези канали има сечение  $S'_1 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 - \left(\frac{b}{N}\right)^2 = \frac{1-b^2}{N^2}$  и дължина  $L'_1 = 1$ :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} = \frac{N^2(1-b^2)}{\rho_1 N^2} = \frac{1-b^2}{\rho_1} \quad (17)$$

$$\rho = \frac{\rho_1}{1-b^2} \quad (18)$$

Съвкупният анализ на получените изрази показва, че електрическото съпротивление  $R$  на всяка среда може да се представи чрез еквивалентна електрическа схема, която съдържа паралелно свързани съставни съпротивления  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). При това елементите  $R_i$  в общия случай са съставени от последователно свързани съпротивления  $R_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ). Направеното обобщение се дефинира чрез следните изрази:

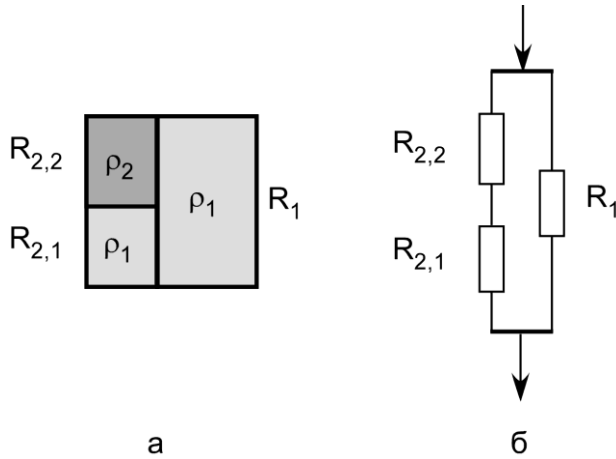
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_i} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (19)$$

$$R_i = R_{i,1} + R_{i,2} + \dots + R_{i,j} + \dots + R_{i,m} \quad (20)$$

Въз основа на (19) и (20) може да се формира вариантен модел за всяка  $n$ -компонентна среда.

За двукомпонентна електрически изотропна среда (скала) специфичното електрическо съпротивление зависи от специфичното обемно съдържание и взаимното разположение на двете компоненти. За вариантен модел,

при който в компонентата със специфично електрическо съпротивление  $\rho_1$  са вместили включения със специфично електрическо съпротивление  $\rho_2$ , електрическото съпротивление  $R$  може да се представи чрез две паралелно свързани електрически съпротивления. Примерно разпределение на двете компоненти при отчитане на специфичните им обеми и взаимното разположение се илюстрира на Фиг. 5а, а формирането на еквивалентната електрическа схема – на Фиг. 5б.



Фиг. 5. Примерно разпределение в двукомпонентна среда на двете компоненти – при отчитане на специфичните им обеми и взаимното разположение (а) и формиране на еквивалентната електрическа схема (б)

Съпротивлението  $R$  на изследваната среда е:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (21)$$

В израз (21):

$$R = \frac{\rho L}{S} = \rho \quad (22)$$

$$R_1 = \frac{\rho_1 \bar{L}_1}{\bar{S}_1} \quad (23)$$

$$R_2 = R_{2,1} + R_{2,2} = \frac{\rho_1 \bar{L}_{2,1}}{\bar{S}_{2,1}} + \frac{\rho_2 \bar{L}_{2,2}}{\bar{S}_{2,2}} \quad (24)$$

За (24) приемаме:

$$\bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 1, \quad \bar{S}_{2,1} = \bar{S}_{2,2} = 1 - \bar{S}_1 \quad (25)$$

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_{2,1} + \bar{L}_{2,2} = 1, \quad \bar{L}_{2,2} = 1 - \bar{L}_{2,1} \quad (26)$$

Заместваме (23) и (24) в (21) като отчитаме (25) и (26) и след преобразуване получаваме:

$$\rho = \frac{\rho_2 - \bar{L}_{2,1}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \bar{S}_1(1 - \bar{L}_{2,1})(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \quad (27)$$

Израз (27) може да се конкретизира за електрически изотропна среда. В този случай:

$$L_{2,2} = \sqrt{S_2} = \sqrt{1 - S_1}$$

$$L_{2,1} = 1 - \sqrt{1 - S_1} \quad (28)$$

Заместваме (28) в (27) и получаваме:

$$\rho = \frac{\rho_2 - (1 - \sqrt{1 - S_1})(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + S_1 \sqrt{1 - S_1}(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \quad (29)$$

Ако моделираме формализирано електрическото съпротивление  $R_{2,2}$  чрез куб с ръб  $b$ , полученият израз (27) и съответно (28) са идентични с израз (4), доколкото  $R_1$  се дефинира от израз (1), а  $R_2$  - от израз (2).

Изследваме (27) за три възможни частни случая:

1) в електропроводяща среда с електрическо съпротивление  $\rho_1$  са вместили непроводящи включения с електрическо съпротивление  $\rho_2 \rightarrow \infty$ :

$$\rho \Big|_{\rho_2 \rightarrow \infty} = \frac{\rho_2 - \bar{L}_{2,1}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \bar{S}_1(1 - \bar{L}_{2,1})(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \Big|_{\rho_2 \rightarrow \infty} \Rightarrow$$

$$\rho \Big|_{\rho_2 \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\rho_1}{\bar{S}_1} \quad (30)$$

2) в електрически непроводяща среда със специфично електрическо съпротивление  $\rho_1 \rightarrow \infty$  са вместили електропроводящи включения със специфично електрическо съпротивление  $\rho_2$ :

$$\rho \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} = \frac{\rho_2 - \bar{L}_{2,1}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \bar{S}_1(1 - \bar{L}_{2,1})(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} \Rightarrow$$

$$\rho \Big|_{\rho_1 \rightarrow \infty} \rightarrow \infty \quad (31)$$

3) Еквивалентните съпротивления  $R_{2,2}$  и  $R_1$  са с еднаква дължина ( $\bar{L}_{2,2} = \bar{L}_1$ ):

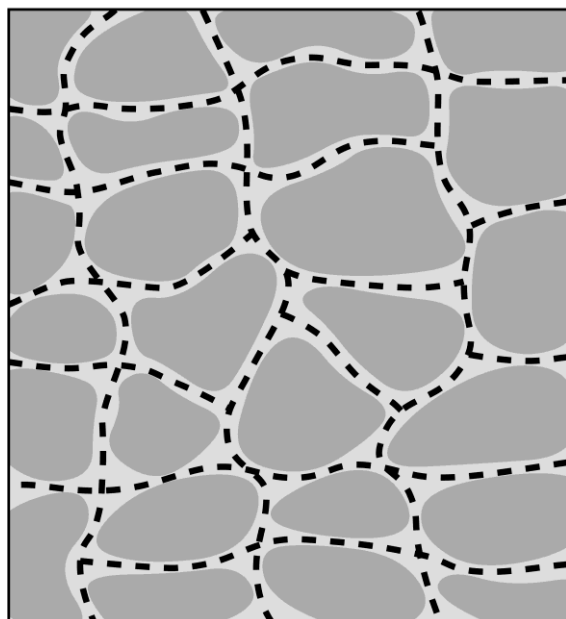
$$\bar{L}_{2,2} = \bar{L}_1 = 1 \Rightarrow \bar{L}_{2,1} \rightarrow 0$$

$$\rho \Big|_{\bar{L}_{2,1} \rightarrow 0} = \frac{\rho_2 - \bar{L}_{2,1}(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \bar{S}_1(1 - \bar{L}_{2,1})(\rho_2 - \rho_1)} \rho_1 \Big|_{\bar{L}_{2,1} \rightarrow 0} \Rightarrow$$

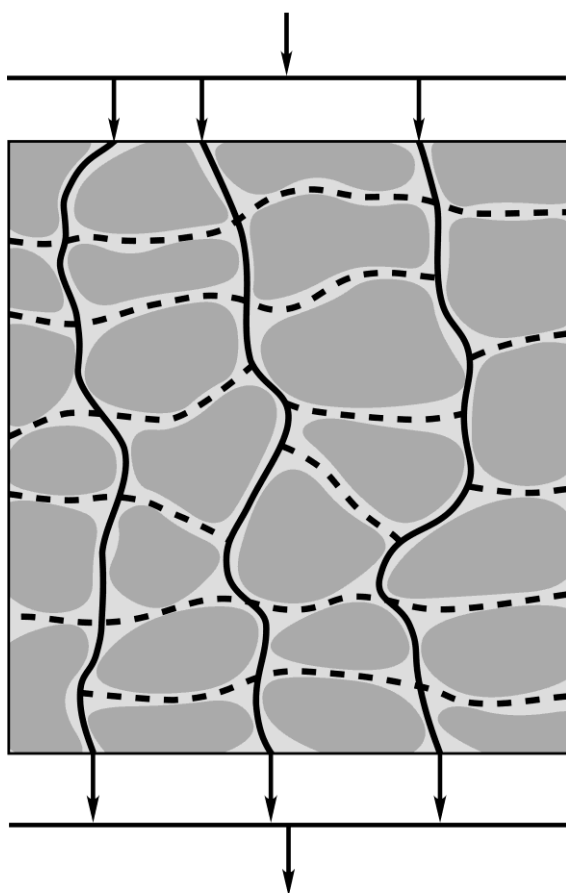
$$\rho \Big|_{\bar{L}_{2,1} \rightarrow 0} \rightarrow \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \bar{S}_1(\rho_2 - \rho_1)} \quad (32)$$

Анализът на изразите (27) – (32) унифицира важния извод, че електропроводимостта  $\gamma$  на скалите ( $\gamma \neq 0$ ) се обуславя от присъствието на “токопроводящи канали” в електрическата верига, т.е. от паралелно свързани в еквивалентната схема електрически съпротивления, за които  $R \neq \infty$ .

Примерно разпределение на електропроводящите канали в естествена двукомпонентна среда (скала) с непроводящи включения се илюстрира на Фиг. 6а, а на токопроводящите канали - на Фиг. 6б.



а



б

Фиг. 6. Примерно разпределение на електропроводящите канали в естествена двукомпонентна среда (скала) с непроводящи включения (а) и на токопроводящите канали (б)

## Заклучение

Разработени са подход и методика за моделиране на специфичното електрическо съпротивление на скалите чрез съставянето на еквивалентни схеми от електрически съпротивления, формирани в съответствие с разпределението в изследваната среда (скала) на компонентите с различно електрическо съпротивление.

Резултатите от изследванията на специфичното електрическо съпротивление чрез използване на еквивалентни електрически схеми позволяват да се дефинират следните основни изводи:

- Специфичното електрическо съпротивление на всяка среда, съдържаща  $n$ -компоненти с различно специфично съпротивление може да се представи чрез еквивалентна електрическа схема, която съдържа паралелно свързани обобщени електрически съпротивления. Всяко едно от тези съпротивления интегрира съвкупност от паралелно свързани съставни съпротивления, които в общия случай се представят от последователно свързани елементи.
- Електропроводимостта  $\gamma$  на скалите ( $\gamma \neq 0$ ) се обуславя от присъствието на "токопроводящи канали" в електрическата верига, т.е. от паралелно свързаните в еквивалентната схема електрически съпротивления, за които  $R \neq \infty$ . Пространственото разпределение на компонентите определя съотношението между специфичния "електропроводящ" обем и специфичния "токопроводящ" обем в изследваната среда.

## Литература

- Кобранова, В. Н. 1986. *Петрофизика*. М., Недра, 392 с.  
*Справочник геофизика. Физические свойства горных пород и полезных ископаемых*. 1989. М., Недра, 527 с.  
*Western Atlas International, Inc. 1995. Introduction to Wireline Log Analysis*. Houston, Texas, 312 p.

Препоръчана за публикуване от  
 Катедра "Приложна геофизика", ГПФ