ГОДИШНИК на Минно-геоложкия университет "Св. Иван Рилски", Том 59, Св.III, Механизация, електрификация и автоматизация на мините, 2016
ANNUAL of the University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", Vol. 59, Part III, Mechanization, electrification and automation in mines, 2016

ИЗСЛЕДВАНЕ ДВИЖЕНИЕТО НА МЕХАНИЧНА СИСТЕМА С ДВЕ СТЕПЕНИ НА СВОБОДА В МАТРИЧНА ФОРМА

Асен Стоянов

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, e-mail: asen_dragomirov@mail.bg

РЕЗЮМЕ: Решен е пример, свързан с изследване движението на механична система с две степени на свобода. Изследването се извършва по два различни начина – с общото уравнение на динамиката и с уравнението на Лагранж от втори род. За първия начин се използват две възможни скорости – пренасяща v1 и релативна v2r. Във втория начин се използват за обобщени координати абсолютното преместване S1 на тяло 1 и релативното преместване S2r на тяло 2, а така също и съответстващите им обобщени сили Q1 и Q2. Окончателните резултати са получени в матрична форма с пакета MathCAD.

ANALYSIS OF THE MOTION OF A MECHANICAL SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM IN MATRIX FORM

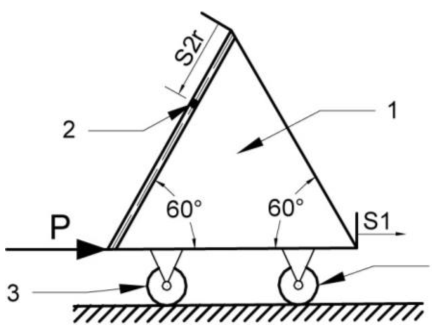
Asen Stoyanov

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, e-mail: asen_dragomirov@mail.bg

ABSTRACT: Determined is an example related to research the motion of a mechanical system with two degrees of freedom. The survey was carried out in two different ways - the general equation of dynamics and Lagrange equation of the second order. For the first way are used two possible speeds - carrying v1 and relative v2r. The second way to generalized coordinates are used absolute S1 and the relative displacements S2r body 1 and body 2 and the corresponding generalized forces Q1 and Q2. In the second way are used fot summarized coordinates the absolute displacement S1 of the body 1 and the relative displacement - S2r of body 2, as well as their respective summarized forces Q1 and Q2. The final decision is realized in matrix form with the package MathCAD.

Въведение

Показаната на фиг.1 механична система се състои от четири тела и притежава две степени на свобода. Тя започва да се движи от състояние на покой под действие на постоянна сила $\vec{P}$.

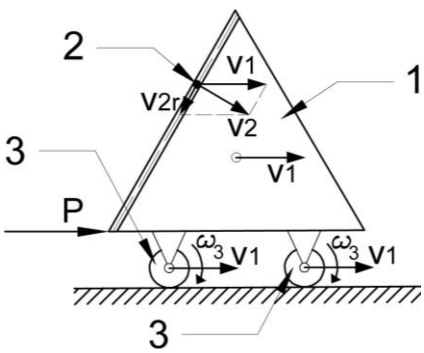


Фиг. 1.

Да се определи абсолютното ускорение на тяло 1 и относителното ускорение на тяло 2, като са зададени:

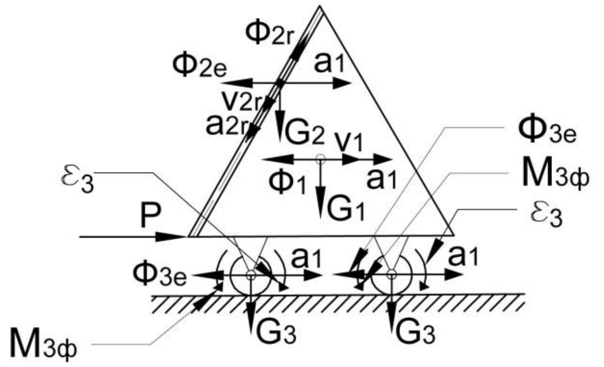
$m1 = 40\,kg;\quad m2 = 3\,kg;\quad m3 = 8\,kg \quad P = 30\,N\,\cdot$

1) Изследване движението на системата с общото уравнение на динамиката



Фиг. 2.

Решаването започва, като се съобщават на системата възможните скорости $v1\ u\ v2r$ (фиг. 2.), в посоки на предполагаемите действителни скорости и се съставя общото уравнение на динамиката виж фиг. 3. и у-ние (1) –



Фиг. 3.

$$P.v1-\varPhi1.v1-\varPhi2e.v1-2.\varPhi3e.v1+\varPhi2r.v1.\cos60^0+$$
$$+\varPhi2e.v2r.\cos60^0-\varPhi2r.v2r+G2.v2r.\cos30^0-2.M3\phi.\omega3=0.$$

След изразяване на ъгловите скорости на двете ролки №3 (виж фиг.2) и групиране на събираемите съдържащи $v1\ u\ v2r$ в уравнението за мощностите, последното придобива вида –

$$(P-\varPhi1-\varPhi2e-2.\varPhi3e+\varPhi2r.\cos60^0-2.\frac{M3\phi}{R_3}).v1- \quad (1)$$
$$-(-\varPhi2e.\cos60^0+\varPhi2r-G2.\cos30^0).v2r=0.$$

За да е изпълнено (1), изразите в скобите трябва да се приравнят на нула, тъй като двете скорости $v1\ u\ v2r$ са независими и различни от нула:

$$\begin{cases} P-\varPhi1-\varPhi2e-2.\varPhi3e+\varPhi2r.\cos60^0-2.\frac{M3\phi}{R_3}=0; \quad (2) \\ -\varPhi2e.\cos60^0+\varPhi2r-G2.\cos30^0=0. \end{cases}$$

Заменяйки всики сили и моменти в (2) с техните големини, окончателно се получава системата линейни уравнения (3):

$$\begin{cases} (m1+2.m3+m2+m3).a1-m2.\cos60^0.a2r=P; \quad (3) \\ -m2.\cos60^0.a1+m2.a2r=m2.g.\cos30^0. \end{cases}$$

Тя може да бъде представена в матричната форма $A.a=B$, където:

- $A_{2\times2}$ – матрица чиито елементи са коефициентите пред неизвестните;
- $a_{2\times1}$ – матрица–стълб чиито елементи са неизвестните линейни ускорения;
- $B_{2\times1}$ – матрица–стълб чиито елементи са свободните членове за системата.

Решението на (3) се търси във вида –

$a=A^{-1}.B$ (Стоянов А.). (4)

2) Изследване движението на системата с уравнението на Лагранж от втори род

Както беше споменато в началото, за обобщени координати се приемат – абсолютното преместване $S1$ за тяло 1 и относителното преместване $S2r$ за тяло 2 – виж фиг.1. (Яблонски, А.).

Уравненията на Лагранж за случая, се конкретизират във вида:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{S}1}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial S1}=Q1;\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{S}2r}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial S2r}=Q2; \quad (5)$$

където –

- E_k – кинетичната енергия на системата;
- $Q1\ u\ Q2$ – обобщени сили, съответстващи на обобщените координати $S1\ u\ S2r$.

След изразяване на линейните скорости $v1, v2r$ и ъгловата скорост $\omega3$ чрез обобщените скорости $\dot{S}1\ u\ \dot{S}2r$, се получава израза за кинетичната енергия на системата:

$$E_k=\frac{m1.\dot{S}1^2}{2}+$$
$$+\frac{m2.(\dot{S}1^2+\dot{S}2r^2+2.\dot{S}1.\dot{S}2r.\cos120^0)}{2}+$$
$$+2.\left(\frac{m3.\dot{S}1^2}{2}+\frac{m3.R_3{}^2.\dot{S}1^2}{4.R_3{}^2}\right),$$

който се представя във вида –

$$E_k=\frac{\alpha_{11}.\dot{S}1^2}{2}+\alpha_{12}.\dot{S}1.\dot{S}2r+\frac{\alpha_{22}.\dot{S}1.\dot{S}2r}{2}. \quad (6)$$

В (6) с $\alpha_{ii}\ u\ \alpha_{ij}$ са означени инерционните коефициенти.

Определянето на обобщените сили е свързано с мощностите на силите приложени върху телата от системата –

$Q_1=P;\ Q_2=G2.\cos30^0.$ (7)

Замествайки (6) и (7) в (5) се полъчават диференциалните уравнения за движение на системата:

$$\begin{cases} \alpha_{11}.\ddot{S}1+\alpha_{12}.\ddot{S}2r=P \\ \alpha_{12}.\ddot{S}1+\alpha_{22}.\ddot{S}2r=m2.g.\cos 30^0 \end{cases}, \qquad (8)$$

в които $\alpha_{12}=\alpha_{21}$.

Както и трябваше да се предположи, системите (3) и (8) по отношение на неизвестните $a1=\ddot{S}1$ и $a2r=\ddot{S}2r$ са еднакви, тъй като $\cos 120^0=-\cos 60^0$.

3) Определяне неизвестните ускорения с пакета MathCAD

Окончателното решение на задачата е представено на на фиг.4. То започва с въвеждане на изходните данни и приключва с получаването на вектора (4).

$$m1 := 40 \qquad m2 := 3 \qquad m3 := 8 \qquad P := 30$$

$$A := \begin{bmatrix} (m1+m2+3\cdot m3) & -m2\cdot\cos\left(\frac{60}{180}\cdot\pi\right) \\ -m2\cdot\cos\left(\frac{60}{180}\cdot\pi\right) & m2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 198.75 \qquad B := \begin{pmatrix} P \\ m2\cdot 9.81\cdot\cos\left(\frac{30}{180}\cdot\pi\right) \end{pmatrix}$$

$$a := A^{-1}\cdot B \qquad a = \begin{pmatrix} 0.645 \\ 8.818 \end{pmatrix}$$

Фиг.4. (Стоянов, А.)

Заключение

Представеното изследване осигурява две гледни точки върху движението на механична система с две степени на свобода. Двата начина за символно изследване дават възможност за съпоставка и проверка на получените резултати. Накрая с извършване на численото решение на задачата (определянето на големините на линейните ускорения $a1$ и $a2r$) в матрична форма с помощта на пакета MathCAD, се автоматизира и финализира изчислителният процес.

От изложението е видно предимството на машинното решение пред ръчното – първото може да се реализира само на четири реда. Допълнителни възможности се осигуряват от интеграцията между MathCAD, MATLAB и Excel, позволяващи решаването на сложни механични системи от инженерната практика.

Литература

Стоянов, А. Д., Матрични операции с MathCAD в теоретичната механика – Статика, София, 2016, стр. 67, стр. 110, 161 стр. (под печат);

Яблонски, А. „Сборник със задачи и решения по теоретична механика” кн. III, ИК Пропелер, София, 2005г., стр 38÷42, 79стр., превод от IV издание на „Сборник задании для курсовых работ по теоретической механики” под редакцията на проф. А. Яблонски, Москва, изд. „Висшая школа”.

Статията е препоръчана за публикуване от кат. „Техническа механика ”.