

РЕШАВАНЕ НА СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМИ ПРОСТРАНСТВЕНИ ФЕРМИ В МАТРИЧНА ФОРМА

Асен Стоянов

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, e-mail: asen_dragomirov@mail.bg

РЕЗЮМЕ: Пространствените ферми се използват не само в строителната практика, но и в машиностроенето. Прилагането на компютърните технологии за статическо изследване на пространствени конструкции, в частност ферми, осигурява компактен запис, частично или пълно автоматизиране и бърза реализация на изчислителния процес за определяне усилията в прътите. Задачата, свързана с равновесие на пространствена ферма, не се разглежда в съвременните курсове по теоретична механика и предвид актуалността на проблема в статията чрез матричната алгебра и математическия пакет MathCAD е решена възлово натоварена със съсредоточени сили пространствена статически определима ферма.

RESOLVING THE STATICALLY DETERMINATE THREE DIMENSIONAL TRUSSES IN A MATRIX FORM

ASEN STOYANOV

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, e-mail: asen_dragomirov@mail.bg

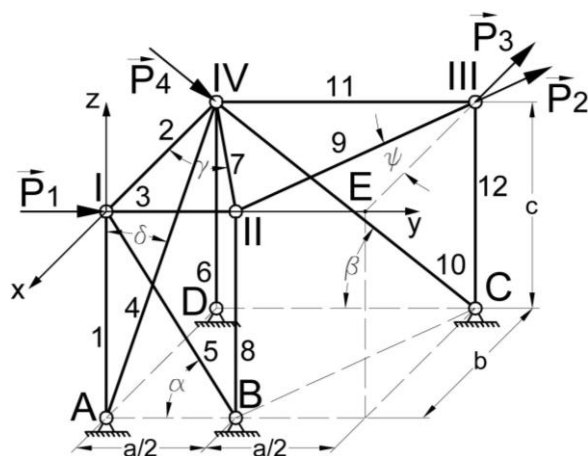
ABSTRACT: The spatial trusses are used not only in construction but also in the mechanical engineering. The application of computer technology for static study of spatial constructions in particular trusses, provides a compact recording partial or full automation and rapid realization of the computing process for determining the efforts in the rods. The task associated with the equilibrium of a spatial truss is not dealt in modern courses on theoretical mechanics and considering the actuality of the problem for in this an article by means the matrix algebra and the mathematical package MathCAD is solved nodal loaded with concentrated forces spatial statically determinate truss.

Въведение

Инженерните дейности налагат решаване на задачи, свързани с пространствените прътови конструкции. Така например, пространствените ферми широко са застъпени в минното дело и в подземното строителство като: кули за добив на нефт и газ, надшахтови кули за подеumni уредби, поддържащи структури за лентови транспортёри, подземни междинни платформи с цел временно депониране и транспорт на добития материал, кули за въжен транспорт, спомагателни конструкции за вентилационни комини, скелета или кофражни структури за подлези, тунели, метрополитени и др. Освен това, тези конструкции се използват и в машиностроенето като драги, роторни багери, кранове и др. Важността на тези съоръжения изисква задълбоченото им изучаване.

Целта, която си поставя авторът на настоящата статия, е автоматизираното изчисляване на пространствена статически определима ставно-прътова конструкция, съпоставено с „ръчното“ (калькулаторно) решение на същата.

1) Формулировка на задачата и анализ за геометричната неизменяемост на фермата



Фиг.1. Изчислителна схема

За пространствената ферма от фиг.1 е известно ставното натоварване по направление и посока – $\vec{P}_1$ по ос y ; $\vec{P}_2$ по $II \rightarrow III$; $\vec{P}_3$ по $E \rightarrow III$; $\vec{P}_4$ по $IV \rightarrow C$, както и големините на силовите и геометричните параметри:

$$P_1 = 40 \text{ kN}; P_2 = 30 \text{ kN}; P_3 = 50 \text{ kN}; P_4 = 80 \text{ kN};$$

$$a = 2,5 \text{ m}; b = 4,5 \text{ m}; c = 3 \text{ m}.$$

Решаване на фермата:

Първоначално се извършва анализ за геометрическата неизменяемост на прътовата конструкция. Необходимият глобален (аналитичен) критерий за това се дава с формулата:

$$W = 3.B - n \text{ за конкретния случай } 3.4 - 12 = 0$$

(Уманский, А. А.);

или с формулата на Ойлер:

$$\Pi = \frac{3}{2}.n \text{ за конкретния случай } 12 = \frac{3}{2}.8 \rightarrow 12 = 12$$

(Уманский, А. А.);

където:

- W – степени на свобода на конструкцията;
- B – брой на възлите в конструкцията (без опорните);
- Π – брой на прътите;
- n – брой на триъгълните полета в конструкцията.

Достатъчността на условието за геометрична неизменяемост се осигурява с геометричния критерий, т.е. с кинематичния анализ на системата.

Ставният триъгълник, състоящ се от прътите 1, 2 и 4, е подпрян с прът 6 към земята, с което се получава фермата A, D, IV и I в равнината Ixz . Фермата е подпряна към земята със пръти 5 и 10. Към получената по този начин неизменяема конструкция, е прибавен възела III свързан с прътите 9, 11 и 12 – виж фиг.1.

Двата критерия за пространствената ферма са изпълнени, т.е. ставно-прътовата конструкция е геометрично неизменяема и статически определима.

2) Класическо (калкулаторно) решение на задачата

Определяне на прътовите усилия с метода на изрязване на възлите – виж фиг.1.

$$I - B = \sqrt{(0,5,2,5)^2 + 3^2} = 3,25 \text{ m};$$

$$IV - C = \sqrt{2,5^2 + 3^2} = 3,905 \text{ m};$$

$$II - IV = \sqrt{(0,5,2,5)^2 + 4,5^2} = 4,67 \text{ m};$$

$$II - III = \sqrt{(0,5,2,5)^2 + 4,5^2} = 4,67 \text{ m};$$

$$A - IV = \sqrt{4,5^2 + 3^2} = 5,41 \text{ m};$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{3,25} = 0,923; \cos \alpha = \frac{0,5,2,5}{3,25} = 0,385;$$

$$\sin \beta = \frac{3}{3,905} = 0,7682; \cos \beta = \frac{2,5}{3,905} = 0,64;$$

$$\sin \gamma = \frac{0,5,2,5}{4,67} = 0,268; \cos \gamma = \frac{4,5}{4,67} = 0,964;$$

$$\sin \delta = \frac{4,5}{5,41} = 0,832; \cos \delta = \frac{3}{5,41} = 0,5545;$$

$$\sin \psi = \frac{0,5,2,5}{4,67} = 0,268; \cos \psi = \frac{4,5}{4,67} = 0,964;$$

Възел III

$$\sum F_{ix} = 0; -P_3 - P_2 \cdot \cos \psi + S_9 \cdot \cos \psi = 0;$$

$$S_9 = \frac{30 \cdot 0,964 + 50}{0,964} = 81,87 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = 0; P_2 \cdot \sin \psi - S_{11} - S_9 \cdot \sin \psi = 0;$$

$$S_{11} = (30 - 81,87) \cdot 0,268; S_{11} = -13,9 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0; -S_{12} = 0;$$

Възел II

$$\sum F_{ix} = 0; -S_9 \cdot \cos \psi - S_7 \cdot \cos \gamma = 0;$$

$$S_7 = -81,87 \cdot \frac{0,964}{0,964} = -81,87 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_9 \cdot \sin \psi - S_7 \cdot \sin \gamma - S_3 = 0;$$

$$S_3 = 81,87 \cdot 0,268 - (-81,87) \cdot 0,268 = 43,88 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0; -S_8 = 0;$$

Възел I

$$\sum F_{ix} = 0; -S_2 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; P_1 + S_3 + S_5 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$S_5 = \frac{(-40 - 43,88)}{0,385} = -217,87 \text{ kN};$$

$$\sum F_{iz} = 0; -S_1 - S_5 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$S_1 = -(-217,87) \cdot 0,923 = 201,09 \text{ kN}$$

Възел IV

$$\sum F_{ix} = 0; S_2 + S_4 \cdot \sin \delta + S_7 \cdot \cos \gamma = 0;$$

$$S_4 = \frac{-(0) - (-81,87) \cdot 0,964}{0,832}$$

$$S_4 = 94,86 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_7 \cdot \sin \gamma + P_4 \cdot \cos \beta + S_{10} \cdot \cos \beta + S_{11} = 0;$$

$$S_{10} = \frac{-(-81,87) \cdot 0,268 - 80 \cdot 0,64 - (-13,9)}{0,64} = -24 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} = 0; -S_6 - S_4 \cdot \cos \delta - S_{10} \cdot \sin \beta - P_4 \cdot \sin \beta = 0;$$

$$S_6 = -94,86 \cdot 0,5545 + (24 - 80) \cdot 0,7682 = -95,62 \text{ kN};$$

Проверка: $\sum M_{I,x} = 0; -S_{12,2,5} - S_{8,2,5,0,5} = 0; 0 = 0;$

$\sum M_{I,y} = 0;$

$-(P_4 + S_{10}) \cdot \sin \beta \cdot 4,5 - (S_{12} + S_6) \cdot 4,5 - S_4 \cdot \cos \delta \cdot 4,5 = 0;$

$+ 430,29 - 430,29 = 0;$

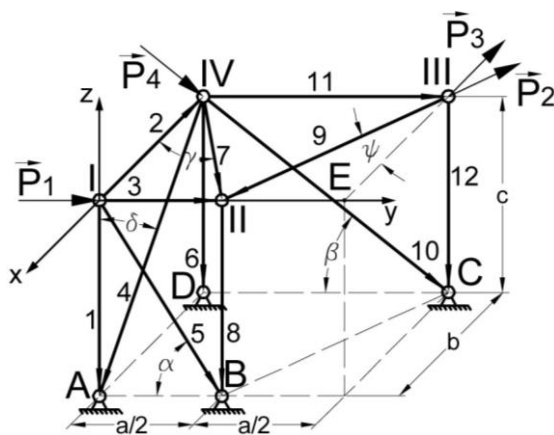
$\sum M_{I,z} = 0;$

$-(P_4 + S_{10}) \cdot \cos \beta \cdot 4,5 + P_3 \cdot 2,5 +$

$+ P_2 \cdot \cos \psi \cdot 2,5 - P_2 \cdot \sin \psi \cdot 4,5 = 0;$

$197,3 - 197,46 = -0,16 \approx 0.$

3) Решение на задачата с пакета MathCAD



Фиг. 2. Избрани и нанесени посоки на единичните вектори на прътите

Тригонометричните функции от показаните ъгли са представени с геометричните зависимости между страните в правоъгълния триъгълник – виж фигури 1., 2. и 4. (Бердяев, В. Д., Стоянов, А. Д.)

Елементите на формираните матрици–стълбове $VX_{m \times 1}$; $VY_{m \times 1}$; $VZ_{m \times 1}$ са алгебрични проекции на единичните вектори на прътите от фермата върху осите на координатната система I_{xyz} – виж фигури 2. и 4. (Бердяев, В. Д., Стоянов, А. Д.)

$$\begin{aligned} a &:= 3 \quad b := 4 \quad c := 5 \quad P_1 := 40 \quad \text{ORIGIN} := 1 \\ P_2 &:= 30 \quad P_3 := 50 \quad P_4 := 80 \quad \text{vuzli} := 4 \quad \text{pruti} := 12 \\ I &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Фиг. 3. (Стоянов, А. Д.)

$$VX := \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b}{\sqrt{b^2 + (a \cdot 0.5)^2}} \\ 0 \\ \frac{b}{\sqrt{b^2 + (a \cdot 0.5)^2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad VY := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{0.5 \cdot a}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + c^2}} \\ 0 \\ \frac{a \cdot 0.5}{\sqrt{b^2 + (a \cdot 0.5)^2}} \\ 0 \\ \frac{-a \cdot 0.5}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$VZ := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \\ \frac{-c}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + c^2}} \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{-c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad P := \begin{bmatrix} 0 \\ -P_2 \cdot \frac{b}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + b^2}} \\ -P_3 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \cdot \frac{a \cdot 0.5}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + b^2}} \\ 0 \\ P_4 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_4 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \end{bmatrix}$$

$DX := \text{diag}(VX) \quad DY := \text{diag}(VY) \quad DZ := \text{diag}(VZ)$

$D := \text{stack}(DX, DY, DZ)$

$i := 1 \dots \text{vuzli} \quad j := 1 \dots \text{pruti} \quad O_{i,j} := 0$

$IOO := \text{augment}(I, O, O)$

$OIO := \text{augment}(O, I, O)$

$OOI := \text{augment}(O, O, I)$

$L := \text{stack}(IOO, OIO, OOI)$

$A := L \cdot D \quad |A| = 0.19$

$A \cdot S + P = 0$

$S := -A^{-1} \cdot P$

$PI := (0 \quad P_1 \quad 0)^T \quad PIII := (-P_3 \quad 0 \quad 0)^T$

$PII := \begin{bmatrix} -P_2 \cdot \frac{b}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + b^2}} & P_2 \cdot \frac{a \cdot 0.5}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + b^2}} & 0 \end{bmatrix}^T$

$PIV := \begin{bmatrix} 0 & P_4 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} & -\left(P_4 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right) \end{bmatrix}^T$

Фиг. 4. (Бердяев, В. Д., Стоянов, А. Д.)

	1
1	201.207
2	9.092·10 ⁻¹⁵
3	43.836
4	94.833
5	-217.975
6	-95.572
7	-81.893
8	0
9	51.893
10	-24.068
11	-13.889
12	0

$$S = \begin{bmatrix} 1 \\ 201.207 \\ 9.092 \cdot 10^{-15} \\ 43.836 \\ 94.833 \\ -217.975 \\ -95.572 \\ -81.893 \\ 0 \\ 51.893 \\ -24.068 \\ -13.889 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r1 := (0 \ 0 \ c)^T$$

$$r2 := (0 \ a \cdot 0.5 \ c)^T$$

$$r3 := (-b \ a \ c)^T$$

$$r4 := (-b \ 0 \ c)^T$$

$$S1 := (0 \ 0 \ -201.207)^T$$

$$S6 := (0 \ 0 \ 95.572)^T$$

$$S12 := (0 \ 0 \ 0)^T$$

$$S8 := (0 \ 0 \ 0)^T$$

$$S4 := \left(94.833 \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \ 0 \ -94.833 \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \right)^T$$

$$S5 := \left[0 \ -217.975 \cdot \frac{0.5 \cdot a}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + c^2}} \ 217.975 \cdot \frac{c}{\sqrt{(a \cdot 0.5)^2 + c^2}} \right]^T$$

$$S10 := \left(0 \ -24.068 \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \ 24.068 \cdot \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right)^T$$

$$MA := r1 \times (S1 + S5 + P1) + r2 \times (S8) + r3 \times (S12 + P11 + P111) \dots$$

$$+ r4 \times (S4 + S6 + S10 + P14)$$

$$MA = \begin{pmatrix} 1.286 \times 10^{-3} \\ 7.014 \times 10^{-4} \\ 1.349 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Фиг. 5. (Бердяев, В. Д., Стоянов, А. Д.)

Заклучение

Всички реални конструкции са пространствени. Те имат пространствени опорни закрепвания и носят пространствено натоварване.

Ръчното пресмятане на пространствена ставно-прътова конструкция е по-трудоемко в сравнение с пресмятането на равнинна ферма. В редица случаи ставно-прътовата система може да се опрости чрез разлагане на отделни равнинни ферми. Така се постъпва например, при пресмятане на пространствени ферми,

представляващи решетъчни системи (Живейнов, Н. Н., Г. Н. Карасев, И. Ю. Цвей).

Виждат се предимствата генерирани от матричното решение с пакета MathCAD:

- елиминирана е необходимостта от избор на възел с най-много три неизвестни усилия (задължително при ръчно решение с метода на изрязване на възлите);
- възможностите на автоматизираното решение проличават по-добре, когато фермата се състои от повече пръти и е натоварена с повече сили във възлите;
- намалява вероятността от допускане на банални грешки от изчислително естество – решението е проведено в символен вид и проектите на единичните вектори (виж фиг. 4) са представени с тригонометрични зависимости между страните в правоъгълни триъгълници, които лесно се контролират.

Проведеното решение за определяне на прътовите усилия на пространствена ставно-прътова конструкция с MathCAD запълва липсата от информация по този въпрос в теоретичната механика.

Литература

- Бердяев, В. Д., Теоретическая механика на базе MathCAD, практикум, Санкт-Петербург «БХВ- Петербург», 2005, стр. 540 ÷ 541, 739 стр.
- Живейнов, Н. Н., Г. Н. Карасев, И. Ю. Цвей, Строительная механика и металло-конструкции строительных и дорожных машин, Москва, „Машиностроение“, 1988, стр. 21, 280 стр.
- Стоянов, А. Д., Матрични операции с MathCAD в теоретичната механика – Статика, София, 2016, стр. 67, стр. 110, 161 стр. (под печат).
- Уманский, А. А., Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений расчетно-теоретический, Издательство литературы по строительству, Москва, 1972, стр. 566, 600 стр.

Статията е препоръчана за публикуване от кат. „Техническа механика“.