

## ЕДНА ЗАДАЧА ЗА ДВИЖЕНИЕ НА ТВЪРДО ТЯЛО С НЕПОДВИЖНА ТОЧКА

**Асен Стоянов**

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

**РЕЗЮМЕ:** Компютърните технологии могат визуално да представят кинематиката на движение на точки или тела. Тяхното прилагане е свързано с избора на форми за представяне на кинематичните параметри и по този начин скоростите и ускоренията могат да се определят за произволен момент от време. Представено е изследване със системата MathCAD върху сложното движение на твърдо тяло, извършващо ротации около две пресичащи се в неподвижна точка оси. Всички кинематични параметри са представени във векторна форма, а крайните резултати са изобразени графично в подвижната и неподвижната координатни системи.

### A TASK FOR THE MOVEMENT OF A RIGID BODY WITH THE FIXED POINT

**ASEN STOYANOV**

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, E-mail: asen\_dragomirov@mail.bg

**ABSTRACT:** Computer technologies can visually represent the kinematics of movement points or bodies. Their application is related to the choice to forms for presentation of the kinematic parameters and thus the speeds and accelerations may be laid down for any point of time. It is presented a study on the complicated motion of a solid body, which carries out rotations around two intersecting axes in fixed point, with the system MathCAD. All kinematic parameters are presented in vector form and the final results are displayed graphically in the mobile and fixed coordinate systems.

### Въведение

Решена е конкретна задача, свързана с търкаляне без плъзгане на прав кръгов конус  $A$  с една неподвижна точка върху равнината  $B$  - фиг. 1.

Използването на векторна форма за представяне на кинематичните параметри, на трансформационната матрица, както и реализацията на решението с помощта на системата MathCAD водят до съществено опростяване и съкращаване на пътя до крайния резултат.

### Определяне на ъгلوвете за тяло $A$ и линейните за точка $M$ скорости с пакета MathCAD

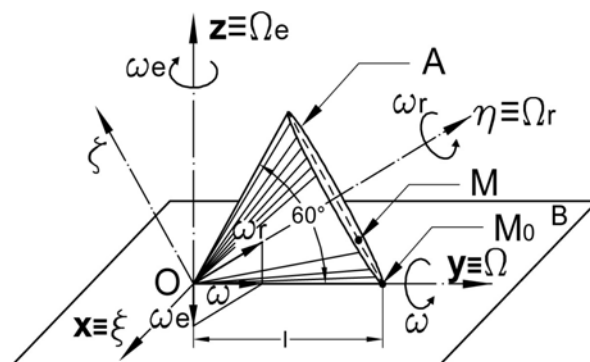
За показаното на фиг. 1. твърдо тяло  $A$ , участващо в две въртеливи движения около пресичащите се в неподвижната точка  $O$  оси, да се определят за произволен момент от време:

- траекторията на движение на точка  $M$  в неподвижната координатна система;
- ъгловата скорост и ъгловото ускорение на тялото в подвижната и неподвижната координатни системи;
- скоростта и ускорението на точка  $M$ ,

ако оста на симетрия на тялото  $\eta$  се върти с постоянна ъглова скорост  $\omega_e$  около неподвижната ос  $z$ .

Зададени са:

$$l = 40 \text{ cm}; \quad 2 \cdot \gamma = 60^\circ; \quad M_0 M = 12 \text{ cm}.$$

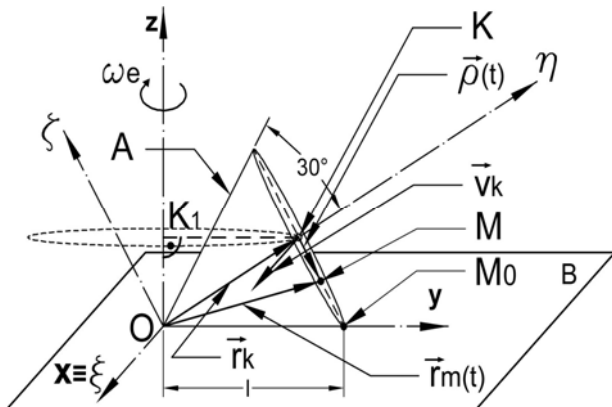


Фиг. 1. За текущия момент от движението на тяло  $A$ : положенията на неподвижните точки  $M_0$  и  $M$ ;  $Oxyz$  – неподвижна координатна система;  $O\xi\eta\zeta$  – подвижна координатна система;  $O\Omega$  – моментно неподвижна ос на ротация;  $O\eta$  – подвижна ос на конуса, съвпадаща с оста  $O\Omega$ , около която той извършва относително въртене;  $z$  – неподвижна ос на конуса, съвпадаща с оста  $O\Omega$ , около която той извършва преносно движение.

#### Решение:

Първоначално се присвояват дадените физични величини както и тези, необходими за по-нататъшните изчисления. Определят се във векторна форма преносната и релативната ъглови скорости за осите на подвижната координатна система  $O\xi\eta\zeta$ . В същата се изразяват и:

- ъгловата скорост на конуса;
- ъглите на относително и преносно завъртане;
- радиус-векторите на т.  $K$  и на т.  $M$  по отношение на т.  $K$  – фиг. 2 и фиг. 3. (Стоянов А., Сердега Ю. П. и др. 2013г.)



Фиг. 2. Траектория на т.  $K$ , скорост и геометрични параметри, определящи положението на т.  $M$

$$\begin{aligned}
 OM_0 &:= 1 \quad l := 40 \quad \omega_e := \frac{\pi}{3} \quad M_0M := 12 \quad \gamma := \frac{30}{180} \cdot \pi \\
 OK &:= l \cdot \cos(\gamma) \quad KM_0 := l \cdot \sin(\gamma) \\
 \omega_{2e} &:= \omega_e \cdot (0 \quad -\cos(2\gamma) \quad -\cos(\gamma))^T \quad KK_1 := OK \cdot \sin(2\gamma) \\
 \omega_r &:= \frac{KK_1 \cdot \omega_e}{KM_0} \quad \varphi(t) := \omega_r \cdot t \quad \omega_{2r} := (0 \quad \omega_r \quad 0)^T \\
 \alpha(t) &:= -\omega_e \cdot t \quad \omega_2 := \omega_{2e} + \omega_{2r} \quad r_k := (0 \quad l \cdot \cos(\gamma) \quad 0)^T \\
 \rho(t) &:= (l \cdot \sin(\gamma) - M_0M) \cdot (\cos(\varphi(t)) \quad 0 \quad -\sin(\varphi(t)))^T
 \end{aligned}$$

Фиг. 3. Присвоени стойности и аналитични зависимости.

За да се изрази радиус-векторът на т.  $M$ , както и нейните скорости в неподвижната координатна система, е необходимо използването на матрица за линейно преобразуване на координатите  $s_1(t)$  фиг. 4. (Сердега Ю. П. и др. 2013г.)

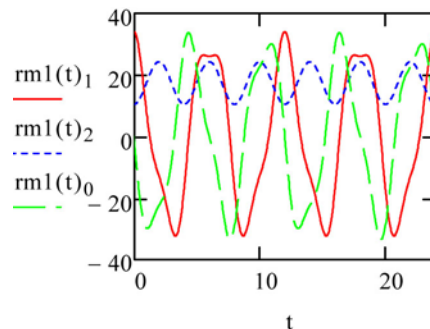
$$\begin{aligned}
 rm_1(t) &:= (rm(t)^T \cdot s_1(t))^T \\
 V_{rm}(t) &:= \omega_{2r} \times \rho(t) \quad V_{rm_1}(t) := (V_{rm}(t)^T \cdot s_1(t))^T \\
 V_{em}(t) &:= \omega_{2e} \times rm(t) \quad V_{em_1}(t) := (V_{em}(t)^T \cdot s_1(t))^T \\
 V_m(t) &:= V_{rm}(t) + V_{em}(t) \quad V_{m_1}(t) := (V_m(t)^T \cdot s_1(t))^T
 \end{aligned}$$

Фиг. 4. Проекции на:

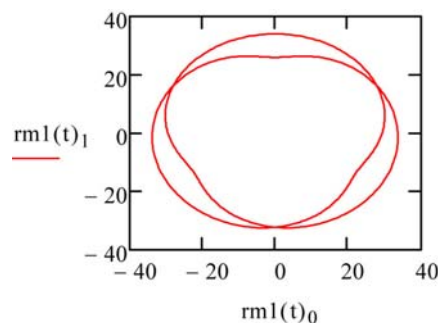
- радиус-вектора на т.  $M$  върху  $Oxyz$ ;
- релативната, преносната и абсолютната скорост на т.  $M$  върху  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ ;

Графичният редактор на MathCAD позволява нагледното изобразяване на траекторията на т.  $M$  (Стоянов А.).

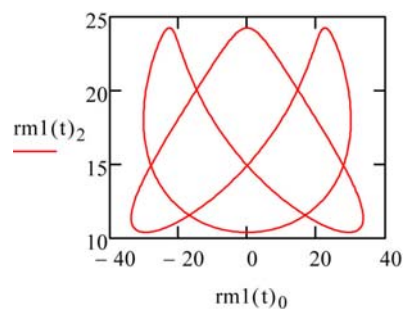
На фигурите с номера 5÷8 са показани както измененията на проекциите на радиус-вектора върху осите на  $Oxyz$ , така и траекторията на т.  $M$ , проектирана върху трите координатни равнини.



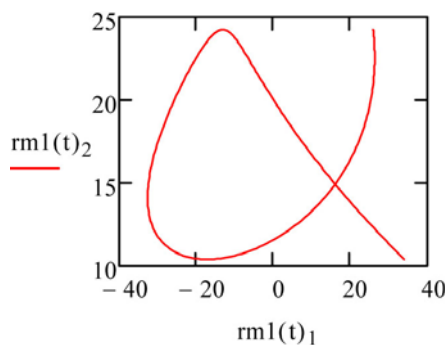
Фиг. 5. Изменение проекциите на радиус – вектора  $\vec{r}_m$  по трите оси на  $Oxyz$



Фиг. 6. Проекция на траекторията на т.  $M$  върху равнината  $Oxy$

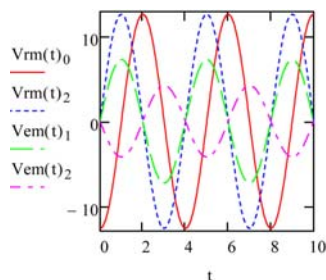


Фиг. 7. Проекция на траекторията на т.  $M$  върху равнината  $Oxz$



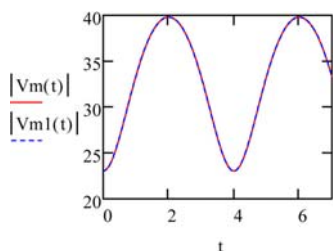
Фиг. 8. Проекция на траекторията на т.  $M$  върху равнината  $Oyz$

Закономерностите в измененията на относителната и преносната скорости са представени графично на фиг. 9.



Фиг. 9. Изменение проекциите на относителната и преносна скорости на т.  $M$ .

Хармоничният закон на изменение в големината на абсолютната скорост на т.  $M$  е показан на фиг. 10.



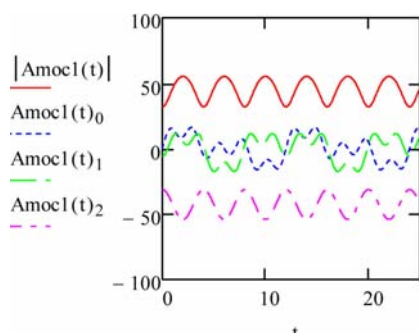
Фиг. 10. Функционална зависимост на абсолютната скорост от  $t$ , графично изразена в двете координатни системи –  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ .

### Определяне на ъгловите ускорения за тяло $A$ и линейните за точка $M$ с пакета MathCAD

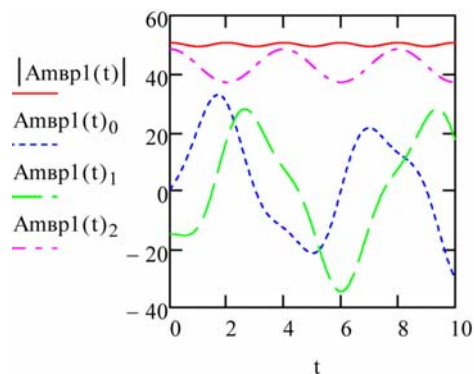
За конкретния случай преносното и релативното ъглови ускорения на тяло  $A$  са равни на нула. Абсолютното ъглово ускорение на конуса е с направление, перпендикулярно на равнината, определена от  $\omega_e$  и  $\omega_r$ , и е удобно да бъде определено в  $Oxyz$  фиг. 11.

$$\begin{aligned} \epsilon_{2a} &:= \omega_{2e} \times \omega_{2r} \quad \epsilon_{1a}(t) := (\epsilon_{1a}(t)^T \cdot s_1(t))^T \\ A_{\text{moc}2}(t) &:= \omega_2 \times V_m(t) \quad A_{\text{moc}1}(t) := (A_{\text{moc}2}(t)^T \cdot s_1(t))^T \\ A_{\text{mvp}2}(t) &:= \epsilon_{2a} \times r_m(t) \quad A_{\text{mvp}1}(t) := (A_{\text{mvp}2}(t)^T \cdot s_1(t))^T \\ A_{m2}(t) &:= A_{\text{mvp}2}(t) + A_{\text{moc}2}(t) \quad A_{m1}(t) := (A_{m2}(t)^T \cdot s_1(t))^T \end{aligned}$$

Фиг. 11. Абсолютни – ъглово и линейно ускорения на т.  $M$ .



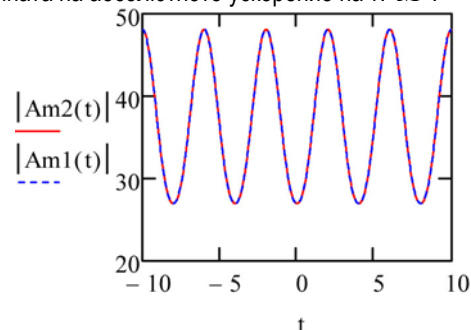
Фиг. 12. Големината и три проекции на осостремителното ускорение върху осите на  $Oxyz$ .



Фиг. 13. Изменения в зависимост от  $t$  на големината и проекциите на въртеливото ускорение на т.  $M$ .

Закономерността в измененията при осостремителното и въртеливото ускорения е показана на фигури 12 и 13, а на абсолютната скорост  $\vec{V}_m$  – на фиг. 10.

На фиг. 14 е показано периодичното изменение на големината на абсолютното ускорение на т.  $M$ .



Фиг. 14. Абсолютното ускорение на т.  $M$ , представено в  $O\xi\eta\zeta$  и  $Oxyz$ .

### Заклучение

Представеното изследване със системата MathCAD върху сложното движение на твърдо тяло, извършващо ротации около неподвижна точка, демонстрира бързина, простота и възможност за контрол в хода на решението (виж фигури 10 и 14).

Прилагането на матричните методи при решаване на инженерни задачи позволява изследването на величините в пълен обем, както това беше показано в статията.

Възможността за интеграция между MathCAD, MATLAB и Exsel, например, предоставя незаменим инструмент за автоматизация на изчислителния процес при решаването на сложни системи от инженерната практика.

### Литература

- Стоянов, А. Комплексно изследване на криволинейно движеща се точка, International Conference on Engineering, Technologies and Systems TECHSYS 2015, Пловдив.
- Сердега Ю. П., Некрутов В.Г., 2013. Решение задач механики с применением компьютерных технологий, 34-41 стр., Челябинск.

Статията е препоръчана за публикуване от кат. „Техническа механика“.