CALCULATION OF A TWO-WIRE LINE THROUGH MODELLING SQUARES OF RESISTANCES

Angel Zabchev

University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”, Sofia 1700, E-mail: angel.zabtchev@mgu.bg

Abstract: A model of a two-wire line is composed through a circuit of squares of resistances. By converting the circuits and solving the formulated equations, analytical expressions for precise solution are found.

Key words: two-wire line, distributed parameter circuits of resistances, delta-to-wye conversion.

ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА ДВУПРОВОДНА ЛИНИЯ ЧРЕЗ МОДЕЛИРАНЕ С КВАДРАТИ ОТ СЪПРОТИВЛЕНИЯ

Ангел Зъбчев

Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“, София 1700

Резюме: Съставен е модел на двупроводна линия чрез верига от квадрати от съпротивления. Чрез преобразуване на схемите и решаване на съставените уравнения са намерени аналитични изрази за точно решаване.

Ключови думи: двупроводна линия, разпределени параметри вериги от съпротивления, преобразуване звезда-триъгълник.

Увод

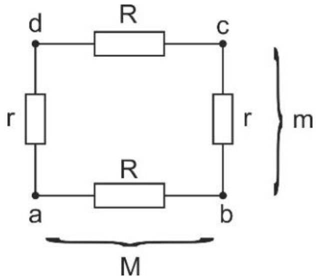
Една дълга двупроводна линия с разпределени параметри може да се представи чрез съпротивления – надлъжно R и напречно r, отговарящи на определена дължина на линията. Надлъжното съпротивление R съответства на съпротивлението на кабела за единица дължина, а напречното r съответства на съпротивлението на изолацията. Моделът разглежда квадрати от съпротивления. Последователно са решени вериги съставени от един, два и n квадрата.

1. Един квадрат

В квадрата от съпротивления, показан на фиг. 1 означаваме

$r_{ab} = M$ – измерено съпротивление между точки ***a*** и ***b***

$r_{bc} = m$ – измерено съпротивление между точки ***b*** и ***c***



Фиг. 1.

Изразяваме измерените съпротивления M и m чрез R и r:

$$M = R \,||\, \left(2r + R\right) \tag{1}$$

$$m = r \,||\, \left(2R + r\right) \tag{2}$$

С помощта на (1) и (2) изразяваме в явен вид функциите

$$R = f\left(M, m\right) \text{ и } r = f(M, m)$$

$$M = \frac{2r.R + R^2}{2r + 2R} \tag{3}$$

$$m = \frac{2r.R + r^2}{2r + 2R} \tag{4}$$

След изваждане на (4) от (3) се получава

$$M - m = \frac{R^2 - r^2}{2r + 2R} = \frac{\left(R - r\right)(R + r)}{2(r + R)}$$
$$2\left(M - m\right) = R - r \tag{5}$$

Следователно:

$$r = 2m - 2M + R \tag{6}$$

Заместваме стойността на r в (3) и преобразуваме:

$$M.2\left(2m-2M+R\right)+2MR=2\left(2m-2M+R\right).R+R^2$$
$$4Mm-4M^2+2MR+2MR=4mR-4MR+2R^2+R^2$$
$$3R^2-8MR+4mR+4M^2-4Mm=0$$

$$3.R^2+\left(4m-8M\right).R+\left(4M^2-4Mm\right)=0 \qquad (7)$$

Решаваме квадратното уравнение (7) спрямо R и получаваме:

$$R_{1,2}=\frac{8M-4m\pm\sqrt{D}}{6}$$

$$D=\left(4m-8M\right)^2-12\left(4M^2-4Mm\right)=$$
$$=16m^2-64Mm+64M^2-48M^2+48Mm=$$
$$=16M^2-16Mm+16m^2=16\left(M^2-Mm+m^2\right)$$

$$R_{1,2}=\frac{2}{3}\left(2M-m\pm\sqrt{M^2-Mm+m^2}\right) \qquad (8)$$

$$r_{1,2}=2m-2M+R_{1,2} \qquad (9)$$

При $m>M$ уравнение (7) има само един положителен корен, чиято стойност заместена в (9) дава положителна стойност за r. При $m<M$ уравнение (7) има два положителни корена $\left(R_1>R_2\right)$. По-малкият корен R_2 се елиминира, тъй като заместен в (9) дава отрицателна стойност на r.

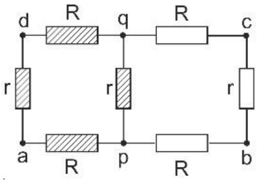
$$R=\frac{2}{3}\left(2M-m+\sqrt{M^2-Mm+m^2}\right) \qquad (10)$$

$$r=2m-2M+R \qquad (11)$$

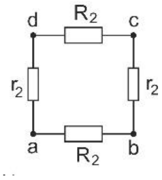
Тези изрази ни позволяват да определим съпротивленията R и r в четириполюсника (квадрата) от фиг. 1 чрез измерване с омметър на съпротивленията $M=r_{ab}$ и $m=r_{bc}$.

2. Два квадрата

Целта е схема от два квадрата (фиг. 2а) да се преобразува в еквивалентна схема от един квадрат (фиг. 2б).



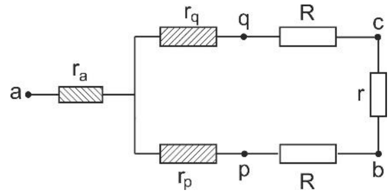
Фиг. 2а.



Фиг. 2б.

От фиг. 2а определяме $r_{ab}=M_2$ и $r_{bc}=m_2$.

Преобразуваме триъгълника от съпротивления a-p-q в звезда a-p-q.



Фиг. 3.

$$r_a=\frac{R\left(r+R\right)}{2R+2r}=\frac{R}{2} \qquad (12)$$

$$r_p=\frac{R.r}{2R+2r} \qquad (13)$$

$$r_q=\frac{r\left(r+R\right)}{2R+2r}=\frac{r}{2} \qquad (14)$$

$$r_{ab}=M_2=r_a+\left(r_q+R+r\right)||\left(r_p+R\right)$$

Заместваме съпротивленията на звездата от (12), (13) и (14) и определяме M_2:

$$M_2=\frac{R}{2}+\left(\frac{3r}{2}+R\right)||\left(\frac{Rr}{2\left(R+r\right)}+R\right) \qquad (15)$$

От фиг. 2а и фиг. 2б за m_2 намираме

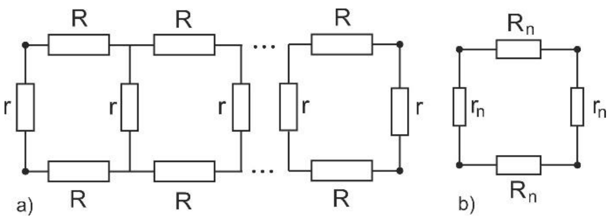
$$r_{bc}=m_2=\left[\left(2R+r\right)||r+2R\right]||r \qquad (16)$$

$$M_2=f\left(R,r\right)\xrightarrow{\text{чрез (10)}}R_2$$

$$m_2=f\left(R,r\right)\xrightarrow{\text{чрез (11)}}r_2$$

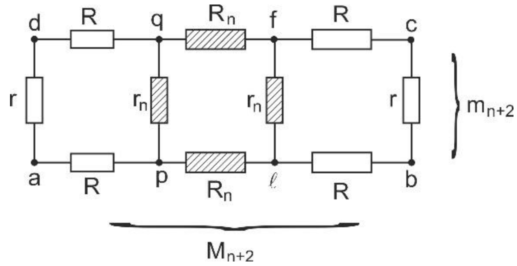
3. Редица от квадрати

Редица от n еднакви квадрати от съпротивления R и r могат да се представят чрез един квадрат от съпротивления R_n и r_n (фиг. 4).



Фиг. 4.

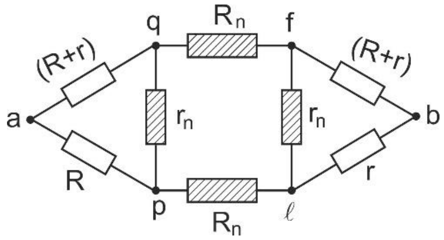
Разширяваме симетрично от ляво и отдясно този квадрат, така че броят им да стане $n+2$.



Фиг. 5.

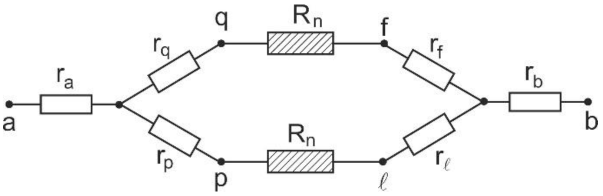
За да определим измерените стойности $M_{n+2} = r_{ab} = r_{cd}$ и $m_{n+2} = r_{bc} = r_{ad}$.

Преобразуваме схемата от фиг. 5 във фиг. 6:



Фиг. 6.

Преобразуваме триъгълника между точките a, p, q в звезда. В звезда преобразуваме и триъгълника между точките b, ℓ, f (фиг. 7).



Фиг. 7.

$$r_a = \frac{R(R+r)}{2R+r+r_n} = \frac{R(R+r)}{(R+r_n)+(R+r)} = \frac{R}{\dfrac{R+r_n}{R+r}+1} \tag{17}$$

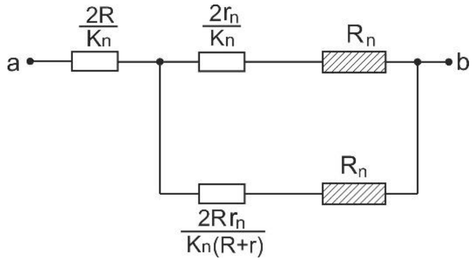
$$r_p = \frac{r_n.(R+r)}{2R+r+r_n} = \frac{r_n}{\dfrac{R+r_n}{R+r}+1} \tag{18}$$

$$r_p = \frac{R.r_n}{2R+r+r_n} = \frac{\dfrac{R.r_n}{R+r}}{\dfrac{R+r_n}{R+r}+1} \tag{19}$$

Полагаме

$$\frac{R+r_n}{R+r}+1 = K_n \tag{20}$$

Поради симетрията $r_a = r_b$, $r_q = r_f$ и $r_p = r_\ell$, схемата от фиг. 7 се опростява (виж фиг. 8).



Фиг. 8.

$r_{ab} = M_{n+2}$

$$\begin{aligned} M_{n+2} &= \frac{2R}{K_n} + \left(\frac{2r_n}{K_n} + R_n\right) \| \left(\frac{2Rr_n}{K_n(R+r)} + R_n\right) \\ K_n &= \frac{R+r_n}{R+r} + 1 \end{aligned} \tag{21}$$

Схемата от фиг. 8 и израз (21) позволяват да определим M_{n+2}.

$$M_{n+2} = f(R, r, R_n, r_n)$$

От фиг. 5 определяме $m_{n+2} = r_{bc}$.

$$\begin{aligned} m_{n+2} &= \left\{\left[(2R+r) \| r_n + 2R_n\right] \| r_n + 2R\right\} \| r \\ m_{n+2} &= f(R, r, R_n, r_n) \end{aligned} \tag{22}$$

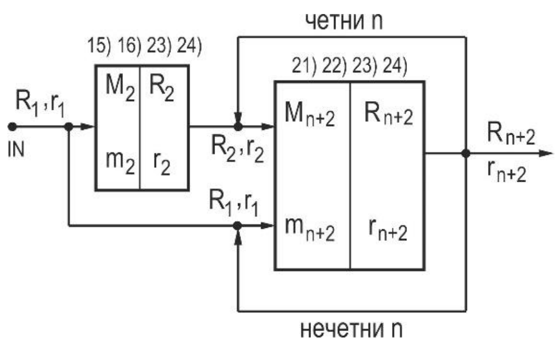
Двата израза (10) и (11), които са изведени за един квадрат, можем да обобщим така:

$$R_n = \frac{2}{3}\left(2M_n - m_n + \sqrt{M_n^2 - M_n m_n + m_n^2}\right) \tag{23}$$

$$r_n = 2m_n - 2M_n + R_n \tag{24}$$

Редица от n броя квадрати от съпротивления R, r може да се преобразува в един квадрат със съпротивления R_n и r_n чрез алгоритъм, който включва получените до тук изрази.

Блоково алгоритъма е представен на фиг. 9.



Фиг. 9.

Входни величини са $R_1 = R$ и $r_1 = r$ при $n = 1$. Това са съпротивленията на един квадрат.

За да определим R_2 и r_2 еднократно се използва изчислителна процедура чрез изразите (15), (16), (23) и (24) като от R_1 и r_1 най-напред се определят M_2 и m_2 и след това R_2 и r_2 .

Стойностите на четирите съпротивления R_1, r_1, R_2 и r_2 постъпват на блок, който осъществява изчислителна процедура, повтаряна многократно докато се определят стойностите на R_n и r_n при предварително зададено n.

Таблица 1.

n	(21)	(22)	(23)	(24)
№	**M**	**m**	**R**	**r**
1			1	10
2	**(15)** 1,833	**(16)** 4,271	2,071	6,947
3	2,627	3,854	3,207	6,381
4	3,358	3,684	4,376	5,028
5	4,066	3,742	5,536	4,888
6	4,702	3,577	6,720	4,470
7	5,345	3,614	7,867	4,405
8	5,955	3,559	9,027	4,235
9	6,561	3,579	10,155	4,191
10	7,154	3,560	11,269	4,081

Чрез циклично повторение, започвайки от R_1 и r_1 след прилагане на изрази (21), (22), (23) и (24) се определят всички съпротивления с нечетен индекс n: R_3 и r_3 ; R_5 и r_5 ; R_7 и r_7 и т.н.

Чрез циклично повторение, започвайки от R_2 и r_2 се определят съпротивленията с четни индекси: R_4 и r_4 ; R_6 и r_6 и т.н.

В таблица 1 са дадени резултати от числен пример, получени по гореописаната процедура.

Заключение

Чрез получените аналитични изрази може да се състави програма за изчисляване на верига от съпротивления, състояща се от n на брой квадрати. Тази верига от квадрати, решена аналитично може да се използва за моделиране на дълги линии и други физически обекти, които се характеризират с надлъжни и напречни параметри, отнесени към единица от дължината им.

Литература

Атабеков, Г.И. 1960. *Теория линейных электрическия цепей*. Москва.

Сешу, С., Н. Балабанян. 1963. *Анализ линейных цепей*. Москва.