

СТОХАСТИЧЕН МОДЕЛ НА ВАЛЕЖ-ОТТОК (RAINFALL-RUNOFF) ЗА ПУКНАТИННИ ВОДОИЗТОЧНИЦИ

Светлозар Бакърджиев¹, Юлия Кирова²

¹Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", София 1700; zarcobak@mgu.bg

²Национален институт по метеорология и хидрология към БАН, София 1784; jkirova@abv.bg

РЕЗЮМЕ. Хидравличното поведение на водните ресурси в сложни хидрогеоложки формации, характеризиращи се със сложна физическа и геометрична хетерогенност във всички възможни нива и мащаби, е възможно да бъде моделирано чрез подходящо избрано отношение между входящи ($P(t)$) и изходящи ($Q(t)$) водни дебити. Математически те могат да бъдат представени като случайни, само-корелиращи се и крос-корелиращи се (не)стационарни процеси във времето (t). За всеки период от време за входяща информация може да се използва дискретното измерване на тоталния валеж, а за изходяща информация - дебитите на оттока. Разработеният стохастичен модел е реализиран компютърно, като резултатите са представени от една страна като Q-Q диаграми, показващи близостта между модела и експерименталните данни и диаграма на устойчивостта на детерминистичния процес, и нелинейно свързания с него стохастичен процес. Резултатите от компютърната обработка на конкретен емпиричен материал показват, че върху диаграмата ($P(t)$ - ($Q(t)$), спрямо точката на равновесие SE ($P(t) = (Stable\ Equilibrium) (Q(t))$), се оформя фамилия от траектории на зависимостта между ($P(t)$) и ($Q(t)$), които в зависимост от въздействието на стохастичната компонента са в близост или се отдалечават спрямо детерминистичните траектории, трасиращи стабилност на процеса валеж-отток.

STOCHASTIC MODEL OF RAINFALL-RUNOFF FOR FISSURED AQUIFERS

Svetlozar Bakardjiev¹, Julia Kirova²

¹University of Mining and Geology, Sofia 1700; zarcobak@mgu.bg

²BAS – National Institute of Meteorology and Hydrology, Sofia 1784; jkirova@abv.bg

ABSTRACT. Hydraulic behavior of water resource in complexity hydro geological formation, which one characterize with complexity physical and geometry heterogeneity in all possibility scales, possibly modeling with selected relationship between RAINFALL-RUNOFF discharge. Mathematically these models present as random self-correlated and cross correlated stationary process in the time. For a time period for input information be able to discrete measurement of total rainfall and for output information – the output flow debit. The elaboration stochastic model has computer realization, like results presents on one side in Q-Q – diagrams which one showed the closeness between present model and experimental data and nonlinearity stochastic process. The results of computer simulation in concrete empirical material showed that on diagram ($P(t)$ - ($Q(t)$) relation to SE ($P(t) = (Stable\ Equilibrium) (Q(t))$) supposed dependency between ($P(t)$) and ($Q(t)$), which one is closed or far off toward deterministic trajectories, which tracing stability of rainfall-runoff process.

Въведение

С основополагащата се работа на Лабо и др. (Labat, Ababou, Mangin, 1999) за успешно реализиран модел на Волтер (Volterra expansion) в карстови терени се въвежда нетрадиционни насоки на стохастичното моделиране в хидрогеологията. Хидравличното поведение на водните ресурси в сложни хидрогеоложки формации, характеризиращи се със сложна физическа и геометрична хетерогенност във всички възможни нива и мащаби, е възможно да бъде моделирано чрез подходящо избрано отношение между входящи и изходящи водни дебити (Трошанов, 1992). Математически те могат да бъдат представени като случайни, само-корелиращи се и крос-корелиращи се (не)стационарни процеси във времето (t). За всеки период от време за входяща информация може да се използва дискретното измерване на тоталния валеж, а за изходяща информация - дебитите на оттока. При окончателния баланс трябва да се отчита и каква част от падналия валеж се оттича като повърхностен отток.

Публикуваните до момента решения не следват точно решенията на диференциалните уравнения, а флукутират около тях. Нашите изследвания на поведението на тези системи показва, че отчитането на флукутиациите е удачно да се реализира чрез подходящо избрано управляващо уравнение. Решението на вероятностните уравнения е близко до начина на решението на уравнението на Чепмен-Колмогоров. С този вариант на решение се определят както широко мащабните детерминистични изменения, така и флукутиационната част, която не се разглежда само като "случайна добавка" към детерминистичното уравнение. Според проведени от нас компютърни експерименти се показва категорично, че при подобно опростяване не може да се очаква близост на решението с експерименталните данни.

Прост математически модел на равновесието

Нека да приемем, че натрупването във времето на водни количества, които са резултат от регистрираните

количества валежи има следната скорост: $\frac{di}{dt} = \alpha i$,

където i - са постъпили водни количества валежи, за времето (t) α е коефициент на интензивност на валежите.

Нека да предположим, че валежи почти липсват и е налице източване на акумулирани водни количества, т. е.

$\frac{dz}{dt} = -\gamma z$, където z са източнените водни количества, за

времето (t) , а γ е коефициент на намаляване на акумулираните водни количества. За да се изследва динамиката на взаимодействие между постъпващите и извличащите се водни количества трябва горните две уравнения да се обединят, т.е.

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \alpha i - \beta iz, \text{ където } \beta \text{ е източненото водно}$$

количество за единица време (t) . Скоростта на изменение на източваните водни количества може да се представи с аналогично уравнение:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \omega z i - \beta z, \text{ където } \omega \text{ е достигнатата скорост}$$

на акумулиране на водни количества в резултат от валежите за време (t) .

Очевидно е, че отношението между т. нар. „вход-изход“ (Input-output) водни дебити ще има цикличен характер. Когато валежите са много, то ще се увеличи и дебитът на водоизточника. Обратно, намаляването на валежите, ще доведе до намаляване на дебита на водоизточника. Разбира се, това не става моментално, а с известно закъснение, което се изразява с колебанията на обемите на валежите и водоизточника. Следователно, тези уравнения могат да се разглеждат в търсенето на точката на равновесие, т. е.

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} = 0.$$

След като производните са равни на 0, то получаваме:

$$i = \frac{\gamma}{\omega}; z = \frac{\alpha}{\beta}$$

За да изключим променливата t , по горе описаните уравнения се обединяват и делят, като в резултат се получава следното равенство:

$$\frac{\partial z}{\partial i} = \frac{i\omega z - \gamma z}{\alpha i - \beta iz}; \quad \frac{\partial z}{\partial i} = \frac{z(\omega i - \gamma)}{i(\alpha - \beta z)}$$

След стандартни преобразувания се получава:

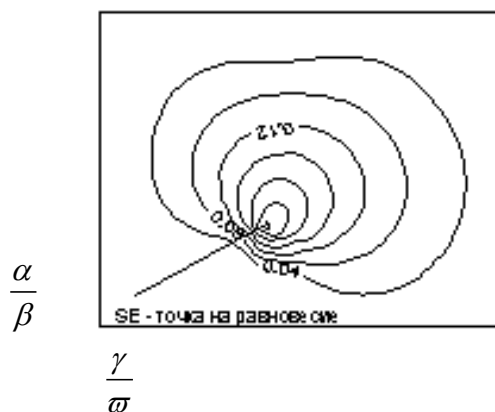
$$\frac{\alpha - \beta z}{z} \frac{\partial z}{\partial i} + \frac{z - i\omega}{i} = 0.$$

Едно подходящо решение се дава от следното равенство:

$$\frac{i^\gamma}{e^{\omega i}} \frac{z^\alpha}{e^{\beta z}} = S, \text{ където } S \text{ - константа, от която зависи}$$

отдалечаването на траекторията на решението спрямо точката на равновесие - (SE) .

Типични решения са представени на фиг. 1. Вижда се, че решенията зависят много силно от стойността на S .



Фиг. 1. Траектории на зависимостта между валеж - отток в зависимост от стойностите на S - обозначени са траекториите при стойности на $S = 0.04, 0.08$ и 0.12

Следователно, емпиричното определение на S е твърде важно, тъй като тази константа отразява някакъв относително постоянен обем на подземните води, който естествено се колебае в зависимост от притока и оттока, но се предполага, че във времето тези колебания имат ергодичен характер. Известно е, че свойството ергодичност е налице, когато средното и дисперсията на отделните реализации (измервания) са съответни на параметрите на разпределението като средно и дисперсия, т. е.:

$$\bar{z} = \mu_z(t) \quad \sigma_z^2 = D_z(t), \text{ където } t \text{ е времето.}$$

Установяването (неустановяването) на ергодичност в изследването на процеса **валеж-отток** ще позволява (или обратното) да се премине от ежедневно към седмично или към месечно замерване обемите на валежите и съответния отток. За точното определяне на S е необходимо да се пресметне ресурсът на подземна водоносна система, тъй като тя е своеобразен буфер, балансираш равновесието в системата **валеж-отток**. Смята се, че това най-коректно ще се извърши чрез методите на геостатистиката. В този контекст, изборът на адекватен на данните геостатистически модел е част от общото моделно решение. Добре апробирано върху реални хидрогеоложки данни геостатистическо решение дава Петров (Петров, 2004) по данни за Софийския басейн. Моделът се базира неявно върху хипотезата за ергодичност, което е позволило на изследователя да се обединят някои наблюдения, които имат стратифициран характер. В минната геостатистика подобен тип обединяване на съседни наблюдения в една проба се нарича композит. В тази връзка, първоначално, усилията трябва да се съсредоточат върху подходящия избор на вероятностния модел за описание на данните.

Избор на вероятностен модел за описание на данните

Изборът на вероятностен модел за описание на природните данни е много сложна задача. Преди появата на геостатистиката обработката на пространствените данни следваше рецептите на традиционната статистика, свързани с ползването в общо геоложката практика на

статистически разпределения като нормално, гама, логнормално и др. Удачният избор на някое от тези разпределения, в контекста на приемливо за практиката адекватно описание на природния обект, се възприема от изследователските екипи като избор на вероятностен модел за описание на данните. В хидрогеоложката практика са известни измерени стойностите на проницаемостта, които представени чрез коефициента K_d варират в интервала от 10^{-17} до 10^{-12} . Естествено, логаритмуването на такъв род данни потиска максимално дисперсията. Не случайно, бащите на геостатистиката Д. Криге (Krige, 1961) и Ж. Матерон (Matheron, 1963; 1971) определят за централна ролята на логнормалното разпределение при геостатистическо описание на повечето геоложки данни. След 1973 г. един от учениците на Матерон – Давид, (David, 1977), въз основа на натрупан опит, препоръчват логнормалния закон за базов в геостатистиката. С това се прави опит за въвеждането на задължителното логаритмуване на всички данни, които съдържат екстремни стойности. Паралелно с това се въвежда и понятието и формализма на т.нар. логнормален Кригинг. Самото название определя изискването – разпределението на данните (нарастванията) да съответствува на Логнормалния закон. Обаче в последно време се натрупват факти, че логнормалната хипотеза не се потвърждава, особено при данни с високи стойности на дисперсията

През 1960 г. Бенуа Манделброт (Mandelbrot, 1960) показва, че повечето от природните данни не покриват тестовете на Колмогоров - Смирнов за съгласуваност с логнормалната хипотеза. Алтернативното предложение е, че данните са разпределени по т.нар. Устойчив закон. Този клас разпределения са всъщност едно широко обобщение на нормалния закон. Доказана от Леви (Levi, 1925) и Хинчин (Khinchin, A., 1938) теорема гласи, че показателят α , който стои в степента на u над експонентата на характеристичната функция и който при нормалното разпределение е равен на 2, а при $\alpha < 2$ дефинира безкрайна дисперсия. Както се спомена, практиката не може да осигури напълно този факт, тъй като това предполага безкрайна чувствителност и точност на измерванията.

Сведения за устойчивите разпределения

Както се спомена, устойчивите разпределения са теоретично обосновани от Пол Леви (Levi, 1925) и обобщенията, извършени от Хинчин (Khinchin, 1938). До публикацията на Манделброт (Mandelbrot, 1960) устойчивите разпределения не са имали широко практическо приложение, тъй като, с няколко изключения, нямат явни изрази за плътността или функцията на разпределение. Едно обобщение на теорията на устойчивите разпределения се дава през 1983 г. от Золоторьов.

В тази монография се дават различни подходи и решения за описание на реални обекти и процеси чрез устойчивите разпределения. В най-общ вид,

характеристичната функция от случайната величина X се дефинира като:

$$g(u) = E(e^{iuX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x) dx$$

Това е всъщност комплексната трансформация на Фурие $f(x)$. За моментите на разпределението се използва

израза: $\mu_r' = E(X^r) = i^{-r} g^{(r)}(0)$. За устойчивите разпределения е важно да се пресметнат поне параметрите α и γ на характеристичната функция:

$$\chi(u) = e^{\gamma|u|^\alpha}$$

Параметърът α може да варира от 0 до 2. При $\alpha = 1$ се смята, че е налице разпределението на Коши, което се характеризира с това, че математическото очакване μ и дисперсията σ са равни на безкрайност.

Обяснението за безкрайността на математическото очакване μ е следното: Нека разполагаме n – на брой средни $\bar{x}$ получени от n – на брой извадки от дадена Генерална съвкупност от данни. При нормалното разпределение получените n – на брой средни $\bar{x}$ са сходими към математическото очакване μ .

При разпределението на Коши плътността има формата:

$$f(x) = C/(1+x^2).$$

Извадъчните средни $\bar{x}$ са разпределени също по разпределение на Коши, т.е. имат също безкрайна дисперсия.

Общо взето има обширна литература, в която се показва, че това важи и за природните системи от данни. При появата на екстремни стойности, т.е. с утежняване на опашката на разпределението, параметърът α намалява пропорционално своята стойност. Параметърът γ е мащабен, но не в пълния смисъл на това понятие. Повече сведения за Устойчивите разпределения могат да се намерят в цитираната литература.

Резултати и обсъждане

Предлагания от нас подход беше апробиран върху реални данни за валежните количества, подхранващи карстовият резервоар „Асеновград“ – виж. Табл. 1. Замерванията обхващат интервала от 1959–2003 г. при едномесечно отчитане на количествата валежи. Карстовия резервоар „Асеновград“, се смята за еталонен, тъй като е напълно дрениран от своите извори, виж Трошанов (1992).

Таблица 1

YEAR	JAN	FEB	MAR	APR	MAY	JUN	JUL	AUG	SEP	OCT	NOV	DEC
1959	8	5.6	24.2	58.4	67.6	203	34.1	74.1	57.8	39.3	52.1	21.9
1960	34.4	29.3	29.2	83.7	77.5	130.6	70.9	14	92.6	7.3	55.9	115.5
1961	42.8	7.8	29.1	16.8	114.9	131.1	171	34.2	16.8	31.8	106.4	60.8
1962	30.2	62.9	45.6	44.3	26.6	25.9	79.1	17.8	39.9	78.1	50.3	86.8
1963	88	70.2	43.8	69.4	156.1	55.8	68.7	3	13.3	58.7	77.7	39.1

1964	10.6	15.8	34.5	32.2	89.8	60.1	22.6	39.4	93.8	26.2	24.7	35.8
1965	37.3	25.9	71.3	39.1	64.6	0.8	5.7	22.5	0	19.6	29.6	22.1
1966	54.5	9.9	61.5	65	70.2	114.5	40.8	39.9	17	20.9	132.3	132.9
1967	22.9	9.2	61.8	50	63.9	80.5	58.8	4.2	30.4	19.6	41.6	29
1968	48.4	32.4	36.4	2.9	45	23.9	26.8	32.7	65.3	34.9	102.8	44.4
1969	103.4	58.2	60.3	15.2	25	71	35.5	2.3	82	0	3.6	124.7
1970	23.5	43.4	71.8	24.7	63.6	26.8	2.8	2.1	4.7	55.6	21.7	18.6
1971	56.2	51.4	65	46.8	71.5	84.2	149.2	7.8	135.7	49.9	38.5	33.3
1972	17.8	14	17.8	77.3	26.9	30.4	13.8	56.5	63.9	135.5	9.4	9.1
1973	32.7	40.4	54.7	82.2	27.5	37.1	86.7	30.8	70.5	11.9	24.9	13.4
1974	32.5	22.4	51.7	33.7	65.7	104.8	49.3	37.9	3.6	10.6	83.1	88.1
1975	50.8	26.7	33.9	86.7	66.4	58.8	42	125.9	9.8	69	40.1	20.7
1976	14.2	32.3	7.8	49.6	69.7	49.3	108.9	36.9	12	106.7	51.2	11.8
1977	47.2	38.4	6.3	5.2	73.1	67.5	72	0.3	64.9	1.6	19.8	65.6
1978	25.7	34.4	38.3	84.5	86.3	57.6	33.5	44.1	150.3	65.5	18	44.1
1979	22	83.7	2.9	52.8	182.4	60.8	17.5	54.7	4.1	91.4	96.8	38.7
1980	57.9	29	20.6	74.2	96.7	46.1	32.4	65	0	28.2	38.9	83.5
1981	89.1	35.1	13.4	21.4	46	47.4	31.8	40	3.3	0.6	74.9	27
1982	33.1	39.8	46.2	88.1	42.4	29.9	66.9	36.1	24.1	47.1	28.7	75.7
1983	15.5	6.1	20.7	13.6	17.3	143.6	139	45.5	49.7	14.5	17.9	53.7
1984	48.5	36.4	123.5	57.6	15.7	35.3	36.5	129.5	3.8	4	22.7	47.2
1985	25.4	13.9	24.7	33.9	32.8	33.7	13.9	54.5	17.7	8.1	91.2	3.3
1986	68	104.1	14.4	5.8	46.3	58	30.2	73	15.8	34.6	18.2	23.7
1987	45.7	28.1	57.7	136.6	33.5	19.1	73.4	14.1	7.9	40.9	58.6	22.6
1988	5.4	33.6	61.8	9.6	45.5	70.9	0.4	1.5	14.7	18.5	95.2	70
1989	0.6	6.5	91.7	5.9	84.7	77.5	47.2	34.8	23.4	4.8	31.6	43.9
1990	2	0.9	28	33.7	64	40	21.7	37	50	20	14.6	126.7
1991	32.5	0	42.7	51	63.9	19	80.5	55.8	17.3	43	45.9	14.8
1992	9.5	17.6	32.1	107.7	35.7	76.8	46.7	2.6	3.1	24.8	36	51.3
1993	12.3	L.D	L.D	L.D	L.D	L.D	L.D	L.D	1.2	4.2	63.3	18.2
1994	9.5	32.8	27.3	63.6	14.3	43	20.1	8.6	6.2	85.4	51.8	58.3
1995	L.D	17.2	79.5	12.4	34.2	58	64.6	L.D	L.D	L.D	50.9	82.9
1996	21.6	73.3	29.1	11.6	51.5	L.D	L.D	L.D	L.D	17.5	67.3	60.1
1997	55	48.1	86.1	39.5	46.2	22.9	67.5	179.1	14.1	61.7	25.1	106.7
1998	80.1	77.5	35.3	8.3	121.6	40.3	37.5	0.4	80.6	60.5	100.2	27
1999	33	64.5	57	6.9	77.8	87.3	56.6	67.6	20.2	31.2	43.5	61.2
2000	39	14.8	10.5	57.7	22.1	22.5	6	2.3	34.7	30	16.5	7
2001	61	32.8	22.7	85.6	125.2	49.1	23.9	17.4	55.8	3.6	9.4	69
2002	10	0	137.4	45.5	43.3	26.8	177.9	32.3	70.3	47.1	42.1	66.2
2003	50.5	38	0.7	82.4	128.7	12.2	52	2.3	21.7	74.8	9.5	140.1

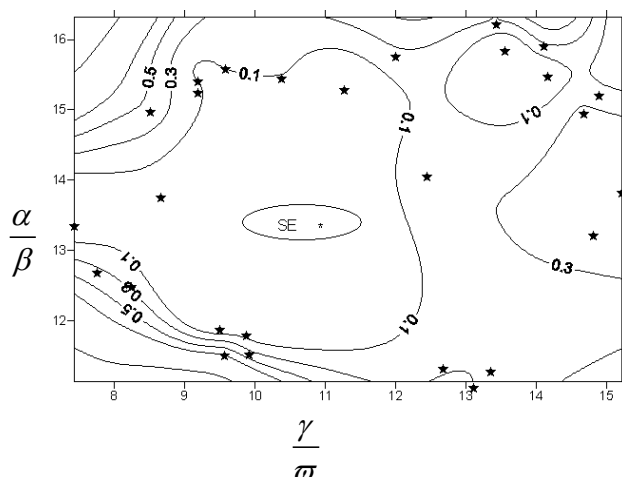
Данните за оттока са взети от каптиран карстов извор с. Мулдава № 721534/66 – виж таблица 2. Замерванията на дебита на карстовия извор съвпадат по време със замерванията на количеството валежи. Тази съпоставимост във времето позволи да се проиграе моделът на равновесието върху реално измерени емпирични данни.

Таблица 2

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1959	290	-	249	235	347	337	402	450	325	303	418	392
1960	-	551	363	505	591	615	571	547	507	490	472	580

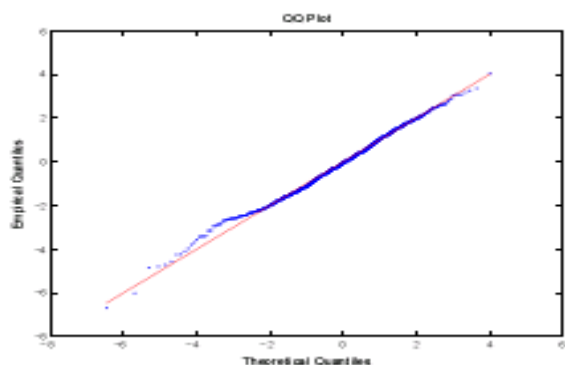
1961	888	718	710	526	539	660	613	576	565	391	418	458
1962	407	477	546	753	629	526	408	-	388	420	518	385
1963	648	927	875	927	1049	1349	977	555	464	416	350	529
1964	453	371	521	-	522	-	689	516	316	245	276	303
1965	368	372	421	524	553	851	480	390	242	233	246	202
1966	143	167	199	235	464	524	512	449	313	203	257	463
1967	704	603	593	734	735	509	655	405	376	276	239	189
1968	151	175	171	251	230	228	177	222	177	166	171	266
1969	299	447	535	786	691	360	363	155	161	136	124	130
	-	-	750	682	504	-	310	170	135	134	115	113
	-	-	730	802	-	-	228	-	-	-	-	-
1970	141	214	341	485	547	408	346	307	294	274	183	-
	155	233	332	585	503	391	338	-	209	-	-	-
	224	420	372	529	454	383	-	-	-	-	-	-
1971	131	212	238	222	704	267	599	428	268	279	289	188
	140	227	-	739	659	452	496	416	272	336	192	170
1972	153	159	177	237	388	277	263	244	266	180	278	302
	-	-	-	-	-	290	262	249	249	277	261	-
	175	208	224	231	-	275	-	-	-	-	-	-
1973	167	201	254	493	921	634	346	267	184	134	141	152
	169	-	298	645	645	-	305	206	232	130	148	161
1974	153	126	129	200	182	259	93	193	167	147	234	162
	158	136	179	192	229	265	57	-	174	140	179	183
1975	384	251	271	314	422	810	533	453	442	376	351	313
	335	247	282	328	725	614	-	-	-	363	368	282
	-	-	-	-	-	-	-	469	-	343	312	-
1976	270	275	341	307	530	453	448	499	423	283	362	491
1977	493	465	551	457	351	473	320	405	295	308	165	176
1978	165	193	176	389	286	372	273	432	524	512	524	527
1979	429	436	461	519	571	585	760	560	439	718	387	500
1980	504	537	585	755	832	744	918	971	476	452	414	223
1981	323	303	523	554	667	526	601	550	556	315	138	117
1982	122	137	274	241	331	391	337	343	300	339	325	333
1983	263	318	313	276	280	325	251	291	210	205	216	214
1984	238	267	274	453	422	757	449	428	197	215	121	-
1985	215	236	174	248	190	169	196	92	110	132	182	125
1986	185	165	344	262	238	267	242	239	222	192	206	246
1987	240	235	290	345	326	326	491	285	347	293	293	293
1988	286	280	180	254	266	204	183	195	227	205	219	245
1989	213	216	242	195	200	210	210	205	215	239	239	223
1990	237	211	216	251	130	250	250	248	250	200	210	170
1991	129	-	-	-	392	435	-	392	-	419	412	400
1992	381	-	140	-	201	-	235	-	-	210	157	115
1993	189	172	206	167	333	411	218	138	158	204	201	148
1994	125	136	120	198	215	272	252	204	182	263	216	206
1995	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1996	150	180	172	300	432	440	364	231	182	156	309	168
1997	200	305	200	650	422	495	346	300	214	203	185	-
1998	274	280	499	558	625	676	380	328	365	237	221	317
1999	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2000	180	190	220	232	220	197	190	180	175	160	175	180
2001	162	170	218	145	315	320	360	255	250	235	210	210

2002	180	195	255	325	390	300	270	315	282	250	300	330
2003	440	394	340	360	330	290	280	360	320	310	255	245



Фиг. 2. Моделно решение по данните от таблица 1 и 2. С точки са показани емпиричните стойности, а с линии на ниво са показани траекториите на съответните решения $\frac{i^\gamma}{e^{\omega i}} \frac{z^\alpha}{e^{\beta z}} = S$

Изведеният стохастичен модел (виж фиг. 2) е реализиран компютърно, като резултатите са представени от една страна като Q-Q диаграми (виж фиг. 3) показващи близостта между модела и експерименталните данни и диаграма на устойчивостта на детерминистичния процес, и нелинейно свързания с него стохастичен процес.



Фиг. 3. Съответствие между емпиричните данни и модели представени чрез Q-Q Plot

Резултатите от компютърната обработка на емпиричния материал от таблица 1 и 2 показват, че върху диаграмата на баланса, спрямо точката на равновесие SE, се оформя фамилия от затворени траектории на зависимостта между отношенията $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\gamma}{\omega}$. От графиката се вижда се, че в зависимост от въздействието на стохастичната компонента, детерминистичните траектории са в близост или се отдалечават спрямо детерминистичните траектории. По този начин, от една страна може да се

прогнозира във времето водния баланс в хидрогеоложки басейн, а от друга страна може да се предскаже доколко случайните вариации, поотделно и между отношенията $\frac{\alpha}{\beta}$ и $\frac{\gamma}{\omega}$, влияят върху устойчивостта на детерминистичните решения, характеризиращи динамиката на водния баланс.

В заключение трябва да се отбележи, че получените резултати имат предварителен характер, тъй като изведените траектории на моделното решение на

равенството $\frac{i^\gamma}{e^{\omega i}} \frac{z^\alpha}{e^{\beta z}} = S$, могат да имат и други

траектории, които не се представят от затворени криви. Тази тенденция се забелязва в краищата на графиката, представена на фиг. 2. Обикновено, това „аномално поведение“ се обяснява с нарушаване на съответствие между емпиричните данни тези на модела, които проличават в долната част на графиката – Q-Q Plot, представена на фиг. 3. В този аспект, изборът на вероятностния модел на описание на данните е не малко важен от построяването на моделното решение.

Литература

- Петров, В. 2004. *Хидрогеология на плиоценския водоносен комплекс на територията на Софийската котловина*. – Автореферат на дисертация за получаване на научната и образователна степен „доктор“, С., МГУ.
- Трошанов, Н. 1992. Оценка на подземното дрениране на Севернородопския карст към Горнотракийската низина. – *Инж. геология и хидрогеология*, 22, 10-27.
- David, M. 1977. *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Elsevier.
- Khinchin, A. 1938. *Limited Laws for Sums Independent Random Variables*. O.N.T.I., Moscow – St. Petersburg.
- Krige, D. G. 1961. A statistical approach to some basic minevaluation problems on the Witwatersrand. – *J. Chem. Metall and Min. Soc. South Africa*, 1951 52, 6, 119-39.
- Labat, D., Ababou, R., Mangin, A. Nonlinearity and nonstationarity in rainfall-runoff relations for karstic springs. To appear in: *Proceedings of XXVIII Congress of I.A.H.R. (Graz-Austria)*, 1999; Reprint in S.E.R.R.A.
- Levy, P. 1925. *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 350 p.
- Mandelbrot, B. 1960. *The Pareto-Levy random function and the multiplicative variation of income*. Yorktown Height, N. Y., IBM Research Center Rept.
- Matheron, G. 1971. *The Theory of Regionalised Variables and its Applications*. Cahier No. 5, Centre de Morphologie Mathematique de Fontainebleau.