THE ARRANGEMENT OF SPHERICAL BODIES IN A CONICAL BIN

Angel Zabtchev

University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”, 1700 Sofia, angel.zabtchev@mgu.bg

ABSTRACT. Placing flat geometric entities in a plane in such a manner that they do not overlap with the highest fill factor is an engineering task to which no simple solution can be offered. The same goes for filling vessels with bodies of a particular shape and size. This paper studies a conical bin whereby spherical bodies float. Their position relative to one another and within a given minimum amount of liquid is determined. The study employs a traditional geometric approach, software-free, based on inverse transformation. This allows engineers, who are interested in this subject matter, an in-depth approach to the method and its idea.

Key words: floating spheres, conical bin, inverse transformation

РАЗПОЛОЖЕНИЕ НА СФЕРИЧНИ ТЕЛА В КОНИЧЕН БУНКЕР

Ангел Зъбчев

Минно-геоложни университет „Св. Иван Рилски“, 1700 София

РЕЗЮМЕ. Разполагане на плоски геометрични обекти в равнина, така че да не се припокриват при най-голям коефициент на запълване, е инженерна задача, която няма просто решение. Същото важи и за запълване на съдове от тела с определена форма и размери. В работата се разглежда бункер с конична форма, в който плават сферични тела. Определено е взаимното им разположение при определено минимално количество течност. Използван е класически геометричен подход, без програмни продукти, базиран на инверсно преобразование, който позволява на интересуващите се от този проблем инженери да вникнат в идеята на метода.

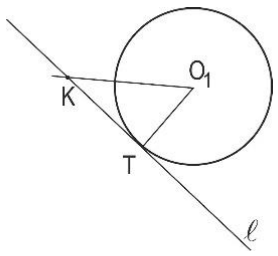
Ключови думи: плаващи сфери, коничен бункер, инверсно преобразование

В съд с конична форма и ъгъл при върха 90° плават три сфери с определени размери и плътност 1/2 от плътността на водата. Какъв е минималният обем вода, при който сферите плават свободно?.

Съдът естествено е с върха надолу и е изправен, така че повърхността на водата е окръжност S. Потапянето на сферите е такова, че центровете им лежат на повърхността.

1. Нека първоначално трите радиуса да са еднакви, R = 20 mm. При голям обем сферите могат да се придвижват по повърхността, докато не опрат в стените на съда. При една критична стойност стените на съда ще притиснат сферите една в друга, така че всяка ще се допира до съда и до другите две. В равнината на повърхността центровете на сферите ще застанат във върховете на равностранен триъгълник със страна 2R. Точките на допиране със съда ще са под повърхността. На Фиг. 1 сме определили разстоянието от центъра на всяка сфера до съда на нивото на повърхността.

Фигурата изобразява сечение на една вертикална равнина, която минава през центъра на едната сфера. O_1K е хоризонтална права в равнината на повърхността π на водата, ℓ е стената на съда под ъгъл 45°. T е точката на допиране на сферата със съда, $O_1T = R = 20$ mm.



Фиг. 1.

Триъгълникът O_1KT е правоъгълен и равнобедрен. Разстоянието от центъра на сферата до стената на съда е $O_1K = \sqrt{2}.R = \sqrt{2}.20$ mm.

Сега разглеждаме Фиг. 2, която е сечение на хоризонтална равнина π през центровете на сферите. Окръжността S е сечение на равнина π със стените на съда. Център на окръжността S е точка O, която е централна точка на $\Delta\ O_1O_2O_3$ поради симетрията. Определяме радиуса OK на окръжността S:

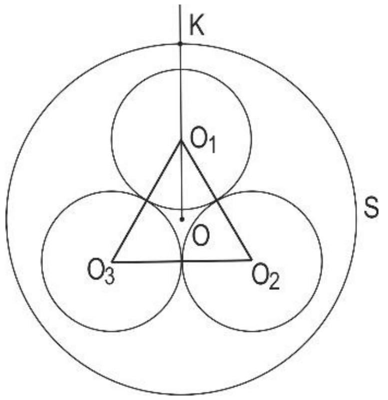
$$OK = OO_1 + O_1K\ ,$$

$$OO_1 = \frac{2}{3}h,$$

$h = \sqrt{3}.R$ - височина в $\Delta\, O_1O_2O_3$,

$$OO_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.r$$

$$OK = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + r_2\right).R \approx 51,378 \text{ mm}$$



Фиг. 2.

OK е критичният радиус, на който отговаря търсеният критичен обем на водата. Ако водата спадне, центровете на сферите ще се окажат над повърхността, или поне един от тях, а това означава, че няма да плават свободно. Остава да намерим обема $V = \pi.OK^2.H/3$.

H е височината на конуса, равна на OK. Така

$$V = \frac{\pi}{3}.OK^3 = \frac{\pi}{3}.51,378^3 \approx 142.10^3 \text{ mm}^3 = 142 \text{ cm}^3.$$

От този обем трябва да извадим обема на изместената от сферите вода:

$$V_1 = 3.\frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.R^3 \text{ (три полусфери).}$$

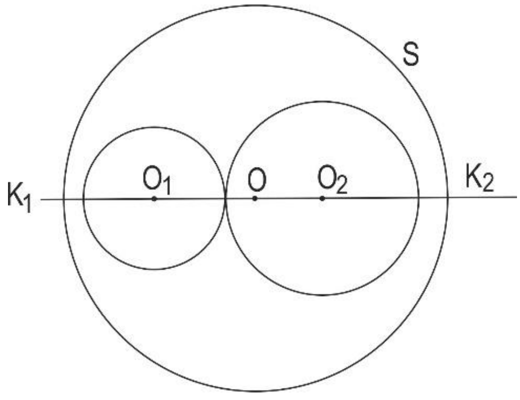
$$V_1 = 2\pi R^3 = 2\pi.20^3 \approx 50,26.10^3 \text{ mm}^3 = 50,26 \text{ cm}^3$$

$$V - V_1 = 142 - 50,26 = 91,74 \text{ cm}^3$$

Това е търсеният обем в случай **1** –еднакви сфери.

2. Ако имаме две две големи сфери и една малка, задачата се свежда до две сфери, чиито центрове ще лежат върху един диаметър на окръжността S при търсения минимален обем на водата. Двете големи сфери ще се допират една до друга и всяка от тях в стените на съда.

Нека те имат радиуси R_1 = 20 mm и R_2 = 30 mm. От Фиг.3 можем да определим радиуса на окръжност S - повърхността на водата.



Фиг. 3.

$$\left.\begin{aligned} O_1K_1 &= \sqrt{2}R_1 \\ O_2K_2 &= \sqrt{2}R_2 \end{aligned}\right\} \text{ Следва от Фиг. 1}$$

$$K_1K_2 = O_1K_1 + R_1 + R_2 + O_2K_2 = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(R_1 + R_2\right)$$

$$K_1K_2 = \left(\sqrt{2}+1\right).50 = 120,7 \text{ mm}.$$

Окръжността S - (сечението на повърхността на водата и съда) – се построява върху K_1K_2 като диаметър. При тези размери двете сфери ще са фиксирани на повърхността диаметрално разположени, а третата по-малка ще плава свободно между тях и стената на съда.

Ще определим само H – височината на водата при този критичен обем. Върхът на конуса и диаметърът K_1K_2 образуват равнобедрен триъгълник с височина H, равна на половината от основата K_1K_2

$$H = \frac{K_1K_2}{2} = 60,35 \text{ mm}.$$

3. Ако трите сфери са различни и близки по размери, в търсеното положение те ще плават както в случай **1** – всяка ще се допира до другите две и до стената на съда. Построенията са направени в хоризонтална равнина π - повърхността на водата.

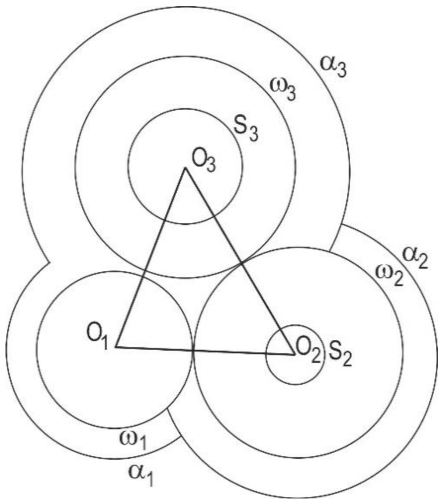
Нека R_1 = 20 mm,
R_2 = 25 mm,
R_3 = 30 mm.

Описание на построенията:

1) Сечението на π със сферите ще са трите окръжности $\omega_1(O_1R_1)$; $\omega_2(O_2R_2)$ и $\omega_3(O_3R_3)$. Центровете ще са върхове на триъгълник $O_1O_2O_3$ със страни $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_2O_3 = R_2 + R_3$ и $O_3O_1 = R_3 + R_1$. Построяваме този триъгълник и трите окръжности.

След това разширяваме трите окръжности, като умножаваме радиусите с $\sqrt{2}$.

Начертаваме още три окръжности: $\alpha_1\left(O_1, \sqrt{2}.R_1\right)$, $\alpha_2\left(O_2, \sqrt{2}.R_2\right)$ и $\alpha_3\left(O_3, \sqrt{2}.R_3\right)$ (Фиг. 4).



R_1 = 20 mm,
R_2 = 25 mm,
R_3 = 30 mm

O_1O_2=45 mm,
O_2O_3=55 mm,
O_3O_1=50 mm

Фиг. 4.

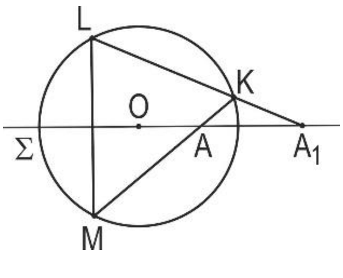
Окръжностите ω_1 и α_1 образуват венец, чиято ширина $\left(\sqrt{2}-1\right).R_1$ е равна на отстоянието между първата сфера и стената на съда в равнината π. Същото важи за другите две сфери. Техните отстояния ще бъдат $\left(\sqrt{2}-1\right).R_2$ и $\left(\sqrt{2}-1\right).R_3$.

Задачата се формулира като построяване на окръжност S, която се допира до трите окръжности α_1, α_2 и α_3, така че и трите да са вътре в окръжността S. Това е вариант на задачата на Аполоний като построителна задача, чието решение изисква използването на едно нелинейно, кръгово преобразование – инверсия.

Основните свойства на инверсията са:

1) Всички точки вътре в една окръжност Σ с радиус R се изобразяват в точки извън нея по правилото:

$$OA.OA_1 = R^2.$$



Фиг. 5.

Точка A_1 е инверсен образ на т. A и обратно.

$$A \xrightarrow{inv} A_1,\ A_1 \xrightarrow{inv} A$$

Ако е дадена т.A_1, за да намерим нейния образ A построяваме последователно правите: OA_1; A_1L, която пресича Σ в т. L и K; и LM, която е перпендикулярна на OA_1 и MK и пресича OA_1 в търсената точка A.

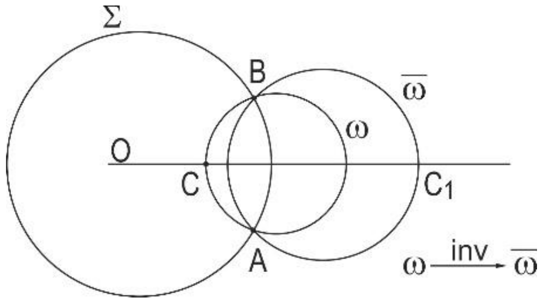
Точките на Σ остават върху нея.

2) Всяка окръжност, която не минава през центъра O, се изобразява в окръжност (Фиг. 6). Окръжността ω се изобразява в $\overline{\omega}$ $\omega \xrightarrow{inv} \overline{\omega}$ и се построява по следния начин:

Двете точки A и B са общи за Σ, ω и $\overline{\omega}$.

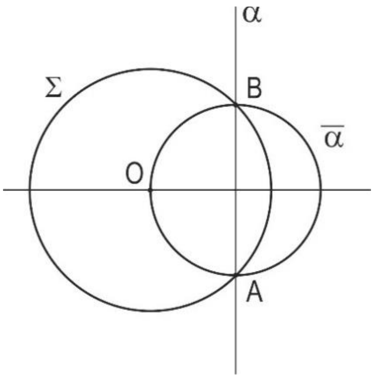
Намираме още една точка – точка C_1 , която е образ на C: $C \xrightarrow{inv} C_1$.

Сега можем да построим $\overline{\omega}$ по три дадени точки A, B и C_1.



Фиг. 6.

3) Всяка права, която не минава през центъра на инверсията O, се изобразява в окръжност, която минава през центъра O.



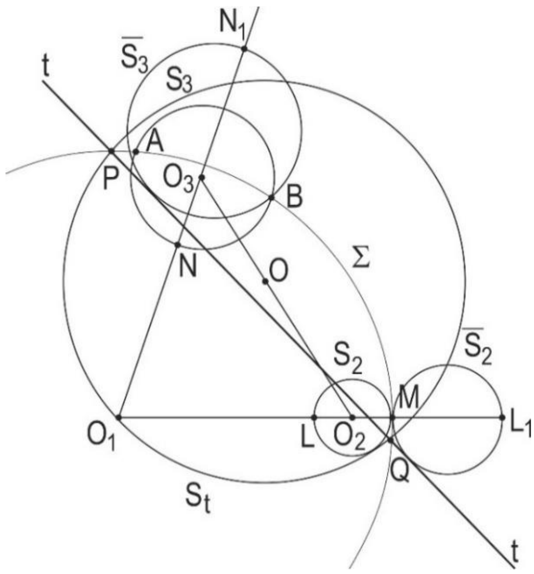
$\alpha \xrightarrow{inv} \overline{\alpha}$

α е права, която пресича Σ в A и B

$\overline{\alpha}$ е окръжност, която минава през O, A и B

Фиг. 7.

Сега можем да преминем към Фиг. 8, където е използвана инверсия и е намерен центърът на окръжността S.



Фиг. 8.

$M \xrightarrow{inv} M \quad \overline{S}_3$ през A, B и 1 (чрез симетралите)

$L \xrightarrow{inv} L_1 \quad \overline{S}_2$ с диаметър ML_1

$S_3 \xrightarrow{inv} \overline{S}_3$ t е допирателна до $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$

$S_2 \xrightarrow{inv} \overline{S}_2$

$t \xrightarrow{inv} S_t \quad S_t$ през P, Q и O_1

(симетралите на O_1P и O_1Q се пресичат)

S_t се допира до S_3 и S_2, така че S_3 и S_2 са вътре в S_t

O е пресечна т. на симетралите на O_1P и O_1Q

$$OO_1 + \sqrt{2}.R_1 = 39 + 28,3 = 67,3$$

Радиус на S - 67,3

t - допирателна до $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$

Най-напред са построени центровете на окръжностите от Фиг. 4 – O_1, O_2 и O_3.

За да построим окръжност S, която се допира до окръжностите α_1, α_2 и α_3, опростяваме задачата, като свиваме окръжността α_1 до точка O_1, а радиусите на α_2 и α_3 намаляваме с радиуса на $\alpha_1\left(\sqrt{2}.R_1\right)$.

Така α_2 се свива до окръжност S_2 с радиус $\left(\sqrt{2}.R_2 - \sqrt{2}.R_1\right)$, а α_3 се свива до окръжност S_3 с радиус $\left(\sqrt{2}.R_3 - \sqrt{2}.R_1\right)$.

Ако построим окръжност S_t, която минава през т.O_1 и се допира до окръжностите S_2 и S_3, можем да намерим търсената окръжност S само като увеличим радиуса на S_t с $\sqrt{2}.R_1$.

Задаваме инверсна окръжност Σ с център O_1 и радиус O_1M. M е пресечна точка на S_2 и правата O_1O_2. След това последователно намираме:

1) Инверсния образ на окръжност $S_2 \xrightarrow{inv} \overline{S}_2$.

S_2 и $\overline{S}_2$ ще имат обща точка M. Определяме още една точка от $\overline{S}_2$. Това е инверсният образ на т. $L \xrightarrow{inv} L_1$. Построяваме окръжност $\overline{S}_2$ върху ML_1 като диаметър.

2) Инверсния образ на окръжност $S_3 \xrightarrow{inv} \overline{S}_3$.

Двете окръжности S_3 и нейният образ $\overline{S}_3$ имат две общи точки A и B, които са точки от Σ. Определяме още една точка от $\overline{S}_3$ и това е т.N_1, инверсен образ на N $N \xrightarrow{inv} N_1$. Построяваме окръжност $\overline{S}_3$ по три точки A, B и N_1.

3) Построяваме обща допирателна до окръжностите $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$ - правата t.

4) Правим обратна инверсия:

Окръжността $\overline{S}_2$ преминава в S_2

Окръжността $\overline{S}_3$ преминава в S_3

Правата t преминава в окръжност S_t $t \xrightarrow{inv} S_t$, според 3) от основните свойства на инверсията, което е описано по-горе.

Това построение на окръжност S_t се извършва по три точки, които лежат на S_t $\rightarrow$ т.O_1 и пресечните точки P и Q на правата t и инверсната окръжност Σ.

Окръжност S_t ще се допира до окръжности S_2 и S_3, тъй като t се допира до $\overline{S}_2$ и $\overline{S}_3$.

Точка O е център на концентричните окръжности S_t и търсената S, която не е начертана.

Радиусът на S е по-голям от радиуса на S_t с $\sqrt{2}.R_1$ и е равен на $\left(OO_1 + \sqrt{2}.R_1\right)$.

Това е радиусът на повърхността на водата в съда при най-малкия обем, при който сферите плават свободно, така че центровете им са на повърхността на водата.

Височината на водата и обемът лесно се определят чрез стойността на този радиус.

Предлага се тази задача да бъде решена при наклон на съда на ъгъл α от вертикалата в диапазон, който не оставя съда празен.

Литература

Ануфриенко, С. А. 2019. *Инверсия. Геометрия Мора-Маскерони*, Ekaterinburg.

Жижилкин, И. Д. 2009. *Инверсия*, Москва.

Яглом, И. М. 1956. *Геометрические преобразования II*, Москва.