

ИЗСЛЕДВАНЕ РАВНОВЕСИЕТО НА СИСТЕМА ОТ ТРИ ТЕЛА С MATHCAD

Асен Стоянов

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, asen_dragomirov@mail.bg

РЕЗЮМЕ. Решена е конкретна задача с пакета MathCAD, като първоначално са получени аналитичните изрази на десните страни на системата от единадесет независими относно неизвестните уравнения, а след въвеждане на изходните данни са получени и съответните числени резултати.

STUDY OF EQUILIBRIUM SYSTEM OF THREE UNITS WITH A MATHCAD

Asen Stoyanov

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, asen_dragomirov@mail.bg

ABSTRACT. Specific task is solved with the MathCAD package as originally received the analytical expressions of the right sides of the system of eleven independent equations on the unknown, and then introducing the output data are derived and corresponding numerical results.

Въведение

Класическото решение на системата от три тела, подложени на силово въздействие, в теоретичната механика предполага прилагането на принципа на тоталното разчленяване и заместване на отстранените връзки с техните реакции. При това извършваните пресмятания върху отделните елементи се реализират в последователност обратна на реда на построяване на ансамбъла, включвайки в себе си и три проверки.

Целта на настоящата работа е да се представи алгоритъм и числено решение за конкретен пример.

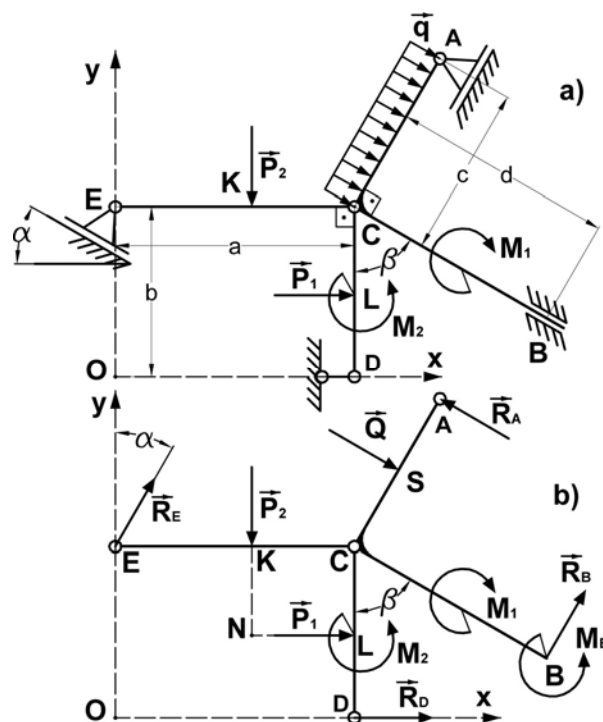
Определяне опорните реакции на равнинна натоварена система от три тела с помощта на MathCAD

За показаната на фиг. 1.a) система се определят опорните реакции при зададени:

$$a = 1,4\text{ m}; b = 1\text{ m}; c = 1\text{ m}; d = 1,3\text{ m}; \alpha = \frac{\pi}{6};$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}; M_1 = 30\text{ kN.m}; M_2 = 20\text{ kN.m}; P_1 = 15\text{ kN}$$

$$P_2 = 30\text{ kN}; q = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}}; Q = 10\text{ kN}.$$



Фиг. 1.
 а) изчислителна схема на системата; б) приложен принцип на освобождаване от външните опорни устройства и замяна със съответни реакции;

Определянето на неизвестните опорни реакции е свързано със съставянето (на ум се прилага принципът на тоталното разчленяване при избраната координатна система) и решаването на системата от единадесет уравнения за равновесие – фиг. 1.b).

Задачата се решава в следния ред:

1. формират се векторите на активните сили, реакциите на връзките и радиус векторите на приложните им точки;
2. формират се в аналитичен вид главните вектори и главните моменти на външните сили за гредите ACB , CD и CE –

$$Pac_b := rA + rC1 + fQ + rB \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} Xc1 + Q.\sin(\beta) + Rb.\cos(\beta) - Ra.\sin(\beta) \\ Yc1 - Q.\cos(\beta) + Rb.\sin(\beta) + Ra.\cos(\beta) \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$McACB := (rc - rc) \times rC1 + (rb - rc) \times rB + mB +$$

$$+ m1 + (rs - rc) \times fQ + (ra - rc) \times rA \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mb - M1 - \frac{Q.c}{2} + Ra.c + Rb.d \end{pmatrix};$$

$$Pcd := rD + p1 + rC2 \rightarrow \begin{pmatrix} P1 + Rd + Xc2 \\ Yc2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$McCD := (rd - rc) \times rD + (rl - rc) \times p1 + m2 +$$

$$(rc - rc) \times rC2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M2 + 0,52.P1.b + Rd.b \end{pmatrix};$$

$$Pce := rE + p2 + rC3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} Xc3 + Re.\sin(\alpha) \\ Yc3 - P2 + Re.\cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$McCE := (re - rc) \times rE + (rk - rc) \times p2 +$$

$$+ (rc - rc) \times rC3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,43.P2.a - 1.Re.a.\cos(\alpha) \end{pmatrix};$$

3. формира се главният вектор на вътрешните сили, действащи в ставата C –

$$PC := rC1 + rC2 + rC3 \rightarrow \begin{pmatrix} Xc1 + Xc2 + Xc3 \\ Yc1 + Yc2 + Yc3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

където:

- $ra, rc, rb, rd, re, rk, rs$ – съответните радиус вектори на приложните точки на силите;

- $fQ, p1, p2, m1, m2, mB, rA, rB, rD, rE, rC1, rC2, rC3$ – натоварването на отделните греди;

- $Xc1, Yc1, Xc2, Yc2, Xc3, Yc3$ – компоненти на реакциите в ставата C за отделните греди;

4. формират се единичните вектори на декартовата координатна система;

5. формира се и изчислява лявата част на уравненията за равновесие –

$$EQ \rightarrow \begin{pmatrix} Xc1 + Q.\sin(\beta) + Rb.\cos(\beta) - Ra.\sin(\beta) \\ P1 + Rd + Xc2 \\ Xc3 + Re.\sin(\alpha) \\ Xc1 + Xc2 + Xc3 \\ Yc1 - Q.\cos(\beta) + Ra.\cos(\beta) + Rb.\sin(\beta) \\ Yc2 \\ Yc3 - P2 - Re.\cos(\alpha) \\ Yc1 + Yc2 + Yc3 \\ Mb - M1 - \frac{Q.c}{2} + Ra.c + Rb.d \\ M2 + Rd.b + 0,52.P1.b \\ 0,43.P2.a - 1.Re.a.\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

6. въвеждат се изходните данни за численото решение и се задава началното приближение за неизвестните реакции;

7. задава се началото на блока за решаване на системата уравнения Given (Бертяев, В., Любенов, П.) и се формира системата уравнения за равновесие посредством операциите Copy/Paste;

Given

$$\begin{pmatrix} Xc1 + Q.\sin(\beta) + Rb.\cos(\beta) - Ra.\sin(\beta) \\ P1 + Rd + Xc2 \\ Xc3 + Re.\sin(\alpha) \\ Xc1 + Xc2 + Xc3 \\ Yc1 - Q.\cos(\beta) + Ra.\cos(\beta) + Rb.\sin(\beta) \\ Yc2 \\ Yc3 - P2 - Re.\cos(\alpha) \\ Yc1 + Yc2 + Yc3 \\ Mb - M1 - \frac{Q.c}{2} + Ra.c + Rb.d \\ M2 + Rd.b + 0,52.P1.b \\ 0,43.P2.a - 1.Re.a.\cos(\alpha) \end{pmatrix} = 0$$

8. неизвестните опорни реакции се определят с помощта на процедурата Find (Бертяев, В.,

Любенов, Л.), като последната е крайт на блока за решаване на системата;

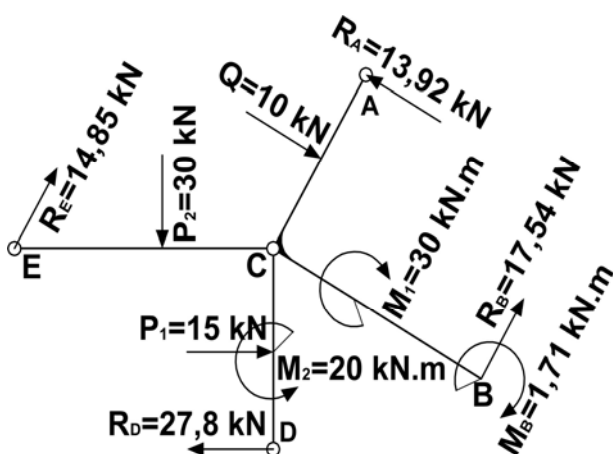
- изчисляват се модулите на реакциите и тяхната ориентация в пространството (Стоянов, А. 2014г.);
- извършва се проверка за верността на получените резултати;

$$\begin{pmatrix} Ra \\ Rb \\ Mb \\ Rd \\ Re \\ Xc1 \\ Yc1 \\ Xc2 \\ Yc2 \\ Xc3 \\ Yc3 \end{pmatrix} := \text{Find} \left(\begin{pmatrix} Ra \\ Rb \\ Mb \\ Rd \\ Re \\ Xc1 \\ Yc1 \\ Xc2 \\ Yc2 \\ Xc3 \\ Yc3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} Ra \\ Rb \\ Mb \\ Rd \\ Re \\ Xc1 \\ Yc1 \\ Xc2 \\ Yc2 \\ Xc3 \\ Yc3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13,92 \\ 17,54 \\ -1,71 \\ -27,8 \\ 14,85 \\ -5,38 \\ -17,14 \\ 12,8 \\ 0 \\ -7,42 \\ 17,14 \end{pmatrix} ; \right.$$

$$Mn = 0; Mn = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8,926 \cdot 10^{-14} \end{pmatrix}.$$

С точност, обезпечена от числения метод, задачата е решена вярно.

На фиг. 2. са показани действителните посоки на външните за системата реакции на опорните устройства.



Фиг. 2. Натоварената система с действителните посоки на външните реактивни усилия

Заклучение

Представеното изследване, в което системата от уравнения е решена с блока Given-Find, демонстрира бързина и простота – отпада необходимостта от спазване на последователност при пресмятанята по класическия метод, както и от двете междинни проверки (виж въведението).

С помощта на пакета Mathcad могат да се решават задачи, както от областта на абсолютно твърдите, така и от областта на деформируемите тела.

Възможността за интеграция между MathCAD и други мощни системи за автоматизация на изчисления процес като MATLAB и Excel предоставя незаменим инструмент за решаване на сложни системи от инженерната практика (Бертяев В.).

Пресмятането на многозвенни конструкции с помощта на блока Given-Find не изисква специални знания по програмиране и матрична алгебра, но в същото време ограничава информацията, свързана с изследванията на намерените решения на уравненията за равновесие.

Прилагането на матричните методи при решаването на система линейни алгебрични уравнения позволява изследването на намерените величини в пълен обем. Така например може да се изследва влиянието на геометричните параметри на гредите върху големините на реакциите и да се намери областта на техните допустими стойности. Авторът ще разгледа тези въпроси в бъдеща публикация.

Литература

- Бертяев, В., Теоретическа механика на базе Mathcad практикум, „БХВ–Петербург”, Санкт–Петербург, 2005 г., 739 стр.
- Любенов, Л., Малчева-Якова, С. *Използването на MathCAD за решаване на инженерни задачи*. Научна конференция с международно участие ВСУ 2008, София, България, том II, стр. IX-72 ÷76.
- Стоянов, А. 2014г. Изследване равновесието на тяло, натоварено с равнинна система сили, посредством Mathcad, XVI-та международна научна конференция „Управление и устойчиво развитие” 21-23/03/2014 г., Юндола.
- Стоянов, А. 2014г. Изследване равновесието на равнинна система от две тела с Mathcad, XIV Международна научна конференция ВСУ 2014г., 5-6/06/2014 г.

Статията е препоръчана за публикуване от кат. „Техническа механика“.