

ИЗСЛЕДВАНЕ ВЪРХУ НАПРЕЖЕНИЯТА И ДЕФОРМАЦИИТЕ В РАЗНОМОДУЛНА ГРЕДА

Симеон Сезонов

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, sezonov_si@abv.bg

РЕЗЮМЕ: В работата са изследвани напрегнатото и деформирано състояние в стъпаловидна греда, натоварена на огъване. Материалът е приет за изотропен с различни модули на опън и на натиск. Напреженията и преместванията са получени числено в гредата, запъната в единия край с напречно сечение, състоящо се от правоъгълник с правоъгълен отвор.

Ключови думи: теория на еластичността, напрежения, деформации, разномодулна греда

RESEARCH ON STRESS AND DEFORMATION IN MULTIMODULUS BEAM

Simeon Sezonov

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, sezonov_si@abv.bg

ABSTRACT: The paper studied stress and strain state in a stepped beam bending loads. The material is approved for isotropic with different modulus of tension compression. Stresses and displacements are obtained numerically in beam fixed to one end of a cross section consisting of a rectangle with a rectangular opening.

Key words: theory of elasticity, stress and displacements, field with different modulus of tension-compression

Въведение

Изследването е в областта на съпротивление на материалите и е съсредоточено върху изучаването на разномодулна греда, на която са намерени геометричните характеристики на напречното сечение. За нея са определени линейните деформации и напрежение.

В работата е представен анализ на напреженията и деформациите в разномодулна греда, подложена на чисто огъване. Основните уравнения на равнинната теория на разномодулно анизотропни тела е получена в монографията (Амбарцумян С. А). С теорията на напреженията и деформациите са се занимавали редица автори (Иванчев 1972, Трифонова-Генова 2014, Сезонов 2014 и др.).

Цел на работата е да се получат:

- аналитични изрази за преместванията в стъпаловидна греда, подложена на чисто огъване;
- числени решения в разномодулна и равномодулна греда със съставено от правоъгълници напречно сечение и сравняването им;
- уравнения на еластичната линия на гредата, както и зависимости за пресмятане на напреженията.

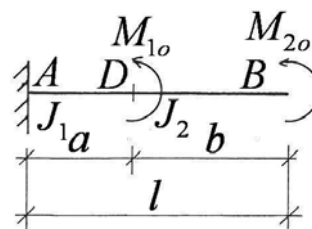
Резултатите са илюстрирани с числен пример.

Изложение

Постановка на задачата

Разглежда се греда, натоварена с огъващи моменти, успоредни на x_2 , лежащи на равнината Ax_1x_3 (фиг. 1). В рамките на първи и втори участък натоварването е постоянно:

$$M_{2,1}(x) = M_{1o}; \quad M_{2,2}(x) = M_{1o} + M_{2o}. \quad (1)$$



Фиг. 1. Схема на стъпаловидна греда, натоварена на огъване

Материалът на гредата има различни характеристики на опън ($i = 1$) и на натиск ($i = 2$). При това коефициентите на деформации във всеки участък ($j = 1, 2$) са:

$$a_{11,j}^i = \frac{1}{E_{11,j}^i}; \quad a_{12,j}^i = a_{13,j}^i = \frac{\mu_j^i}{E_{11,j}^i}, \quad (2)$$

където:

$E_{11,j}^i$ и μ_j^i са модули на Юнг и коефициенти на Поасон на опън и натиск.

Напречното сечение във всеки участък е различно с коравини:

$$EJ_{red,j} = E_{11}^1 J_{2,j}^1 + E_{11}^2 J_{2,j}^2, \quad (3)$$

където:

$J_{2,j}^i$ са инерционни моменти за двете зони (на опън и натиск).

Напрежения в разномодулна греда

Напреженията в разномодулна стъпаловидна греда имат вида:

$$\sigma_{11,j}^i = k_{i,j} \cdot x_3^i, \quad (4)$$

където

$$k_{i,j} = \frac{M_j}{a_{11,j}^i EJ_{red,j}}.$$

Когато напречното сечение на гредата е постоянно във всеки участък, то и коравината е постоянна, а коефициентът има вида:

$$k_i = \frac{M_j}{a_{11}^i EJ_{red}}. \quad (5)$$

В случай че участъкът е един, изразът (4) съвпада с получения в (Иванчев 1972).

Еластични премествания в разномодулна греда

Като се използва алгоритъмът за получаване на преместванията в цитирания източник, за компонентите на преместванията за двата участъка имаме изразите:

$$\begin{aligned} u_{1,1}^i &= a_{1,j} + C_{1,j}^i x_2 + C_{3,j}^i x_3 + C_{5,j}^i; \\ u_{2,j}^i &= a_{2,j} - C_{1,j}^i x_1 + C_{2,j}^i x_3 + C_{4,j}^i; \\ u_{3,j}^i &= a_{3,j} - C_{2,j}^i x_2 - C_{3,j}^i x_1 + C_{6,j}^i, \end{aligned} \quad (6)$$

където:

$$\begin{aligned} a_{1,j} &= a_{11}^i k_{i,j} x_3 x_1; \quad a_{2,j} = a_{12}^i k_{i,j} x_2 x_3; \\ a_{3,j} &= a_{11}^i k_{i,j} \frac{x_3^2}{2} - a_{12}^i k_{i,j} \frac{x_2^2}{2} - a_{11}^i k_{i,j} \frac{x_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Освен функциите на преместванията са необходими и функциите на завъртанята. Те се определят от:

$$\theta_{1,j}^i = \frac{\partial u_{1,j}^i}{\partial x_1} = a_{11,j}^i \cdot k_{i,j} x_3; \quad \theta_{2,j}^i = \frac{\partial u_{2,j}^i}{\partial x_1} = -C_{1,j}^i;$$

$$\theta_{3,j}^i = \frac{\partial u_{3,j}^i}{\partial x_1} = -a_{11,j}^i \cdot k_{i,j} \cdot x_1 - C_{3,j}^i. \quad (7)$$

Интеграционните константи C_l^i , $l = 1, \dots, 6$ в уравнения (6) и (7) се определят от геометричните условия в конзолно запъната опора A :

$$\begin{aligned} u_{1,1}^i &= 0; \quad u_{2,1}^i = 0; \quad u_{3,1}^i = 0; \\ \frac{\partial u_{1,1}^i}{\partial x_3} &= 0; \quad \frac{\partial u_{1,1}^i}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial u_{2,1}^i}{\partial x_3} = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

и на границата D между двата участъка:

$$\begin{aligned} x_1 &= a; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \\ u_{1,1}^i &= u_{1,2}^i; \quad u_{2,1}^i = u_{2,2}^i; \quad u_{3,1}^i = u_{3,2}^i; \\ \frac{\partial u_{3,1}^i}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_{3,2}^i}{\partial x_1}; \quad \frac{\partial u_{2,1}^i}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{2,2}^i}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

След заместване на (6), (7) в (8) и (9) се получават следните стойности на интеграционните константи:

$$\begin{aligned} C_{\ell,1}^i &= 0; \quad \ell = 1, 2, \dots, 6; \\ C_{1,2}^i &= 0; \quad C_{2,2}^i = -a_{11}^i k_{i,2} a l; \quad C_{3,2}^i = a_{11}^i k_{i,1} a; \\ C_{4,2}^i &= 0; \quad C_{5,2}^i = 0; \quad C_{6,2}^i = -a_{11}^i k_{i,2} \frac{a^2}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Окончателните изрази за еластичните премествания за двата участъка имат вида:

$$\begin{aligned} u_{1,j}^i &= a_{1,j}; \quad u_{2,j}^i = a_{2,j}; \quad u_{3,j}^i = a_{3,j}; \\ u_{1,2}^i &= a_{1,j} + a_{11}^i k_{i,1} a x_3; \quad u_{2,2}^i = a_{2,j} - a_{11}^i k_{i,2} a l x_3; \\ u_{3,j}^i &= a_{3,j} + a_{11}^i k_{i,2} a l x_2 - a_{11}^i k_{i,1} a x_1 - 0,5 a_{11}^i k_{i,2} a^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Еластични премествания в равномодулна греда

Ако модулите на Юнг и коефициентите на Поасон са еднакви при опън и натиск, имаме равномодулна греда. За нея компонентите на еластичните премествания са:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{M}{EJ_2} x_1 x_3; \quad u_2 = -\frac{\mu M}{2EJ_2} x_2 x_3; \\ u_3 &= \frac{\mu M}{EJ_2} (x_2^2 - x_3^2) - \frac{M}{2EJ_2} x_1^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Ако се положи $x_2 = 0$ и $x_3 = 0$, се получава известното решение от съпротивление на материалите за уравнението на еластичното преместване:

$$u_3 = -\frac{M}{2EJ_2} x_1^2. \quad (13)$$

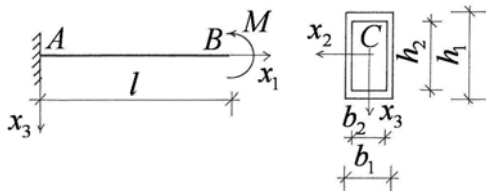
Този израз (13) показва, че решението, получено по методите на съпротивление на материалите, е приблизително.

Числен пример

Разглежда се разномодулна греда с дължината $l = 1\text{ m}$, натоварена с огъващ момент $M = 48 \cdot 10^3 \text{ Nm}$ и размери на напречното сечение $h_1 = 24 \text{ [cm]}$, $h_2 = 22 \text{ [cm]}$, $b_1 = 12 \text{ [cm]}$ и $b_2 = 11,4 \text{ [cm]}$ (фиг. 2). Материалът на гредата има следните физико-механични характеристики при опън и натиск

$$E_{11}^1 = 9,327 \cdot 10^4 \text{ MPa}, E_{11}^2 = 12,436 \cdot 10^4 \text{ MPa},$$

$$\mu^{(1)} = 0,22, \mu^{(2)} = 0,27.$$



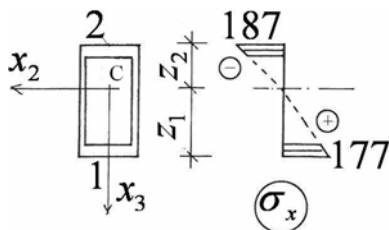
Фиг. 2. Схема на разномодулна греда

Положението на неутралната ос е определено от изискването за непрекъснатост на преместванията по нея (Сезонов 2014). То съвпада с координатата на едната ръбова точка (фиг. 3). Изчислени са още инерционните моменти за двете зони и коравината на гредата:

$$J_2^1 = 1998,12 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]}, J_2^2 = 1225,32 \cdot 10^{-8} \text{ [m}^4\text{]},$$

$$EJ_{red} = 33874,55 \cdot 10^2 \text{ [N.m}^2\text{]}.$$

Напреженията σ_x в напречното сечение в свободния край на гредата B се определят от израза (4) ($j = 1$) (Иванчев 1972). За ръбови точки 1 и 2 с координати $z_1 = 13,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ и $z_2 = 10,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ е дадена диаграмата на нормалните напрежения на фигура 3. Получените стойности в MPa се различават от тези за равномодулна греда ($\sigma_x = 144,54 \text{ MPa}$) с 22,7%.



Фиг. 3. Диаграма на нормалните напрежения в разномодулна греда.

Напречното сечение е симетрично спрямо вертикалната ос, поради което се изследват преместванията в точки от лявата част на гредата. Резултатите от изчислението

според (11) и при $j = 1$ са дадени в таблици 1 и 2. В първата са преместванията в свободния край на гредата, а във втората са преместванията на горните и долни нишки на гредата, минаващи през точки 7 и 9 от сечение B.

Таблица 1.

Премествания в точки от сечение B в разномодулна греда

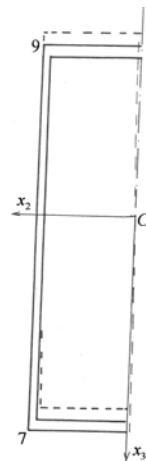
точка	u_1	u_2	u_3
Множител	10^{-2}	10^{-4}	10^{-2}
дименсия	[m]	[m]	[m]
1	0,19	0	-0,7055
2	-0,15	0	-0,7064
3	0,176	0	-0,7061
4	-0,136	0	-0,7067
5	0	0	-0,709
6	0	0	-0,709
7	0,19	-0,25	-0,7063
9	-0,15	-0,243	-0,711

Таблица 2.

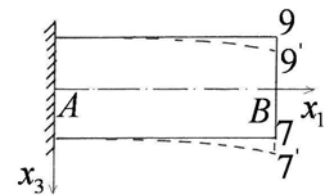
Премествания по дължината на гредата на горните и долни нишки в разномодулна греда

точки	A			B
x_1 [m]	0,25	0,5	0,75	1,0
Точка 7 $u_3 \cdot 10^{-2}$ [m]	-0,0420	-0,175	-0,397	-0,706
Точка 9 $u_3 \cdot 10^{-2}$ [m]	-0,047	-0,18	-0,401	-0,711

По данни от горните таблици са построени диаграми на преместванията (фиг. 4 и фиг. 5).



Фиг. 4. Диаграма на преместванията в точки от напречно сечение B



Фиг. 5. Диаграма на преместванията на горни и долни нишки на гредата

За сравняване на тези резултати се разглежда равномодулна греда със същите размери, но с модул на Юнг $E = 10,885 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ и коефициент на Поасон $\mu = 0,245$. За тази греда е характерна симетрия спрямо

горизонталната и вертикална ос на симетрия, поради което се изчисляват преместванията от (11) за точки от първи квадрант, а резултатите са дадени в таблица 3.

Таблица 3.

Премествания в точки от сечение В в равномодулна греда

точка	u_1	u_2	u_3
Множител	10^{-2}	10^{-4}	10^{-2}
дименсия	[m]	[m]	[m]
1	0,153	0	-0,5945
7	0,143	-0,117	-0,599
5	0	0	-0,5977

Преместванията в лявата страна на напречното сечение са означени с плътна линия, когато гредата е разномодулна, и с пунктир, когато тя е равномодулна (фиг. 4). Най-голямата разлика между стойностите на преместванията u_3 е 15,9 %.

От таблиците се забелязва, че преместването u_3 за точка 7 от сечение В в двете греди се различава с 15,2%. За преместването в точките 7 и 9 в разномодулната греда разликата е 0,66%. В точка 1 преместването в разномодулната греда е завишено с 15,7% спрямо същото в равномодулна греда.

Заклучение

Получените общи изрази на еластичните премествания се отнасят за стъпаловидни греди, чиито материал е разномодулен и изотропен. Сравнявайки числените резултати забелязваме, че неотчитането на разномодулността може да доведе до съществени грешки при оразмеряването на тези греди.

Описаното решение може да се доразвие за греди с променливо по дължината им напречно сечение.

Литература

- Амбарцумян С. А., Разномодульная теория упругости, М. Наука, 1982, 320с.
- Иванчев З., Чисто огъване на греди от разномодулен ортогонално анизотропен материал, *Известия на ВМЕИ*, С. , 1972, стр. 97-101.
- Сезонов С. Й., Напрежения в разномодулни греди, изпълнени със съставни сечения, *Доклади на научна конференция „Актуални проблеми на сигурността” НВУ „Васил Левски”*, 13-14.11.2014.
- Трифенова-Генова В. М., Еластични премествания в разномодулна греда с променливо сечение, *Доклади на научна конференция „Актуални проблеми на сигурността” НВУ „Васил Левски”*, 13-14.11.2014.

Статията е препоръчана за публикуване от кат. „Техническа механика”.