

## ДВИЖЕНИЕ НА ЧАСТИЦА ПО ВЕРТИКАЛЕН ЦИЛИНДРИЧЕН КОЖУХ НА ЦЕНТРОБЕЖНО-РОЛКОВА МЕЛНИЦА В ЦИЛИНДРИЧНА КООРДИНАТНА СИСТЕМА

**Симеон Сезонов**

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, [sezonov\\_si@abv.bg](mailto:sezonov_si@abv.bg)

**РЕЗЮМЕ.** Получени са уравнения в цилиндрична координатна система за движение на частица руда по вертикален цилиндричен кожух. За решаване на нелинейните диференциални уравнения се предлага един итерационен метод. Описан е подробен алгоритъм за определяне на траекторията и компонентите на относителната скорост и ускорение. За по-голяма яснота алгоритъмът е илюстриран на две блок схеми.

**Ключови думи:** центробежно-ролкова мелница, поведение на частиците, метод на Рунге-Кута.

### MOUVEMENT OF PARTICLE IN A VERTICAL CYLINDRICAL HOUSING OF CENTRIFUGAL-ROLLER MILL IN THE CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

**Simeon Sezonov**

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, [sezonov\\_si@abv.bg](mailto:sezonov_si@abv.bg)

**ABSTRACT.** Equations are derived for the motion of ore particle in a vertical cylindrical housing of centrifugal-roller mill in the cylindrical coordinate system. In order to solve the nonlinear differential equations we provide an iteration method. A detailed algorithm is described for determining the trajectory, the components of the relative velocity and acceleration. To better imagine the process it is illustrated on two block diagrams.

**Key words:** centrifugal – roller mill, behavior of the particles, method of Runge-Kutta.

### Увод

Центробежно-ролковите мелници са перспективни рудоподготвителни машини, които намират широко приложение при преработката на минерални суровини. За да се оптимизира смилането в тях, е необходимо да бъде изучено движението на частиците руда в работното пространство на машината. Освен това центробежните сили, използвани за налягането и смилането на частиците, могат да бъдат многократно по-големи от гравитационните сили. При тях материалът се смачква между неподвижния кожух и бързо въртящите се ролки.

Тези машини се отличават с по-добри енергетични показатели, по-голяма производителност и заемат по-малко пространство в сравнение с класическите топкови.

Задачата за определяне на движението на частиците руда по цилиндричен кожух на центробежно-ролкова мелница и математическото описание на движението на рудата е решена с метода на Рунге-Кута в декартова координатна система (Сезонов С., 2013).

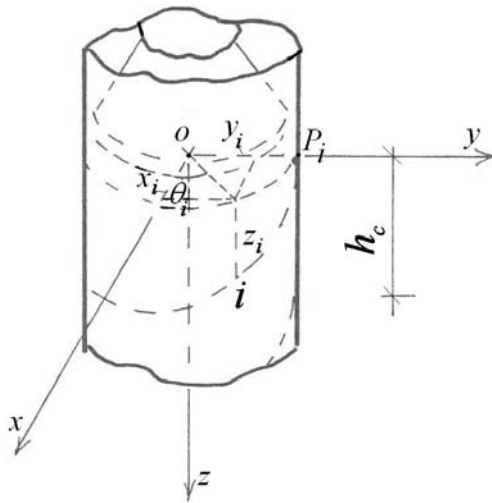
Целта на това изследване е да се извърши задълбочен анализ и да се развие теорията на движението на смиланата частица, за да се предоставят на вниманието

на технолозите и механиците в обогатителните фабрики. В настоящата работа се извеждат диференциалните уравнения за движение на частица от смиланата руда по вертикален цилиндричен кожух без наличие на вибрации в цилиндрична координатна система. Даден е план за решаване на траекторията, скоростта и ускорението на движението на частица руда по кожуха.

### Изложение

#### 1. Диференциални уравнения за движение в цилиндрична координатна система

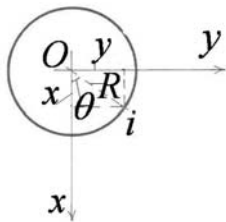
Разглежда се движението на материална частица от смилания материал, като се допуска, че няма лъкатушене. На фиг.1 е дадена частица в произволен момент от движение по вертикален цилиндричен кожух. Движението на частицата руда по кожуха е спираловидно. Въвежда се координатна система  $Oxyz$  с начало  $O \equiv C$  ( $C$  – център на напречното сечение на кожуха). Вертикалната ос на цилиндъра съвпада с ос  $Oz$ . Приема се, че положението на точка  $P_i$  в произволен момент от време има координати  $x, y, z$ .



Фиг. 1. Траектория на точка върху цилиндричен кожух

Въвежда се цилиндрична координатна система, като оста на ротация се запазва. Декартовите координати в хоризонталната равнина имат вида (фиг.2):

$$x = R \cos \theta; \quad y = R \sin \theta. \quad (1)$$



Фиг. 2. Проекция на траекторията на точка върху  $Oxy$ .

Компонентите на скоростта и ускорението имат вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -R\dot{\theta} \sin \theta; & \dot{y} &= R\dot{\theta} \cos \theta; \\ \ddot{x} &= -R(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta); & & \\ \ddot{y} &= -R(-\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta). & & \end{aligned} \quad (2)$$

Системата уравнения за движение в декартови координати е:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\omega^2 R \mu \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 R^2 + \dot{z}^2 (R^2 - x^2)}} + \\ \frac{2\omega R^2 \mu (\dot{x})^3}{\dot{x}^2 R^2 + \dot{z}^2 (R^2 - x^2)} = 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$(\ddot{z} + g)\dot{x} - \dot{x}\dot{z} = 0.$$

Променливите в тези уравнения са подробно описани в (Сезонов С., 2013). Заместват се (1) и (2) в (3) и системата уравнения в цилиндрична координатна система придобива вида:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\dot{\theta}^2 \cot g \theta - \frac{2\omega \mu R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta}{\dot{\theta}^2 R^2 + \dot{z}^2} \\ &- \frac{\omega^2 R^2 \mu \dot{\theta}}{\sqrt{\dot{\theta}^2 R^2 + \dot{z}^2}}; \\ \ddot{z} + g &= -\dot{z} \left( \dot{\theta} \cot g \theta - \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Движение на точка по цилиндричен кожух

Разглежда се движението на точка, когато компонентата на относителната скорост по вертикалата е постоянна  $\dot{z} = c$ . Тогава  $\ddot{z} = 0$ , а второто уравнение на системата (4) приема вида:

$$\ddot{\theta} = -\dot{\theta}^2 \cot g \theta - \frac{g}{c} \dot{\theta}. \quad (5)$$

Замества се горният израз заедно с приетата постоянна компонента на скоростта по вертикалата в първото уравнение на системата (4). Предполага се, че  $\dot{\theta} \neq 0$ , и уравнението се разделя на  $\dot{\theta}$ . След това се подвежда под общ знаменател и се повдигат на квадрат двете страни на равенството. След преработка се получава

$$A_1 \dot{\theta}^4 + A_2 \dot{\theta}^2 + A_3 = 0. \quad (6)$$

Изразите пред производната на ъгловата координата от четвърта степен, втора степен и свободния член на горното уравнение са:

$$\begin{aligned} A_1 &= (A_4 - A_5 \sin^2 \theta)^2 [m^4 / s^2]; \\ A_2 &= R^2 (A_6 - A_7 \sin^2 \theta) [m^4 / s^4]; \\ A_3 &= A_3^* = c^2 (g^2 - \omega^2 R^2 \mu^2) [m^4 / s^6], \end{aligned} \quad (7)$$

където

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{g}{c}; & A_5 &= 2\omega \mu; \\ A_6 &= 2g^2 - \omega^4 R^2 \mu^2; & A_7 &= 4g\omega \mu c. \end{aligned}$$

Решението на уравнение (6) има вида:

$$\dot{\theta} = A_8 = \sqrt{\frac{A_2^2 - 4A_1 A_3}{2A_1}}. \quad (8)$$

## 3. Приближителен метод за определяне на кинематичните зависимости

За числено решаване на (8) се прилага методът на Рунге-Кута. Теоретичните постановки на метода могат да се видят в трудовете на Ралстон (Ralston) и Копал (Kopal). Според тях уравнението се записва във вида:

$$\dot{\theta}_i = A_{8,j}^i; \rightarrow i = 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (9)$$

където  $n$  е общият брой на точките.

Решението се дава с израза:

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{\Delta t}{6} (k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i), \quad (10)$$

където

$$\begin{aligned} k_{j+1}^i &= A_{8,j}^i; \quad A_{8,j}^i = \sqrt{\frac{-A_{2,j}^i + A_{9,j}^i}{2A_{1,j}^i}}; \\ A_{1,0}^i &= A_4 - A_5 \sin^2 \theta_i; \quad A_{1,1}^i = A_4 - A_5 \sin^2 \theta_{k_1}^i; \\ A_{1,2}^i &= A_4 - A_5 \sin^2 \theta_{k_2}^i; \quad A_{1,3}^i = A_4 - A_5 \sin^2 \theta_{k_3}^i; \\ \theta_{k_1}^i &= \theta_i + 0,5k_1^i; \quad \theta_{k_2}^i = \theta_i + 0,5k_2^i; \quad \theta_{k_3}^i = \theta_i + k_3^i; \\ A_{2,0}^i &= R^2 [A_6 - A_7 \sin^2 \theta_i]; \\ A_{2,1}^i &= R^2 [A_6 - A_7 \sin^2 \theta_{k_1}^i]; \\ A_{2,2}^i &= R^2 [A_6 - A_7 \sin^2 \theta_{k_2}^i]; \\ A_{2,3}^i &= R^2 [A_6 - A_7 \sin^2 \theta_{k_3}^i]; \\ A_{9,j}^i &= \sqrt{(A_{2,j}^i)^2 - 4A_{1,j}^i A_3^*}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ъгловата координата на точка  $i + 1$  се определя от (10), а останалите цилиндрични координати са:

$$r_{i+1} = R; \quad z_{i+1} = z_i + \dot{z}_i \Delta t. \quad (12)$$

Големините на векторите на относителната скорост и ускорение в цилиндрична координатна система се определят от изразите:

$$\begin{aligned} v_r &= \sqrt{\dot{\theta}^2 R^2 + \dot{z}^2}; \\ a_r &= \sqrt{R^4 (\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2) + \ddot{z}^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

където

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= A_{8,j}^i; \quad \dot{z}_{i+1} = c; \\ \ddot{\theta}_{i+1} &= \frac{\dot{\theta}_{i+1} - \dot{\theta}_i}{\Delta t}; \quad \ddot{z} = 0. \end{aligned}$$

Декартовите координати на точката се определят от:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= R \cos \theta_{i+1}; \\ y_{i+1} &= R \sin \theta_{i+1}; \\ z_{i+1} &= z_i + \dot{z}_i \Delta t. \end{aligned} \quad (14)$$

Траекторията е спираловидна по цилиндрична повърхнина със стъпка (фиг.1), която се определя от израза  $h_c = \frac{2\rho c}{\omega}$ .

Декартовите компоненти на скоростта и ускорението, както и големините на векторите на скоростта и ускорението се определят от:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i+1} &= -R \dot{\theta}_{i+1} \sin \theta_{i+1}; \\ \dot{y}_{i+1} &= R \dot{\theta}_{i+1} \cos \theta_{i+1}; \\ \dot{z}_{i+1} &= c; \\ \ddot{x}_{i+1} &= -R [\dot{\theta}_{i+1}^2 \cos \theta_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \sin \theta_{i+1}]; \\ \ddot{y}_{i+1} &= -R [\dot{\theta}_{i+1}^2 \sin \theta_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1} \cos \theta_{i+1}]; \\ \ddot{z} &= 0; \\ v_r &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \\ a_r &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

В резултат на проведеното изследване е получен законът за движение на частицата руда в цилиндрична координатна система.

#### 4. Алгоритъм за решаване

Получените изрази участват в алгоритъма на метода. Той се състои от следните стъпки:

1. Задават се стойностите на  $c$ ,  $\omega$ ,  $R$ ,  $g$  и  $\mu$  и се определят коефициентите  $A_3 - A_7$  от (7).

2. Задава се началната стойност на ъгъла  $\theta^\circ$  и нарастването на времето  $\Delta t$ , и общият брой точки  $n$ .

3. Номерът на точката е  $i = 1$ .

4. Определяне на коефициентите при нарастване на променливата  $j$  (цикъл по  $j$ ).

4а) Полага се  $j = 0$ .

4б) Изчисляват се  $A_{1,j}^i$ ,  $A_{2,j}^i$ ,  $A_{8,j}^i$ ,  $A_{9,j}^i$ ,  $k_{j+1}^i$  от (11).

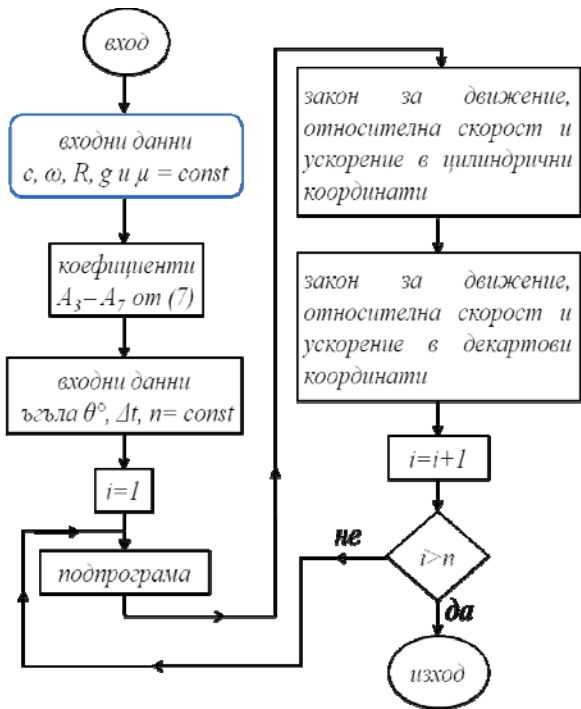
4в) Променливата  $j$  нараства с 1. Ако е по-малка от 4, то се преминава към 4б.

4г) Ако  $j > 3$ , то се слага край на цикъла. Изчислява се  $\theta_{i+1}$  от (10).

5. Изчисляват се изразите (12-15).

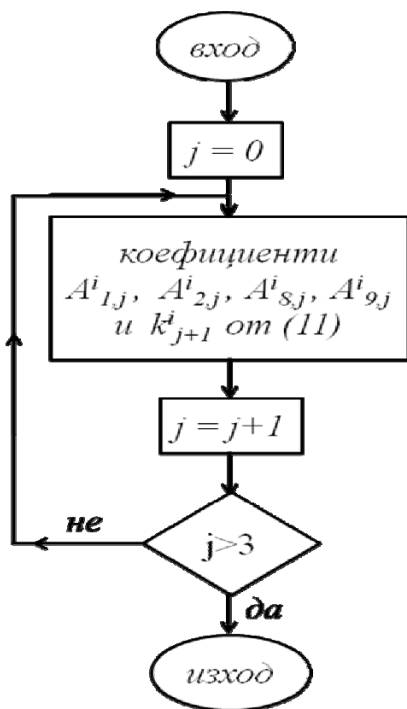
6. Увеличава се номерът на точката с 1 ( $i = i + 1$ ). Ако  $i > n$ , то се слага край. В противен случай се преминава към точка 4 от алгоритъма.

Предложеният алгоритъм е илюстриран на фиг. 3а и фиг. 3б.



Фиг. 3а. Главна блок схема на алгоритъма за решаване

Главната блок схема описва стъпките на алгоритъма за решаване от 1 до 4.



Фиг. 3б. Блок схема на подпрограмата

Подпрограмата описва итерацията за следваща точка  $i = 2$  и стъпките на алгоритъма за решаване са от 4а до 5.

Решението по описания алгоритъм може да се реализира ръчно или с помощта на специално съставена програма. Вторият подход е прилаган при други практически задачи (Buchvarov St., Poulev St., Kunchev L.), (Пулев С. Н.), (Бъчваров С. Н., Кунчев Л. П., Пулев Ст. Н.). В тях числено са изследвани трептенията в машинни елементи.

## Заклучение

Получени са диференциални уравнения за движение на смилещата частица по вертикалния кожух на машината в цилиндрична координатна система. Решението на диференциалното уравнение е направено по метода на Рунге-Кута. Подробно е описан алгоритъм за числено решаване.

Този математически модел за кинематичен анализ на движението се отличава с простота. Получените кинематични величини участват при управлението на работния процес на машината.

Предлаганият метод може да улесни технолозите и механиците в тяхната практическа работа.

## Литература

- Сезонов С. 2013, Изследване на процесите в нова конструкция на центробежно-ролкова мелница, Доклади XIII Международна научна конференция ВСУ 6-7 юни, С., Том I, I-106-I-111, ISSN: 1314 - 071X .
- Buchvarov St., Poulev St., Kunchev L., Theoretical Study on vertical Vibration of an Internal Combustion Engine, "Theoretical and Applied Mechanics", №1-2, 1994-95, 34-39.
- Бъчваров С. Н., Кунчев Л. П., Пулев Ст. Н., 1991, Симуляционен модел за числено изследване на трептенията в трансмисията на автомобила при потегляне, Втора научно-техническа сесия с международно участие, ВВТУ „Тодор Каблешков“ София, 28-29 ноември, 220-225.
- Пулев С. Н., 1998, Числено изследване на самовъзбуждащите се трептения в триещия съединител на автомобила, Машиностроение, № 1-2, 9-10.
- Ralston A., 1962, Ringe - Kutta Methods with Minimum Error Bounds. Math. Comput., vol16 pp431-437.
- Kopal Z., 1955, Numerical Analysis, New York, Wiley.

Статията е препоръчана за публикуване от кат. „Техническа механика“.