

ИЗСЛЕДВАНЕ ВЪРХУ ДОПЪЛНИТЕЛНИТЕ НАПРЕЖЕНИЯ ОКОЛО КРЪГЛА ИЗРАБОТКА, НАТОВАРЕНА СЪС СЪСРЕДОТОЧЕНА СИЛА

Виолета Трифонова–Генова

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, violeta.trifonova@yahoo.com

РЕЗЮМЕ. В работата са изследвани допълнителните напрежения около минна изработка, натоварена със съсредоточена и радиална сила. Те са получени посредством приблизителен вариационен метод за два вида среди. В първата среда са пренебрегнати напречните премествания. Във втората среда е взет под внимание пълният вектор на преместванията. Влиянието на натоварването е ограничено в крайна област около изработката. Тук е предложен един алгоритъм за определяне на сумарното действие на напреженията в радиално сечение на тази област. За конкретен скален масив са получени числено допълнителните радиалните напрежения за два вида среди.

Ключови думи: приблизителен вариационен метод, кръгла изработка, съсредоточена сила.

RESEARCH ON ADDITIONAL STRESSES AROUND THE CIRCULAR MINING LOADED WITH CONCENTRATED FORCE

Viola Trifonova–Genova

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, violeta.trifonova@yahoo.com

ABSTRACT. The paper examined the additional stresses around circular mining, loaded with concentrated and radial force. They are obtained by an approximate variational method for two types of environments. In the first environment are neglected displacements in the transverse direction. The second environment is taken into account the full vector of displacements. The influence of the radial force is limited in the final area around mining. An algorithm to determine the cumulative effect of stress in the radial section of this field is proposed here. For a particular rock massif were obtained numerically additional radial stresses for two types of environments.

Key words: approximate variational method, circular mining, concentrated force.

Увод

Задачата за намиране на напреженията и деформациите в кръгла изработка, натоварена със съсредоточена сила се свежда до решаване на две задачи: за еластичното равновесие на областта около незакрепена изработка и за равновесието на кръгов пръстен, натоварен по вътрешния контур със съсредоточена сила. За двете задачи се съставят системи частни диференциални уравнения при определени гранични условия. Първата система е решена аналитично, а за втората се търси приблизително решение.

Едно възможно решение се основава на класическия вариационен принцип на теорията на еластичността, според който „действителната форма за равновесие се отличава с това, че при нея пълната енергия на системата приема минимална стойност“. Този принцип се прилага във формата на деформационен метод – когато неизвестните са преместванията.

При формулирането на вариационните принципи има значение принципът на възможните (виртуалните) премествания. Според него, ако на дадена система се придаде възможно (виртуално) преместване, за да остане в равновесие, работата на всички сили трябва да е нула.

Този принцип е приложен за два вида среди. В първата е пренебрегнато напречното преместване (Трифонова-Генова, 2011). Във втората среда се отчита влиянието на пълния вектор на преместването (Трифонова-Генова, 2015, 31-36). За двете среди са получени преместванията и напреженията с точност до константи. Последните се определят от условия по направление на натоварването. В тези условия участват преместванията и напреженията, които действат в радиално сечение на тръбата.

В тази работа се цели да се изследват допълнителните напрежения, които действат в радиално сечение на крайна област около кръгла изработка, като се опише алгоритъм за определяне на напречните и надлъжните напрежения в сечението и да се посочи тяхното приложение.

Изложение

Постановка на задачата

От дълга кръгла изработка се изследва пластина с дължина δ по направление на оста. Тя е натоварена по контура с хоризонтална сила, чието влияние се простира в кръгов пръстен с мощност h . Радиусът на изработката е

R . Средата е изотропна с модул на еластичността E и коефициент на Поасон μ .

Аналитичните изрази за допълнителните премествания, деформации и напрежения са получени чрез вариационния метод на Власов (Трифенова-Генова, 2011, 2012, 2015). Тези изрази отговарят на две подобласти на кръговия пръстен около отвора на изработката означени с I и II. Тяхната обща граница е направлението на силата. По нея преместванията и напреженията по дължината на радиално сечение от изследваната област са еднакви.

Допълнителни напрежения в радиално сечение на зоната на влияние

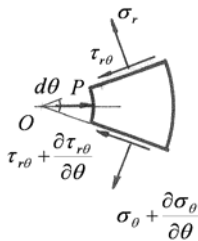
Това са тангенциалното напрежение $\tau_{r\theta}$ и тангиращото напрежение σ_θ , които действат в радиално сечение с площ $F = \delta h$ (фиг.1). Тези напрежения се сумират за цялото сечение и се получават обобщени сили (фиг.2):

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \delta \int_R^{R_1} \tau_{r\theta}(r, \theta) \varphi(r) dr; \\ T(\theta) &= \delta \int_R^{R_1} \sigma_\theta(r, \theta) \psi(r) dr, \end{aligned} \quad (1)$$

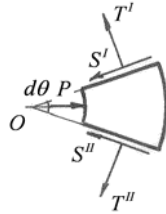
където

$$R_1 = R + h.$$

Функциите $\varphi(r) = \varphi$ и $\psi(r) = \psi$ зависят само от радиалната координата и са линейни.



Фиг. 1. Напрежения в елемент от кръговия пръстен



Фиг. 2. Обобщени сили

Този общ вид на обобщените сили следва да се приложи за двете среди и за двете подобласти.

Обобщени сили за среда от тип 1

За нея напречните премествания са пренебрегнати. Тогава $\psi = \varphi$, а напреженията са изразени чрез обобщените ъгли и радиални функции и имат вида:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, \theta) &= E_2 \left(\frac{U'}{r} \varphi \right); \\ \sigma_\theta(r, \theta) &= E_1 \left(\frac{\varphi}{r} U + \mu_o U \varphi' \right), \end{aligned} \quad (2)$$

където

$$\begin{aligned} U &= U(\theta); E_1 = \frac{E_o}{1 - \mu_o^2}; \\ E_2 &= \frac{E_o}{2(1 + \mu_o)}; \mu_o = \frac{\mu}{1 - \mu}; E_o = \frac{E}{1 - \mu^2}. \end{aligned}$$

Изразите (2) се заместват се в (1) и за тангиращата и напречната сили в радиалното сечение се намират изразите:

$$\begin{aligned} T(\theta) &= E_1 \delta \int_R^{R_1} U \left(\frac{\varphi^2}{r} + \mu_o \varphi \varphi' \right) dr; \\ S(\theta) &= E_1 \delta \int_R^{R_1} U' \frac{\varphi^2}{r} dr. \end{aligned} \quad (3)$$

Функцията на радиалната координата (Трифенова-Генова, 2011) и нейната производна се заместват в горните изрази:

$$T(\theta) = E_1 [a_{11} - \mu_o k_{11}] U; S(\theta) = E_2 U' a_{11}. \quad (4)$$

Функцията на ъгловата координата от същия източник и нейната производна се заместват в (4). Тогава обобщените сили в двете подобласти и съответните им ъгли са:

$$\begin{aligned} T^I(\theta) &= T_o e_2 C_2; S^I(\theta) = -S_o e_2 C_2; \\ 0 &\leq \theta \leq \pi/2; \\ T^{II}(\theta) &= T_o e_1 C_1; S^{II}(\theta) = S_o e_1 C_1; \\ -\pi/2 &\leq \theta \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

От граничните условия, описани по-долу, се получават C_1 и C_2 . Част от коефициентите в (5) имат вида:

$$\begin{aligned} T_o &= E_1 (a_{11} - \mu_o k_{11}); S_o = E_2 a_{11} \bar{\lambda}; \\ e_1 &= \exp(\bar{\lambda} \theta); e_2 = \exp(-\bar{\lambda} \theta), \end{aligned} \quad (6)$$

а останалите могат да се видят в цитирания източник.

Обобщени сили за среда от тип 2

За нея се отчитат както радиалните, така и напречните премествания. Тогава напреженията изразени чрез функциите на преместването са (Трифенова-Генова, 2015, 25-30):

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, \theta) &= E_2 \left[\frac{U'}{r} \varphi + V \left(\psi' - \frac{\psi}{r} \right) \right]; \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= E_1 \left[U \left(\frac{\varphi}{r} + \mu_o \varphi' \right) + V' \psi \right], \end{aligned} \quad (7)$$

където

$$U = U(\theta); V = V(\theta).$$

Тези напрежения се заместват в (1) и за обобщените сили се получават изразите:

$$T(\theta) = E_1 \delta \int_R^{R_1} \left[U \psi \left(\frac{\varphi}{r} + \mu_o \varphi' \right) + \frac{\psi^2}{r} V' \right] dr;$$

$$S(\theta) = E_2 \delta \int_R^{R_1} \left[\frac{\varphi^2}{r} U' + V \varphi \left(\psi' - \frac{\psi}{r} \right) \right] dr. \quad (8)$$

Приема се, че радиалните функции са равни ($\varphi = \psi$) и имат вида, даден в (Трифенова-Генова, 2015, 31-36). Тогава (8) приема вида:

$$T(\theta) = E_1 \left[(U + V') a_{11} - \mu_o U k_{11} \right];$$

$$S(\theta) = E_2 \left[(U' - V) a_{11} - V k_{11} \right]. \quad (9)$$

Обобщените функции на ъгловата координата от същия източник и техните производни са заместват в (9). След това се определят обобщените сили за всяка подобласт, както и съответните ъгли:

$$T^I(r, \theta) = e_2 (-G'_{50} s + G'_{51} c); \quad (10)$$

$$S^I(r, \theta) = e_2 (G'_{52} s - G'_{53} c); \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2;$$

$$T^{II}(r, \theta) = e_1 (G'_{50} s + G'_{51} c);$$

$$S^{II}(r, \theta) = e_1 (G'_{52} s + G'_{53} c); \quad -\pi/2 \leq \theta \leq 0.$$

Коефициентите G'_i ($i = 50 \div 53$) са дадени в приложението, а тригонометричните и експоненциални функции са дадени в приложението на цитирания източник. В тях участват неизвестните коефициенти C_1 и C_4 , които се определят от условия, описани по-долу.

Ако в изразите (7)-(10) се пренебрегне обобщената ъглова функция V и нейната производна, то се получават изразите (2)-(5).

Приложение на обобщените сили

Получените изрази (5) за първата среда и обобщената радиална функция участват в условията за равновесие на изрязан елемент (фиг.2):

$$S^{II}(0) - S^I(0) = P; \quad U^I(0) = U^{II}(0). \quad (11)$$

Така са определени константите в изразите за напреженията, деформациите и преместванията.

Равновесните условия по направление на силата P за втория тип среда са (Трифенова-Генова, 2012):

$$S^{II}(0) - S^I(0) = P; \quad V^I(0) = V^{II}(0). \quad (12)$$

След заместване на (10) и обобщената ъглова функция от същия източник в горните изрази се получават търсените коефициенти.

Числен пример

Дадени са размерът по направление на оста на изработката $\delta = 10^{-2} m$, радиусът $R = 1,5 m$, мощността на областта на влияние на натоварването $h = 1,5 m$. Коефициентът на Поасон е $\mu = 0,22$, а модулът на еластичността - $E = 6700 MPa$ (Стоянчев и Дерменджиев, 2007).

Коефициентите от (2), свързани с физикомеханичните характеристики за средата, са $E_1 = 7649,2963 MPa$ и $E_2 = 2613,1045 MPa$.

За различни стойности на ъгловата координата θ на точките от контура на изработката се изчисляват радиалните напрежения за среда от първи тип (Трифенова-Генова, 2011). Техните стойности са подредени в следващата таблица.

Таблица 1
Радиални напрежения в среда от тип 1

θ °	$\sigma_r \cdot 10^{-3}$ MPa	θ °	$\sigma_r \cdot 10^{-3}$ MPa
0	-24,94	45	-13,87
15	-20,53	60	-11,47
30	-16,91	75	-9,38
45	-13,87	90	-7,73

За среда от втори тип първо се определят обобщените сили според (10) и след това се заместват в условие (12):

$$2G'_{53} = P; \quad G_2 = 0,$$

или

$$0,955C_1 + 2,178C_4 = 0;$$

$$0,153545C_1 + 0,48469C_4 = 50 \cdot 10^{-3}. \quad (13)$$

От тук се получават $C_1 = -0,84775 \cdot 10^{-3}$ и $C_2 = 0,37172 \cdot 10^{-3}$.

Радиалните напрежения се получават от израза (Трифенова-Генова, 2015, 25-30):

$$\sigma_r = e_2 (-7,019s - 25,887c). \quad (14)$$

където

$$e_2 = \exp(-2,178\theta); \quad s = \sin(0,955\theta);$$

$$c = \cos(0,955\theta).$$

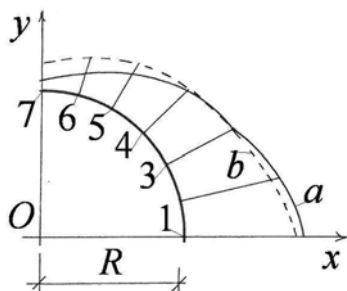
Така се получават стойностите им, подредени в следващата таблица.

Таблица 2

Радиални напрежения в среда от тип 2

θ °	$\sigma_r \cdot 10^{-3}$ MPa	θ °	$\sigma_r \cdot 10^{-3}$ MPa
0	-25,886	45	-12,71
15	-21,803	60	-8,612
30	-17,43	75	-5,294
45	-12,71	90	-2,036

На фигура 3 са показани диаграмите на радиалните напрежения за двете среди. Те са получени, използвайки таблиците. За среда тип 2 е избрана права линия, а за среда от първи тип – пунктир.



Фиг. 3. Диаграми на радиалните напрежения в две среди: а- среда от втори тип и б- среда от първи тип

От тези графики се вижда, че радиалните напрежения за двете среди се различават, като максималното отклонение нараства при доближаване на вертикалната ос. В точка 4 тази разлика е 8,3%, а в точка 2 – 5,8%. Това се дължи на отчитане на пълния вектор на преместванията.

Сравняването на тези криви и резултатите в таблиците показват, че втората среда се доближава до реалната задача. Времето за изчисляване на търсените параметри обаче е повече. Получените резултати следва да се проверят и за други видове скали.

Заклучение

Предложените изрази за обобщените сили участват при определяне на константите в изразите за допълнителните напрежения. С това задачата за равновесието на кръгов пръстен, натоварена със съсредоточена сила е решена аналитично. Получените резултати се суперпонираат към напреженията около незакрепена изработка и се получават напреженията около изработка, укрепена с анкерен крепеж.

Така описаното решение може да се доразвие и за случая, когато силата е произволно наклонена.

Приложение

1. Формули за $G'_{50} \div G'_{53}$

$$G'_i = 0,5G_i.$$

2. Формули за $G_{50} \div G_{53}$

$$G_{50} = E_2(A_{501}C_1 + A_{502}C_4);$$

$$G_{51} = E_2(A_{511}C_1 + A_{512}C_4);$$

$$G_{52} = E_2(A_{521}C_1 + A_{522}C_4);$$

$$G_{53} = E_2(A_{531}C_1 + A_{532}C_4);$$

3. Формули за $A_{501} \div A_{532}$

$$A_{501} = a_{11}\bar{A}_{21}(\bar{\lambda}_1 A^{11} - \bar{\lambda}_2 A^{12}) + (a_{11} - \mu_o k_{11})A^{21};$$

$$A_{502} = -a_{11}\bar{A}_{21}(\bar{\lambda}_1 A^{12} + \bar{\lambda}_2 A^{11}) + (a_{11} - \mu_o k_{11})A^{22};$$

$$A_{511} = a_{11}2\bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{A}_{21} - (a_{11} - \mu_o k_{11})A^{22};$$

$$A_{512} = a_{11}(\bar{\lambda}_1^2 - \bar{\lambda}_2^2)\bar{A}_{21} + (a_{11} - \mu_o k_{11})A^{21};$$

$$A_{521} = a_{11}\bar{\lambda}_1 A^{21} + a_{11}\bar{\lambda}_2 A^{22} + \bar{A}_{21}(a_{11} + k_{11})A^{11};$$

$$A_{522} = a_{11}\bar{\lambda}_1 A^{22} - a_{11}\bar{\lambda}_2 A^{21} - \bar{A}_{21}(a_{11} + k_{11})A^{12};$$

$$A_{531} = a_{11}\bar{\lambda}_2 A^{21} - a_{11}\bar{\lambda}_1 A^{22} - k_{11}\bar{A}_{21}A^{12};$$

$$A_{532} = a_{11}\bar{\lambda}_2 A^{22} + a_{11}\bar{\lambda}_1 A^{21} - k_{11}\bar{A}_{21}A^{11};$$

Литература

- Стоянчев Г., Дерменджиев К., Резултати от предварителни експериментални изследвания за прилагане на сондошников добив в мина „Бела Вода“, *Годишник на МГУ „Св. Ив. Рилски“*, т. 50, св. II, 2007, 57-62.
- Трифонова-Генова В., Деформирано състояние около кръгла изработка под действие на съсредоточена сила, *Годишник на МГУ „Св. Ив. Рилски“*, т. 55, св. II, 2012, 69-73.
- Трифонова В., Изрази за напреженията и деформациите в кръгла тръба, натоварена с радиални сили, *XV Международна научна конференция ВСУ'2015*, Сборник от доклади, том 1, 4 - 5 юни, 2015, 25-30.
- Трифонова В., Изследване на напрегнатото състояние в дебелистенна тръба по метода на Власов, *Международна научна конференция УНИТЕХ'11 – Габрово*, Сборник от доклади, том II, ноември, 2011, 75-78.
- Трифонова В., Функции на преместванията в кръгла тръба, натоварена с радиална сила, *XV Международна научна конференция ВСУ'2015*, Сборник от доклади, том 1, 4-5 юни, 2015, 31-36.

Статията е препоръчана за публикуване от кат. „Техническа механика“.