

## МАТЕМАТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ НА ПРОЦЕСИТЕ ПРИ УДАРНО – ВИБРАЦИОННИТЕ МАШИНИ

**Юлиян Димитров, Кристиан Цветков, Живко Илиев**

*Минно-геоложки университет "Св.Ив.Рилски", 1700 София, juldim@abv.bg, kho@mgu.bg*

**РЕЗЮМЕ.** Прилагането на аналитични методи в проектирането на вибрационни машини среща определени проблеми, при опит да се получи по-голяма прецизност. Оказва се, че тези проблеми са от решаващо значение при изучаването на ударно – вибрационните процеси. Статията обсъжда основните модели и параметри на процесите при ударно-вибрационните машини.

### MATEMATICAL MODELING OF PROCESSES IN SHOCK – VIBRATION MACHINES

**Julian Dimitrov, Kristian Tsvetkov, Zhivko Iliev**

*University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, juldim@abv.bg, kho@mgu.bg*

**ABSTRACT.** The application of analytical methods in design of vibration machines encountered problems when trying to obtain greater precision. It turns out that these problems are critical in studying the shock – vibration processes. The paper discussed the main models and parameters of the process of shock – vibration machines

### Увод

При вибрационните машини основна роля има ударно-вибрационният процес. Представя се с модела на ударно-вибрационна система (Миклашевский, Мельгунов, 1960, Быховский, 1968, Вайсберг и др., 2004). Пример на такъв процес има при използване на виброчук, при уплътнение на почви с вибрационна трамбовка и при задвижване на вибрационния конвейер.

Ударно-вибрационните процеси могат да бъдат и вредни. Като пример може да се дадат случаите, при които вибрациите водят до разрушаване на корпуса на машината или на фундамента, на който са монтирани.

Ударът е такова взаимодействие на две тела, при което се възпроизвежда бързо изменение на някоя от механичните величини, характеризираща движението на телата. Възприета е класификация на мигновеното явление (удар):

- при удар от първи род скоростта има прекъсване;
- при удар от втори род втората производна на преместването (ускорението) претърпява прекъсване и т.н.

Вибрационните машини имат различни приложения и в зависимост от това, съответна конструкция. Намират приложение при строителството и производството на строителни материали, при добива и преработката на полезни изкопаеми и др. Използват се: при транспортиране на материали като вибро-транспортъори; за разтоварване на материали – вибрационни разтоварващи

машини; за раздробяване на твърди материали – вибрационни трошачки; за смилане на твърди материали – вибрационни мелници; за пробиване на тунели или анкерни дупки.

Конструкцията на вибрационната машина е съобразена с нейното предназначение и като цяло има най-различни принципни схеми на вибрационни машини (Миклашевский, 1960). Основно в принципната схема участва еластичен елемент (пружина) и дисипативен елемент (демпфер) и загубата на енергия в системата се представя с дисипативния елемент.

### Основни принципи на динамичното деформиране и разрушаване на скалата

Механичният метод на разрушаване и пробиване на скалата най-често е чрез въртливо и ударно въздействие на работния инструмент. Приема се, че процесът на пробиване се подчинява на енергетичен закон за разрушаване на твърдото тяло. Изводът е, че по размера на частиците, които се образуват в процеса на разрушаване на скалата, може да се съди за ефективността на работата на машината. Колкото по-малки са частиците, които се отделят, толкова по-неефективен е процесът, понеже енергията отива за раздробяване на излишно малки частици с голяма обща площ. Преодоляването на този ефект частично се постига с използването на специфична форма на работния инструмент – форма на лопатки на работното тяло. През

1952 г. Ф. Бонд е предложил кинетичен модел на разрушаването на късове материал с неправилна форма. Натиското усилие, приложено към късовете от материала, ги раздробява, като площта на раздробените частици е пропорционална на якостта на материала. Ако напрежението, възникнало в дадена точка, превъзхожда разрушаващото напрежение, то се образува пукнатина. Енергията се превръща в работа, изразходвана за развитие на пукнатината, което води до разрушаване на материала. Понеже границата на еластичност на трошлив материал е равна на границата на якостта му, то преди образуването на първата пукнатина, енергията необходима за разрушаване на материала, се натрупва във вид на енергия на еластични напрежения. Ако натискотата сила е приложена извънредно бързо, което се случва при вибрационно въздействие, то пукнатината се появява преди в материала да е установено равновесно разпределение на енергията. Като резултат се реализира намаляване на количеството енергия, необходимо за разрушаване на материала. Тази теория не отчита пластичните ефекти, но предложеният модел на динамиката на разпространение на пукнатините има важно принципно значение. Много други, по-късно формулирани теории уточняват процеса на разрушение на материала при ударно въздействие.

За получаване на представа за ефекта от внедряването на работния инструмент разглеждаме плосък, кръгъл щамп. Съгласно Щрейнер (1950) разпределението на натиска в равнината на контакт е неравномерно само в началото. След това може да бъде прието равномерно разпределение  $p = \frac{P}{\pi a^2}$ , където

$$p = \frac{P}{\pi a^2}, \text{ където}$$

$P$  е силата на натиска на щампа;  $a$  - радиусът на щампа.

Преместването на щампа се определя от формулите:

$$\delta = \frac{P(1-\mu^2)}{2aE} \text{ за неравномерен натиск и}$$

$$\delta = 0.54 \frac{P(1-\mu^2)}{aE} \text{ за равномерен натиск. Тук } \mu \text{ е}$$

коефициентът на Поасон и  $E$  - модулът на Юнг.

При въздействието на елементите на работния инструмент обработваната скална повърхност преминава в гранично състояние, като достига натиск  $\sigma_{i \max}$  при нормален натиск по контакта  $p$  (Спивак, 1979).

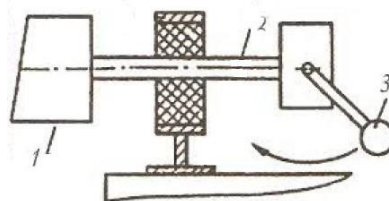
$\sigma_{i \max} = K p$ , където  $K$  е максималната относителна интензивност на тангенциалните напрежения. В Спивак (1979) са дадени стойности на параметъра  $K$  за различни форми на щампа и при число на Поасон на скалата  $\mu = 0.25$ .

В Цветков, Димитров (2012) са представени основни принципни схеми на действие на работния инструмент. Чрез сравнителен анализ на ефекта от въздействието при различни форми на елемента на работния инструмент се определя най-подходящата форма и минималното натоварване за преминаване в гранично състояние на обработваната повърхност.

## Схема на ударно-вибрационен механизъм

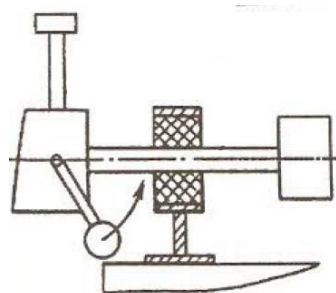
На фиг. 1 е представена принципна схема на ударно-вибрационен механизъм, който има следните елементи:

- 1 – работно тяло;
- 2 – вълновод;
- 3 – дебалансен вибратор.



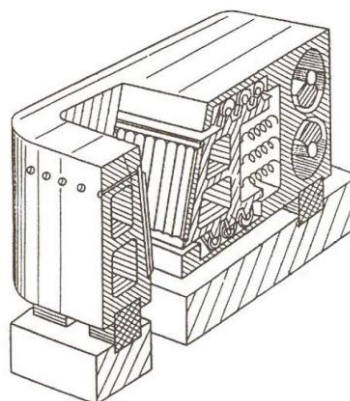
Фиг. 1: Принципна схема на ударно-вибрационен механизъм

На фиг. 2 е представен специален ударно-вибрационен механизъм, при който вибраторът е монтиран непосредствено в работното тяло и за реализиране на вълновия процес се използват вертикален и хоризонтален резонансни вълноводи.



Фиг. 2: Принципна схема на ударно-вибрационен механизъм с вертикален и хоризонтален резонансни вълноводи

От представените схеми на ударно-вибрационен механизъм може да се направи извода, че една необходима, съществена част е вълноводът. Една от задачите в тази работа е представяне на процеса на пренасяне на ударния импулс във вълновода. Моделът описва пренасянето и отразяването на вибрационните вълни. Друг важен процес е взаимодействието на работния елемент с обработвания материал. Този процес се представя чрез линеен модел на ударно-вибрационна система.



Фиг. 3: Ударно-вибрационна челюстна трошачка

Представената на фиг.3 ударно – вибрационна челюстна трошачка е с вградени в един корпус вибратори, вълновод и челюсти.

## Математически модел на пренасяне на ударния импулс

Процесът на пренасяне по вълновода на ударния импулс може да бъде описан чрез вълново уравнение като функция на времето. Ефективността при разрушение на ударния инструмент се определя от формата, максималната амплитуда и продължителност на импулса.

Общи принципи и модели на удара са представени в Димитров и Цветков (2011).

Вълновият модел на Сен – Венан отразява достатъчно пълно динамичните процеси при взаимно удрящите се тела. Разглеждаме безкрайно малък елемент на прът, който се движи под действието на сила. Съгласно закона на Нютон е изпълнено  $m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial z} dz$ , където

$m = \rho A dz$  е масата на елемента с дължина  $dz$ ,

$\rho$  - плътността на пръта,

$A$  - лицето на сечението на пръта,

$x$  - преместването по дължината на пръта и

$P$  - осевата сила.

След като се приложи и закона на Хук за еластично тяло, се стига до вълновото уравнение:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

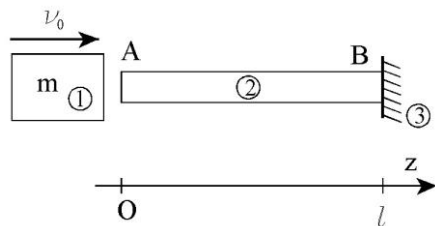
където  $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  е скоростта на разпространение на

вълните на деформацията и  $E$  - модулът на Юнг на пръта.

В Димитров и Цветков (2011) са представени моделите: „Ударен процес при свободен прът” и „Ударен процес при взаимодействие с абсолютно твърдо тяло”.

### Модел на процеса на взаимодействие с обработваната среда

Разглеждаме модел, с твърд, тежък, недеформируем ударник с маса  $m$  и еластичен вълновод (фиг. 4)



Фиг. 4. Схематичен модел с твърд, тежък, недеформируем ударник: 1. – ударник; 2. – вълновод и 3. – обработвана среда

Преместването в сечение  $z$  от пръта е представено като сума на права и обратна вълна:

$$x(z, t) = f(vt - z) + \varphi(vt + z).$$

В сечението на пръта при  $z = 0$  е изпълнено  $-m \frac{\partial^2 x(0, t)}{\partial t^2} + EA \frac{\partial x(0, t)}{\partial z} = 0$ , където  $E$  и  $A$  са съответно модулът на Юнг и сечението на пръта.

Граничните условия при  $z = l$  са

$$EA \frac{\partial x(l, t)}{\partial z} + kx(l, t) = 0, \quad x(l, t) = const, \quad v(l, t) = 0, \quad \frac{\partial x(l, t)}{\partial z} = 0, \quad \text{където } k = \frac{P}{x}$$

Начални условия :

$$x(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial x(0, 0)}{\partial z} = v_0 - \text{скорост в началния момент}$$

$$\text{на удара, } x\left(l, \frac{l}{v}\right) = \frac{\partial x\left(l, \frac{l}{v}\right)}{\partial z} = 0.$$

За правата вълна се получава:

$$f(vt - z) = \frac{v_0 l}{v \alpha} \left[ 1 - e^{-\frac{\alpha}{l}(vt-z)} \right], \quad (2)$$

където  $\alpha = \frac{\rho A l}{m}$  - отношение на масите на вълновода и ударника. За обратната вълна се получава

$$\varphi(vt + z) = \frac{v_0 l}{v \alpha} (1 + \lambda) \left[ e^{-b(vt+z-2l)} - e^{-\frac{\alpha}{l}(vt+z-2l)} \right], \quad (3)$$

където  $b = \frac{k}{EA}$  и  $\lambda = \frac{\alpha + bl}{\alpha - bl}$ .

### Съвместен модел на работното тяло и вълновода

Разглеждаме случая, когато ударният инструмент се състои от ударен прът и конично ударно тяло (Алимов, 1976). В този случай към вълновото уравнение, написано за пръта,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0 \text{ се прибавя и уравнението}$$

$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{2q}{qz-1} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$  за работното тяло. Тук  $x$  е преместването на сечението в точка от пръта и  $y$  - на сечението на ударника.

Уравненията се свързват с:

Начални условия

$$x|_{t=0} = y|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial t}|_{t=0} = \frac{v_0}{a}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}|_{t=0} = 0.$$

Гранични условия

$$\frac{\partial x}{\partial z}|_{z=-L} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z}|_{z=\infty} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial z}|_{z=0} = \frac{\partial y}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad x|_{z=0} = y|_{z=0} = 0.$$

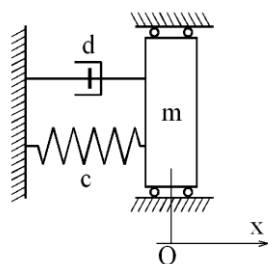
Тук  $z = -L$  е в работната повърхнина на ударника и  $z = \infty$  се отнася за отдалечени от ударника точки на пръта.

При равенство на модулите на еластичност на двете тела отношението на ударната плътност е  $\tau = \frac{F}{F_0}$ ,

където  $F$  е сечението на ударника и  $F_0$  - сечението на пръта.

## Дисипативно съпротивление на обработваната среда

Основен модел, представящ процесите във вибрационните машини е линейна система със дисипативен елемент (фиг.5).



Фиг.5. Принципна схема на линейна вибрационна система

Системата се състои от пружина и демпфер, представени с постоянни коефициенти. При движението на тялото на фиг. 5, на него действат сила на пружината  $C = -cx$  и сила на демпфера  $B = -b\dot{x}$ . По закона на Нютон  $m\ddot{x} = B + C$ , от където получаваме уравнението на движение на системата

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (4)$$

В уравнението участват три константи: масата на тялото -  $m$ , коефициентът на твърдост -  $b$  и коефициентът на еластично съпротивление -  $c$ . Със системата се свързват три вида енергии:

кинетичната енергия на системата -  $T = m \frac{\dot{x}^2}{2}$ ,

потенциалната енергия на пружината -  $\Pi = c \frac{x^2}{2}$  и

разсейваната дисипативна енергия  $D = b \int_0^t \dot{x}^2 dt$ .

Уравнение (4) има решение

$$x = \frac{x_0}{\omega} e^{-ht} \sin \omega t, \quad (5)$$

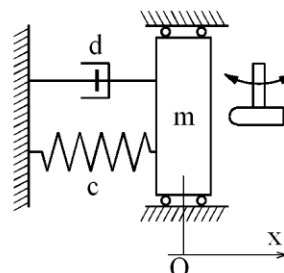
където  $h = \frac{b}{2m}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$  и  $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ .

Разгледаният модел на вибрационния процес може да бъде допълнен, така че да се представи ударно-вибрационния процес на обработка на материала (фиг.6). Като пример можем да дадем разтрошаването при вибрационните челюстни трощачки.

При ударния процес, в периода между два удара е валиден модела представен с уравнение (4). При самия удар на системата се придава кинетична енергия  $K$ , като е в сила равенството

$$\frac{m\dot{x}_+^2}{2} - \frac{m\dot{x}_-^2}{2} = K, \quad (6)$$

където  $\dot{x}_-$  и  $\dot{x}_+$  са съответно скоростите на тялото преди и след удара.



Фиг.6. Принципна схема на линейна ударно-вибрационна система

## Изводи

Основните процеси при работа на ударно - вибрационните машини се моделират с:

- модел на Сен Венан за пренос на ударния импулс;
- модел на линейна вибрационна система представляваща процеса на обработване на материала и
- модели описващи разрушаването на скалите.

Съчетаването на тези модели дава по-голяма прецизност на представянето на процесите при ударно вибрационните машини.

## Литература

- Алимов О. Д., Л. Т. Дворников. 1976. *Бурильные машины*, М. Машиностроение.
- Быховский И.И., 1968. *Основы теории вибрационной техники*, М., Машиностроение.
- Булат А., В. Виноградов, 2002. *Опорно - анкерное крепление горных выработок угольных шахт*, Днепропетровск.
- Вайсберг Л.А., Л.П. Зарогатский, В.Я. Туркин, 2004. *Вибрационные дробилки, Основы расчета, проектирования и технологического применения*, Санкт-Петербург, ВСЕГЕИ.
- Димитров Ю., Кр. Цветков, 2011. Изследване на формата на отразения импулс при чука на Шмид, Годишник МГУ.
- Димитров Ю., Кр. Цветков, 2012. Моделиране на процеса пробиване на анкерна дупка, Годишник МГУ.
- Энштейн Е. Ф., 1939. *Теория бурения - резания горных пород твердыми сплавами*, Л., ГОНТИ.
- Миклашевский Е.П., Н.Ф. Мельгунов, 1960. *Вибрационные строительные машины*, Прфтехиздат.
- Спивак А.И., А. Н. Попов, 1979. *Разрушение горных пород при бурении скважин*, Москва, «Недра».
- Шрейнер Л.А., 1950. *Физические основы механики горных пород*, М. - Л., Гостоптехиздат.