ГОДИШНИК на Минно-геоложкия университет "Св. Иван Рилски", Том 54, Св.III, Механизация, електрификация и автоматизация на мините, 2011
ANNUAL of the University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", Vol. 54, Part III, Mechanization, electrification and automation in mines, 2011

# АНАЛИТИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА МЕХАНИЧНИТЕ ПАРАМЕТРИ НА ТРИЕЩА СЕ ПОВЪРХНОСТ

***Юлиян Димитров***

*Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, E-mail: juldim.abv.bg*

**РЕЗЮМЕ.** Процесите при триещи се повърхности играят важна раля при някои основни механизми и машинни елементи, като: спирачни системи; шлайф машини; лагери; железопътни системи и др.
В литературата съществуват голям брой различни модели на контактно триене. Разглеждаме модел на контактно съпротивително взаимодействие на елестични тела.
Систематизирани са основни параметри на процеса на триене. Направено е приложение при описване на модела на тестовете на изтегляне на анкери закрепени по цялата дължина.

**ANALYTICAL STUDY OF MECHANICAL PARAMETERS OF FRICTIONAL SURFICE**

***Julian Dimitrov***

***University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, E-mail: juldim.abv.bg***

**ABSTRACT.** Processes in the friction surfaces have an important role in some basic mechanisms and machine parts as: brake system; grinding machine; bearings; wheel-rail systems and others.
In literature there are many different models of contact friction. We consider a model of contact resistance interaction between elastic bodies.
The basic parameters of the process of friction are systematized. An application is made for model of pullout tests of fully grouted rock bolts.

## Въведение

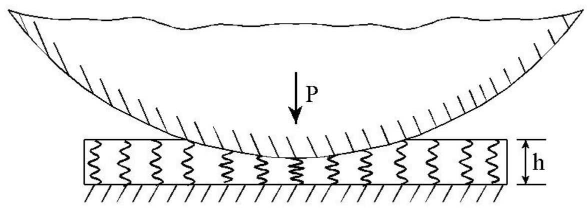
Процесите при триещи се повърхности играят важна раля при някои основни механизми и машинни елементи, като: спирачни системи; шлайф машини; лагери; железопътни системи и др. В литературата съществуват голям брой различни модели на контактно триене. Разглеждаме модел на контактно съпротивително взаимодействие на елестични тела.

Разпределението на фрикционния контакт зависи от:
1. Размера на областта на контакта;
2. Тип на нормалната контактна сила – статична или динамична;
3. Условия на контакт в нормално направление – херцов нормален контакт или нехерцов контакт;
4. Преместване в тангенциално направление – микро или макро пълзене.

Условията на контакт, удовлетворяващи теорията на Херц, съгласно Jonson (1989):
1. Повърхностите на контактуващите тела са гладки и несъгласувани (не съвпадат);
2. Деформациите са малки;
3. Всяко от контактуващите тела може да се разглежда като еластично полупространство;
4. Триенето между повърхнините е минимално.

При определяне на контактните напрежения, в рамките на теорията на еластичността, преместването на произволна точка от повърхността на контакт зависи от разпределението на контактния натиск.

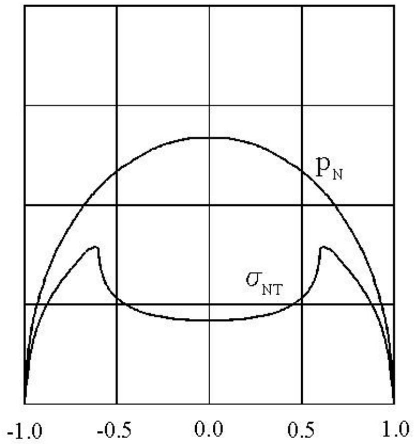
Определянето на параметрите на контактния процес води до решаването на интегрални уравнения. Моделът се опростява като едното от контактните тела се разглежда като еластична основа (Johnson, 1989) (фиг. 1). В този модел контактния натиск във всяка точка зависи само от преместването на точката. Областта на контакт се разглежда като вътрешната част на елипса.




**Фиг. 1. Схема на еластичния модел**

Приема се, че размерът на контактуващите тела е значително по-голям от размера на контактната зона. Деформациите причинени от контакта са малки и телата могат да се разглеждат като безкрайна еластична среда.

Съгласно Sextro (2007) при херцов кантакт и краен коефициент на съпротивление се получава разпределение на нормалния натиск $p_N$ и тангенциално сцепление $\sigma_{NT}$ както схематично е представетно на фиг. 2.



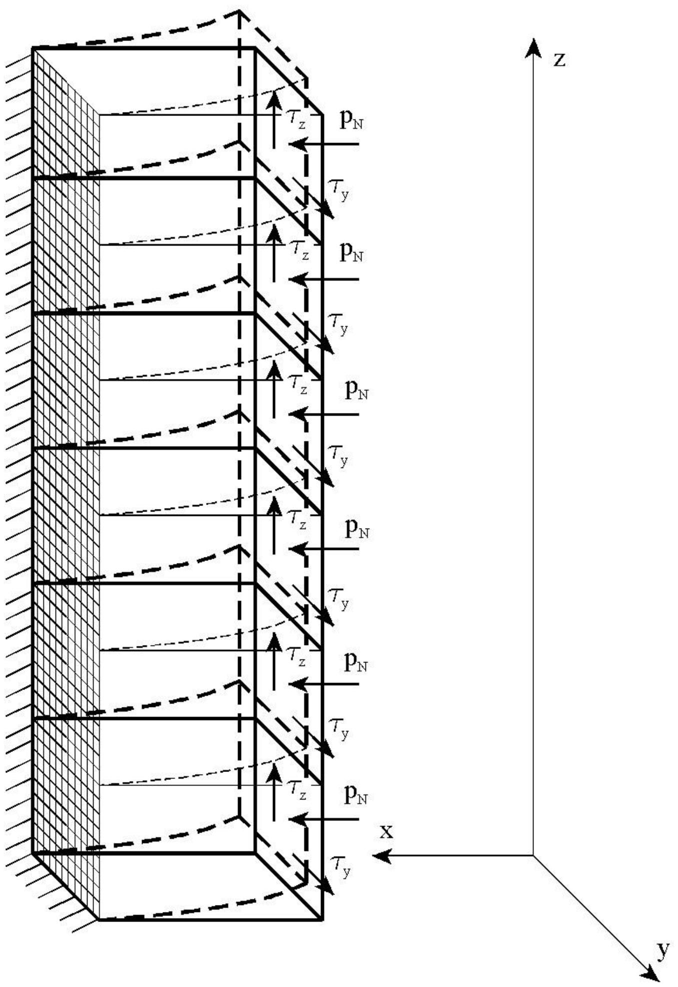

**Фиг. 2. Нормален натиск и тангенциално сцепление по главен диаметър на елипсата на контакт**

## Модел на контактната повърхнина

**Дискретизиран модел на контактната повърхност**

Приема се, че контактният елемент е закрепен кинематично. Разглежда се динамична система, при която основен е фрикционния контакт. Съгласно Sextro (2007) динамичният модел на фрикционния контак се представя чрез еластична основа, наречена „тънък еластичен контакт” (фиг. 3).

Моделът се представя дискретно, чрез моделни елементи (тела) с форма на паралелепипед с параметри: ширина $\Delta h_0$, дълбочина $\Delta b_0$ и височина $l_0$ равна на ширината на еластичната основа. Елементарната (моделна) контактна площ е с лице $\Delta A_0 = \Delta b_0 \cdot \Delta h_0$. Приема се постоянен нормален контактен натиск $p_N$. Компонентите на напрежението при приплъзване в направления $y$ и $z$, съответно са $\tau_y$ и $\tau_z$.




**Фиг. 3. Недеформирана и деформирана, контактна повърхност**

Контактните елементи на модела имат едно и също механично поведение. Деформиращата се контактна повърхнина остава в равнината $Oyz$.

***Геометрични параметри на модела***

$l_0$, $l$ - ширина на еластичната основа (по оста $x$);

$\Delta h_0$ - ширина на дискретния (моделния) елемент (по $z$);

$\Delta b_0$ - дълбочина на дискретния елемент (по $y$).

*Механични параметри*

$p_N$ - нормален контактен натиск;

$\tau_y$, $\tau_z$ - напрежения при приплъзване;

$(p_N, \tau_y, \tau_z)$ - контактен натиск;

$(u_P, v_P, w_P)$ - преместване на контактната повърхност.

...При експериментално изучаване на процеса информацията за нормална и тангенциална коравина на контакта се получава от измерване.

**Три модела на теория на тънките контакти**

Напреженията при приплъзване са $\sigma_{xy} = G\dfrac{dv}{dx}$, $\sigma_{xz} = G\dfrac{dw}{dx}$.

Приема се, че преместванията в направление на $y$ и $z$, са съответно $v = const$ и $w = const$

$\dfrac{dv}{dz} = \dfrac{dw}{dy} = 0$ и $\sigma_{yz} = 0$.

Общият вид на тензора на напреженията е

$$\begin{pmatrix} -p_N & -\tau_y & -\tau_z \\ -\tau_y & \sigma_{yy} & 0 \\ -\tau_z & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

***A. Едноосов натиск ($i = 1$)***

$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -p_N$,

$\varepsilon_{yy} = -\dfrac{1}{E}\nu\sigma_{xx} = \varepsilon_{zz}$.

Контактното усилие е

$$(\Delta F_N, \Delta F_y, \Delta F_z) = (p_N, \tau_y, \tau_z)\cdot \Delta A_0 =$$
$$= \left(\frac{E\Delta A_0}{l}u_P, \frac{G\Delta A_0}{l}v_P, \frac{G\Delta A_0}{l}w_P\right).$$

Означаваме:

$\Delta C_N = \dfrac{E\Delta A_0}{l_0}$ - нормално контактно съпротивление и

$\Delta C_R = \dfrac{G\Delta A_0}{l_0}$ - тангенциално контактно съпротивление.

***B. Хидростатичен натиск ($i = 2$)***

$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p_N = \dfrac{E}{1-2\nu}\varepsilon_{xx}$.

Нормалното контактно съпротивление е

$\Delta C_N = \dfrac{E\Delta A_0}{l_0(1-2\nu)}$ и тангенциалното контактно съпротивление е $\Delta C_R = \dfrac{G\Delta A_0}{l_0(1-2\nu)}$ (Jager, 1999).

***C. Осево деформирано състояние ($i = 3$)***

$\sigma_{xx} = -p_N$, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\dfrac{\nu}{1-\nu}p_N$.

Съгласно теория на тънките контакти (Bental and Johnson, 1968) нормалното контактно съпротивление е $\Delta C_N = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)}\cdot\dfrac{\Delta A_0}{l_0}$ и тангенциалното контактно съпротивление - $\Delta C_R = \dfrac{G(1-\nu)}{(1+\nu)}\cdot\dfrac{\Delta A_0}{l_0}$.

Общо формулите за нормално и тангенциално контактни съпротивления могат да бъдат написани

$$\Delta C_N = \tilde{E}\cdot\frac{\Delta A_0}{l_0} \text{ и } \Delta C_R = \tilde{G}\cdot\frac{\Delta A_0}{l_0}\text{, където}$$

$$\tilde{E} = \begin{cases} E_1 = E & i = 1 \\ E_2 = \dfrac{E}{1-2\nu} & i = 2 \\ E_3 = \dfrac{E(1-\nu)}{(1+\nu)} & i = 3 \end{cases},$$

$$\tilde{G} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\nu)}.$$

При така въведеното означение контактните напрежения се изразяват чрез преместванията:

$$(p_N, \tau_y, \tau_z) = \left(\frac{\Delta C_N}{\Delta A_0}u_P, \frac{\Delta C_R}{\Delta A_0}v_P, \frac{\Delta C_R}{\Delta A_0}w_P\right).$$

## Вълнови характеристики на контакта

Разглежда се динамиката на взаимодействието на контактните тела.

$dM = \rho_0 \cdot dV_0$ - маса на моделния елемент

$dV_0 = dA_0 \cdot dx$ - обем на моделния елемент

**a) вибриране в нормално направление**

$\sigma_{xx} = \tilde{E}_i\varepsilon_{xx}$ - закон на Хук за нормалния натиск при триене. Моделът се разглежда за $i = 1, 2, 3$.

Съгласно законът на Нютон

$\Delta F = d\sigma_{xx}\cdot dA_0 = dm\cdot\ddot{u}(x,t)$, където $\ddot{u}$ е ускорение на моделния елемент.

След заместване с $\varepsilon_{xx} = u'(x,t)$ се получава вълновото уравнение $\tilde{E}_i u''(x,t) = \rho\ddot{u}(x,t)$.

Всички решения на уравнението са:

$u_k(x,t) = \sqrt{\dfrac{2}{\Delta A_0 l_0\rho_0}}\cos\left[\dfrac{\pi}{2l_0}(2k-1)x\right]\cdot\sin(\omega t)$, където $\omega = \dfrac{\pi(2k-1)}{2l_0}\sqrt{\dfrac{\tilde{E}_i}{\rho}}$.

**б) вибриране в тангенциално направление**

Изпълнено е $\sigma_{xz} = -\tau_z = \tilde{G}_i \dfrac{dW}{dx} = \tilde{G}_i W'(x,t)$. По аналогичен начин се достига до вълновото уравнение $\tilde{G}_i \mathrm{w}''(x,t) = \rho \ddot{\mathrm{w}}(x,t)$. Решението е аналогично, както в случая на вибриране в нормално направление.

Извод: Амплитудите на вибрационните премествания при контактите не зависят от еластичните константи.

## Фрикционни характеристики

Параметрите свързани с процеса триене са:
- коефициент на триене $\mu$;
- относителна скорост $\mathrm{v_r}$;
- и нормален натиск $p_N$.

Коефициентът на триене се определя по формулата $\mu = \dfrac{\tau_S}{p_N}$, където $\tau_S$ е якост при приплъзване.

Коефициентът на триене при покой е $\mu_0 = \dfrac{\tau_{S_0}}{p_N}$.

При разглеждания модел (фиг. 3) относителната скорост е $v_\tau = \dot{w}(t)$ - $w$ е третата компанента на премества-нето.

Съгласно Sextro (2007) коефициентът на триене зависи от относителната скорост $\mu(v_\tau) = \dfrac{\mu_0}{1 + p_v |v_\tau|}$, където $p_v = k_r \mu_0 p_N$ е параметър на нормализиран натиск и $k_r$ - температурен коефициент.

## Microslip ефект, дължащ се на неравни повърхности

Наблюдава се при неравни повърхности, като в една точка има слепване, а в друга приплъзване. Дължи се на неравномерното разпределение на натиска за една елементарна област.

Съгласно модела, представен с фиг. 3, различаваме три състояния на контактната повърхнина:

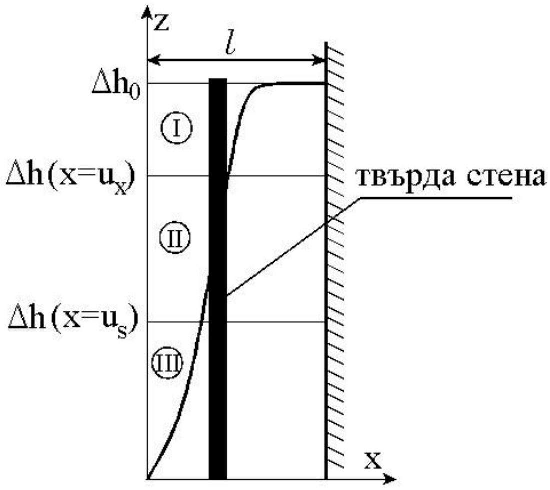
| | |
|---|---|
| Отделяне | $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xz} = 0$ |
| Пълзене (фрикционен процес) | $\sigma_{xx} = -p_N$, $\sigma_{xz} = \mu p_N$ |
| Слепване (адхезионен процес) | $\sigma_{xx} = -p_N$, $\sigma_{xz} = \tau_z$ |

$\mu$ - коефициент на триене;

$\tau_z$ - тангенциално сцепление.

При изтегляне на тръбен фрикционен анкер едновременно се наблюдават и трите процеса. Поради свиването на тръбата от страна на планката се образуват в последователен ред и трите зони (отделяне, пълзене и слепване)(фиг. 4).

За да се определи пластичната зона е необходимо напрежението при плъзгане $\tau_b$ да достигне достатъчна големина. Едната гранична стойност е тангенциалното сцепление $\tau_z = \dfrac{\Delta C_R w_P}{\Delta A_0}$, където $\Delta C_R$ е тангенциално контактно съпротивление и $w_P$ - третата компонента на преместването.




**Фиг.4. Контактен модел с три зони : I – отделяне; II- пълзене и III - слепване**

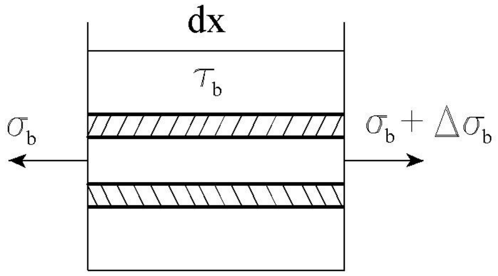
Втората стойност е якостта на пълзене $\tau_S$. Условието за пластично деформиране е $\tau = \min(\tau_z, \tau_S)$.

Големината на пластичната област се определя от $p_N = \dfrac{\Delta F_N}{\Delta A_0} = \dfrac{\Delta C_N}{\Delta A_0}(u_x - u_s)$, ако се приеме равномерен нормален натиск $p_N$ в пластичната зона.

## Приложение при описване на тестовете на изтегляне на анкери

Разглеждаме къси анкери, закрепени по цялата дължина. В зависимост от вида на анкера, закрепването се осъществява по един или повече от възможните начини чрез: механично закрепващ елемент; адхезивна връзка и фрикционна връзка. Акерите от типа Сплит-сет и ТФА имат само фрикционна връзка. Анкерите Швелекс имат фрикционна връзка и механично закрепващ елемент.

При изтегляне, най-напред се разрушава адхезионната връзка и след това механично-закрепващия елемент. Разрушаването при анкери, закрепени по цялата дължина започва от планката и последователно се премества навътре.




**Фиг. 5. Елемент на анкера**

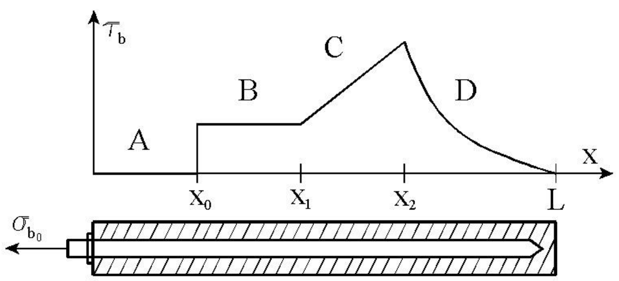
Като най-пълен пример разглеждаме анкери от типа на бетонните, които са закрепени по цялата дължина (Li and Stillborg, 1999).

На фиг. 5 е представен елемент на анкера с действащи върху него напрежение при приплъзване $\tau_b$ и осево опъново напрежение $\sigma_b$. Доказва се връзката $\tau_b = -\frac{A}{\pi d_b} \cdot \frac{d\sigma_b}{dx}$, където $d_b$ е диаметър на анкера и $A$ е лицето на сечението на анкера.

*Таблица 1.*

*Формули за напрежението при приплъзване $\tau_b$ и осево опъновото напрежение $\sigma_b$*

| | |
|---|---|
| A | $\tau_b(x) = 0$, <br> $\sigma_b(x) = \sigma_{b0}$ |
| B | $\tau_b(x) = s_\tau$, <br> $\sigma_b(x) = \sigma_{b0} - \frac{4s_\tau}{d_b}(x - x_0)$ |
| C | $\tau_b(x) = \omega s_p - \frac{x - x_1}{\Delta}(1-\omega)s_p$, <br> $\sigma_b(x) = \sigma_{b0} - \frac{2s_p}{d_b}\left[2\omega(x - x_0) + \frac{1-\omega}{\Delta}(x - x_1)^2\right]$ <br> $\Delta = x - x_1$, $\omega = \frac{s_\tau}{s_p}$, където <br> $s_\tau$ е частично нопрежение при плъзгане и $s_p$ - върхово напрежение при плъзгане |
| D | $\tau_b(x) = s_p e^{-2\alpha\frac{x - x_0}{d_b}}$, <br> $\sigma_b(x) = \frac{2s_p}{\alpha} e^{-2\alpha\frac{x - x_2}{d_b}}$ |




**Фиг. 6:Разпределение на $\tau_b$ при закрепен по цялата дължина анкер**

На фиг. 6 е представено схематично разпределение на напрежението при приплъзване $\tau_b$ по дължината на анкера. Различават се четири области:

$A: 0 \le x < x_0$ - отделена част на анкера;

$B: x_0 \le x < x_1$ - област на пълзене;

$C: x_1 \le x < x_2$ - част с линейно нарастване на $\tau_b$;

$D: x_2 \le x < L$ - част с експоненциално намаляващо $\tau_b$.

## Изводи

Систематизирането на моделите на триеща се повърхност е необходимо за аналитично описване на процеса на взаимодействие на анкера със скалата. Начинът на закрепване на анкера е един основен критерий, определящ принципа на неговото действие. Някои анкери като Сплит-сет, Швелекс и ТФА имат като основен - фрикционния начин на закрепване. Изучаването на процесите на триене е необходимо и за описването на тестовете на изтегляне. Силата на изтегляне е един важен критерий за носимоспособността на анкера. Независимо от вида на анкера, по време на изтегляне протича характерен фрикционен процес. Този процес се характеризира с области на отделяне и области на пълзене по дължината на анкера.

За оразмеряване на оптималните условия за работа на анкера е необходимо да се отчита натоварване, което достига граничното или го надвишава. Прецизният модел на гранично натоварения анкер включва описание на фрикционните процеси. Трябва да се определи носимоспособността на анкера при условия на създадени зона на отделяне и зона на пълзене. Този подход към оразмеряването на анкерния крепеж води до получаване на оптимално решение.

*Препоръчана за публикуване от катедра „Математика", МЕМФ*

## Литература

Bental R. Johnson K. 1968. An elastic strip in plane rolling contact. *Int J Mech Sci*, Pergamon Press, Vol 10

Jäger J. 1999. Equal Layers in Contact with Friction. In: *Gaul and Brebbia: Computational Methods in Contact Mechanics. IV*, WIT Press, Southampton, Boston

Johnson K.. 1989. *Contact Mechanics.* Cambridge, New York, Melbourne, Cambridge, University Press

Li C., B. Stillborg. 1999. Analytical models for rock bolts. In: *International Journal of Rock Mechanic and Mining Sciences*, Pergamon, 36, 1013-1029

Sextro W. 2007. *Dynamical Contact Problems with Models, Friction, Methods, Experiments and Applications*, Springer