CHART OF CURRENTS IN PARALLEL-CONNECTED CIRCUITS

Angel Zabchev

University of Mining and Geology “St. Ivan Rilski”, 1700 Sofia; Email: angel.zabtchev@mgu.bg

Abstract: A graphical method is shown for determining the currents in parallel-connected circuits with two adjustable elements based on the method of circuit diagrams.

Key words: connected circuits, circuit diagrams.

ГРАФИКА НА ТОКОВЕТЕ В УСПОРЕДНО СВЪРЗАНИ ВЕРИГИ

Ангел Зъбчев

Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“, София 1700

Резюме: Показан е графичен метод за определяне на токовете в успоредно свързани вериги с два регулируеми елемента, основан на метода на кръговите диаграми.

Ключови думи: свързани вериги, кръгови диаграми.

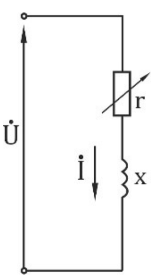
Въведение

Поставена е една задача за определяне на токовете в успоредно свързани вериги с два регулируеми елемента. Задачата е решена геометрично чрез вектори вътре в една фигура, която се определя от кръговите диаграми на веригата.

Извод на основната кръгова диаграма

В статичен режим, когато всички параметри на една верига за променлив ток са установени, токовете, напреженията и импедансите се записват като комплексни числа и се изобразяват като точки в комплексната равнина. Векторите, които свързват началото на координатната система и съответните точки, представляват векторна диаграма на режима. На фиг.1 съпротивлението r се променя от 0 до ∞, а индуктивното съпротивление е константно ($x = \mathrm{const}$).

Импедансът е $\dot{\mathrm{Z}} = \mathrm{r} + \mathrm{jx}$, а спрегнатата стойност е $\overset{*}{\mathrm{Z}} = \mathrm{r} - \mathrm{jx}$.

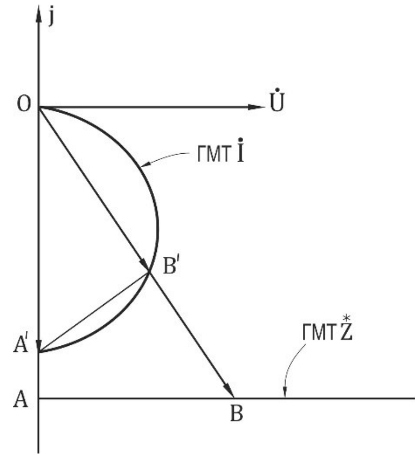


Фиг. 1. r-L верига в която r се променя от нула до безкрайност

Съвкупностите от всички стойности на $\dot{\mathrm{Z}}$ и $\overset{*}{\mathrm{Z}}$ се представят чрез прави линии, успоредни на реалната ос, на разстояния съответно $\boldsymbol{x}$ и $-\boldsymbol{x}$ от нея. Казваме, че при изменение на r от 0 до ∞ всяка от тези линии представлява геометричното място на точки (ГМТ) $\dot{\mathrm{Z}}$ и $\overset{*}{\mathrm{Z}}$ (или техния ходограф).

На фиг. 1а ГМТ $\overset{*}{\mathrm{Z}}$ е начертано като отсечка AB, успоредна на реалната ос. С цел да не се обременява изложението и чертежа не е даден мащаб.

Импедансът, токът и напрежението имат свои мащаби, които свързват стойностите на физическите величини с дължини на отсечки.



Фиг. 1а. Ходограф на тока $\dot{\mathrm{I}}$

Например отсечката OA чрез мащаба на импеданса отговаря на индуктивното съпротивление x.

$$\mathrm{OA} \Longrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{const.} \tag{1}$$

Също така

$$\mathrm{AB} \Longrightarrow \mathrm{r} = \mathrm{var} \tag{2}$$

$$\overline{\mathrm{OB}} \Longrightarrow \overset{*}{\mathrm{Z}} \tag{3}$$

Отсечката OA' чрез мащаба на тока отговаря на максималната стойност на тока Im. ($\mathrm{OA}' \Longrightarrow \mathrm{Im}$).

Im е чисто индуктивен ток при r = 0.

Захранващото напрежение е вектор $\dot{\mathrm{U}}$, който е константа и лежи върху реалната (хоризонталната) ос.

За една друга позиция на т.A по хоризонталната права векторът $\overline{\mathrm{OB}}$ представлява импеданса $\overset{*}{\mathrm{Z}}$ ($\overline{\mathrm{OB}} \Longrightarrow \overset{*}{\mathrm{Z}}$), а векторът $\overline{\mathrm{OB}'}$ представя тока $\dot{\mathrm{I}}$ ($\overline{\mathrm{OB}'} \Longrightarrow \dot{\mathrm{I}}$) тъй като аргументът на $\overset{*}{\mathrm{Z}}$ е равен на аргумента на $\dot{\mathrm{I}}$ в тази точка.

Ще докажем, че когато точка B се движи по правата AB, точка B' се движи по полуокръжност с диаметър OA'.

$\dot{\mathrm{Z}}.\dot{\mathrm{I}} = \dot{\mathrm{U}}$ - закон на ОМ (4)

$$\mathrm{Z.I} = \mathrm{U} = \mathrm{const} \tag{5}$$

$$\mathrm{OA.OA}' = \mathrm{OB.OB}' \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OB}'}{\mathrm{OA}'} \tag{7}$$

следователно триъгълниците OAB и OB’A’ са подобни ($\Delta\mathrm{OAB} \sim \Delta\mathrm{OB'A'}$) тъй като имат общ ъгъл $\measuredangle\mathrm{AOB}$.

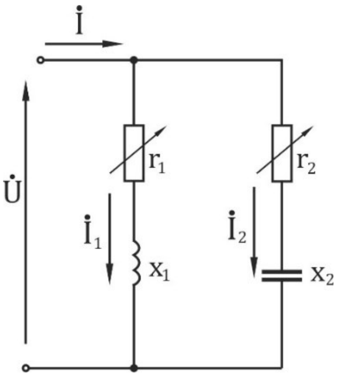
След като двата триъгълника са подобни това означава, че $\measuredangle\mathrm{OB'A'}$ е прав и точка B' се движи по окръжност. Този факт е основата на графичния “метод на кръговите диаграми”. Геометричната му интерпретация е кръговото преобразование „инверсия“.

Изводът от анализа на фиг.1а е, че когато ходографът на импеданса е права линия, ходографът на тока е окръжност.

Добавяне на Г-С верига

На фиг. 2 е показна Г-С верига, успоредно свързана към веригата от фиг.1. Ако двата елемента r_2 и x_2 са с установена стойност, токът през тях $\dot{\mathrm{I}}_2$ не се променя. На фиг. 2а е показано как се построява ГМТ $\dot{\mathrm{I}}$.

8) $\dot{\mathrm{I}} = \dot{\mathrm{I}}_1 + \dot{\mathrm{I}}_2$

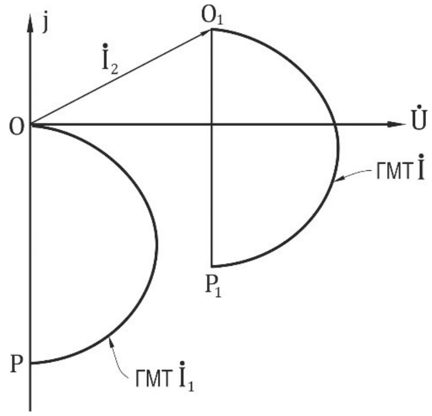


Фиг. 2. Успоредно свързани r-L и r-C вериги

ГМТ $\dot{\mathrm{I}}_1$ е полуокръжност $\widehat{\mathrm{OP}}$.

Тази полуокръжност се транслира (успоредно премества) до полуокръжност $\widehat{\mathrm{O_1P_1}}$, която представлява ГМТ $\dot{\mathrm{I}}$ (кръговата диаграма на тока $\dot{\mathrm{I}}$). Посоката и разстоянието на транслацията се определят от тока $\dot{\mathrm{I}}_2$.

$$\dot{\mathrm{I}}_1 = \mathrm{var} \quad \dot{\mathrm{I}}_2 = \mathrm{const}$$

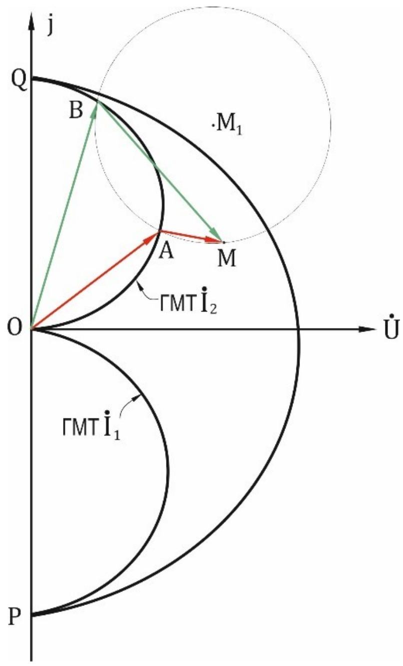


Фиг. 2а. Транслация на ГМТ $\dot{\mathrm{I}}_1$

Успоредно свързвани вериги с две управляеми съпротивления $\mathbf{r_1}$ и $\mathbf{r_2}$

Нека съпротивленията r_1 и r_2 от фиг. 2 се променят от 0 до ∞, при $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$.

ГМТ $\dot{\mathrm{I}}_1$ е полуокръжност $\widehat{\mathrm{OP}}$ (фиг. 2b). Максималната стойност на този ток при $\mathrm{r}_1 = 0$ е $\mathrm{I}_{1\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{x}_1}$ и се изобразява с отсечка OP. Този ток е чисто индуктивен.



Фиг. 2b. $\mathbf{x_1 = x_2} \quad \mathbf{r_1(0 \div \infty)} \quad \mathbf{r_2(0 \div \infty)}$

ГМТ $\dot{\mathrm{I}}_2$ е полуокръжност $\widehat{\mathrm{OQ}}$. Максималната стойност на този чисто капацитивен ток при $\mathrm{r}_2 = 0$ е $\mathrm{I}_{2\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{x}_2}$ и се изобразява с отсечка OQ.

ГМТ на общия ток $\dot{\mathrm{I}} = \dot{\mathrm{I}}_1 + \dot{\mathrm{I}}_2$ при два регулируеми елемента не е линия, а повърхност.

На фиг. 2b тази повърхност е затворена между полуокръжностите $\widehat{\mathrm{OP}}$, $\widehat{\mathrm{OQ}}$ и $\widehat{\mathrm{PQ}}$.

Всички възможни стойности на тока $\dot{\mathrm{I}}$ са точки от комплексната равнина, които са вътре в тази фигура. Фигурата се получава чрез транслация на полуокръжност

$\widehat{OP}$ така, че точка 0 се движи по направляващата дъга $\widehat{OQ}$ докато съвпадне с точка Q. Дъгата $\widehat{OP}$ описва (маркира) цялата повърхност на фигурата. Сега избираме произволна точка M вътре във фигурата. Векторът $\overline{OM}$ е вектор на общия ток $\dot{I}$. Искаме да определим двата тока $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, чиято сума дава тока $\dot{I}$.

Построението е просто. Вертикално нагоре от точка M намираме точка M_1, така че $MM_1 = \frac{OP}{2}$. С център M_1 описваме окръжност с радиус MM_1, която пресича полуокръжност $\widehat{OQ}$ в две точки A и B. Двете точки дават две решения поради една особеност на фигурата – при движението си дъгата $\widehat{OP}$ преминава по два пъти през всяка произволно избрана точка M.

$\overline{OA}$ е вектор на тока $\dot{I}_2'$.

$\overline{AM}$ е вектор на тока $\dot{I}_1'$.

$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$ или $\dot{I} = \dot{I}_1' + \dot{I}_2'$.

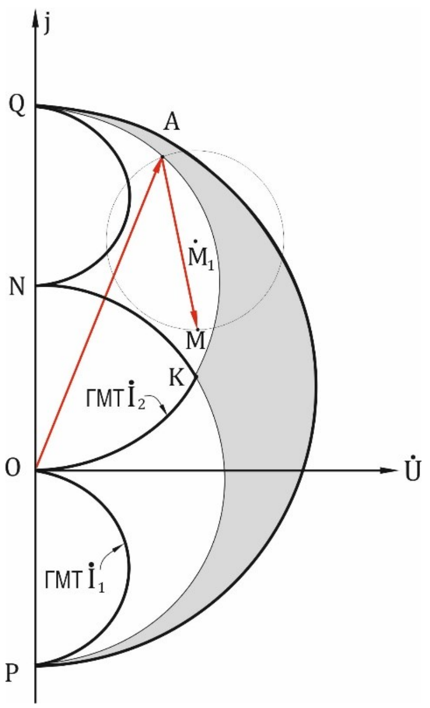
$\overline{OB}$ е вектор на тока $\dot{I}_2''$.

$\overline{BM}$ е вектор на тока $\dot{I}_1''$.

$\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM}$ или $\dot{I} = \dot{I}_1'' + \dot{I}_2''$.

На фиг. 2c, разглежданата повърхност е построена при $X_1 > X_2$ т.е. $I_{1m} < I_{2m}$

OP < OQ.



Фиг. 2c. $\mathbf{x_1 > x_2 \quad I_{1m} < I_{2m}}$

Полуокръжност $\widehat{OP}$ е ГМТ на $\dot{I}_1$, а полуокръжност $\widehat{OQ}$ е ГМТ на $\dot{I}_2$.

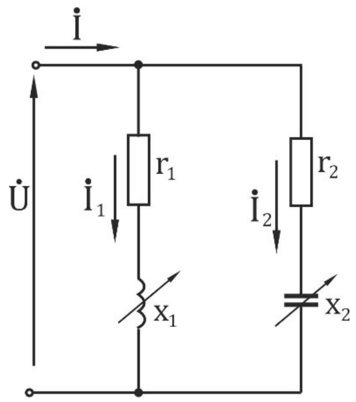
Дъгата $\widehat{OP}$ се движи чрез транслация по направляващата окръжност $\widehat{OQ}$ и описва начертаната фигура, ограничена от дъгите $\widehat{OP}$, $\widehat{OK}$, $\widehat{KN}$, $\widehat{NQ}$ и $\widehat{QP}$.

В тази фигура има една област (двойна повърхност), в която задачата има две решения както на фиг. 2b. Тази област е ограничена от дъгите $\widehat{PK}$, $\widehat{QK}$ и $\widehat{QP}$.

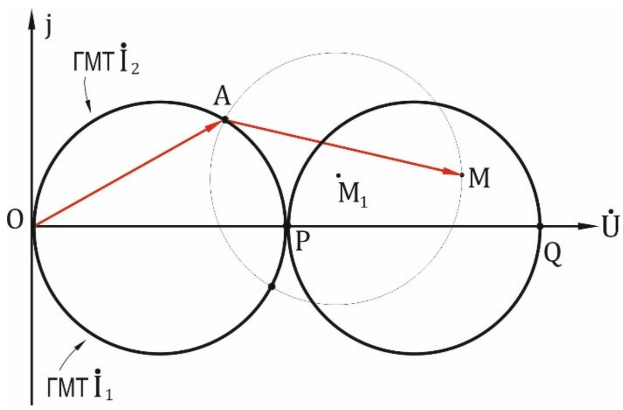
На фиг. 2c точка M е извън двойната повърхност и дава едно решение. По същия начин намираме т. M_1 вертикално нагоре, така че $MM_1 = \frac{OP}{2}$. Начертаваме окръжност с център M_1 и радиус MM_1, която пресича полуокръжност $\widehat{OQ}$ в точка A. Вектор $\overline{OA}$ е токът $\dot{I}_2$, а вектор $\overline{AM}$ е токът $\dot{I}_1$.

Успоредно свързвани вериги с две управляеми съпротивления x_1 и x_2

На фиг. 3 реактивните съпротивления x_1 и x_2 се променят независимо едно от друго от 0 до ∞. На фиг. 3a долната полуокръжност $\widehat{OP}$ е ГМТ на индуктивния ток $\dot{I}_1$, а горната полуокръжност $\widehat{OP}$ е ГМТ на капацитивния ток $\dot{I}_2$.



Фиг. 3. $\mathbf{x_1(0 \div \infty) \quad x_2(0 \div \infty)}$



Фиг. 3a. $\mathbf{r_1 = r_2 \quad x_1(0 \div \infty) \quad x_2(0 \div \infty)}$

ГМТ на общия ток $\dot{I}$ е повърхността, затворена в двете окръжности на фиг. 3a. Тази фигура се описва от дъгата $\widehat{OP}$ на ГМТ $\dot{I}_1$ при транслация докато съвпадне с долната полуокръжност $\widehat{PQ}$, така че точка O се движи по направляващата полуокръжност $\widehat{OAP}$.

Всички възможни стойности на тока $\dot{I}$ са точките, затворени в двете окръжности с диаметри OP и PQ. Нека чрез точка M да зададем тока $\dot{I}$. Искаме да определим токовете $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$, така че:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2.$$

Задачата има само едно решение. То се намира по следния начин. Наляво от точка M в хоризонтална посока определяме точка M_1, така че $MM_1 = \frac{OP}{2}$.

С център M_1 и радиус M_1M начертаваме окръжност, която пресича ГМТ $\dot{I}_2$ в точка A.

$\overline{OA}$ е вектор на тока $\dot{I}_2$ (капацитивен).

$\overline{AM}$ е вектор на тока $\dot{I}_1$ (индуктивен).

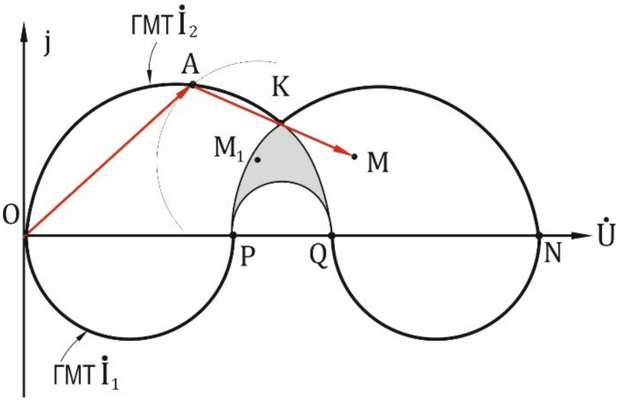
$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}$ или $\dot{I} = \dot{I}_2 + \dot{I}_1$.

На фиг. 3b е начертана ГМТ $\dot{I}$, при $r_1 > r_2$ т.е. $\dot{I}_{1m}(\overline{OP})$ е по-малко от $\dot{I}_{2m}(\overline{OQ})$. Фигурата се получава чрез транслация на ГМТ $\dot{I}_1$ докато съвпадне с полуокръжност $\widehat{QN}$ така че точка O да се движи по направляващата полуокръжност $\widehat{OKQ}$ (ГМТ $\dot{I}_2$). Фигурата е затворена от полуокръжностите $\widehat{OP}$, $\widehat{PQ}$ и $\widehat{QN}$ отдолу и от дъгите $\widehat{OK}$ и $\widehat{KN}$ отгоре.

Маркираният участък PQK е двойна повърхност. Когато общия ток (точка M) попада в нея, задачата за определяне на $\dot{I}_1$ и $\dot{I}_2$ има две решения. Когато точка M е извън нея, задачата има едно решение. Както на фиг. 3а точка M е точка на общия ток $\dot{I}$, точка M_1 е на разстояние $M'M = \frac{OP}{2}$ от M. Окръжността с център M_1 и радиус M_1M пресича дъгата $\widehat{OK}$ (ГМТ $\dot{I}_2$) в точка A.

$\overline{OA}$ е вектор на тока $\dot{I}_2$ (капацитивен)

$\overline{AM}$ е вектор на тока $\dot{I}_1$ (индуктивен).



Фиг. 3b. $\mathbf{r_1 > r_2} \quad \mathbf{I_{1m} < I_{2m}}$

Успоредно свързвани вериги с две управляеми съпротивления r_1 и x_2

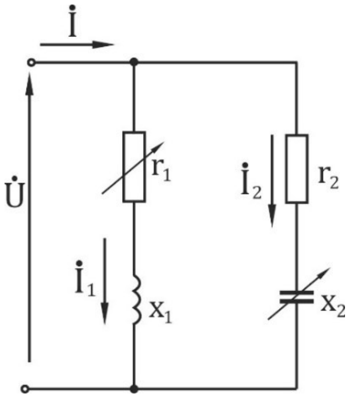
На фиг. 4 активното съпротивление r_1 и реактивното съпротивление x_2 се променят независимо едно от друго от 0 до ∞. На фиг. 4а е показана графиката на тока $\dot{I}$ при условие, че:

$$r_2 = x_1 \text{ и } I_{1m} = I_{2m}.$$

Полуокръжност $\widehat{OP}$ е ГМТ $\dot{I}_1$.

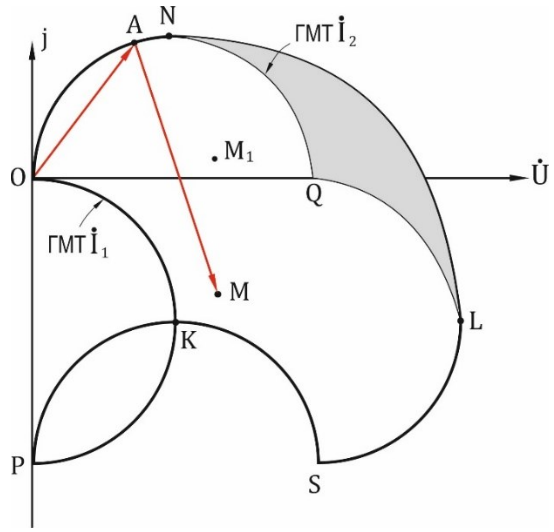
Полуокръжност $\widehat{OQ}$ е ГМТ $\dot{I}_2$.

OP = OQ.



Фиг. 4. $\mathbf{r_1(0 \div \infty) \quad x_2(0 \div \infty)}$

Фигурата се получава при транслация на полуокръжност $\widehat{OP}$, така че точка O винаги да лежи върху направляващата полуокръжност $\widehat{OQ}$. Повърхността е затворена между дъгите $\widehat{OP}$, $\widehat{PS}$, $\widehat{ON}$, $\widehat{SL}$ и $\widehat{NL}$. $\widehat{NL}$ е част от окръжност с център K.



Фиг. 4а. $\mathbf{r_2 = x_1} \quad \mathbf{I_{1m} = I_{2m}}$

Маркираният участък между точките N, Q и L е „двойна повърхност“. Ако точка M попадне в нея, задачата има две решения. По вече описания начин при дадена точка M намираме M_1 вертикално нагоре на разстояние $MM_1 = \frac{OP}{2}$. Окръжността с център M_1 и радиус M_1M пресича полуокръжноста OQ в точка A.

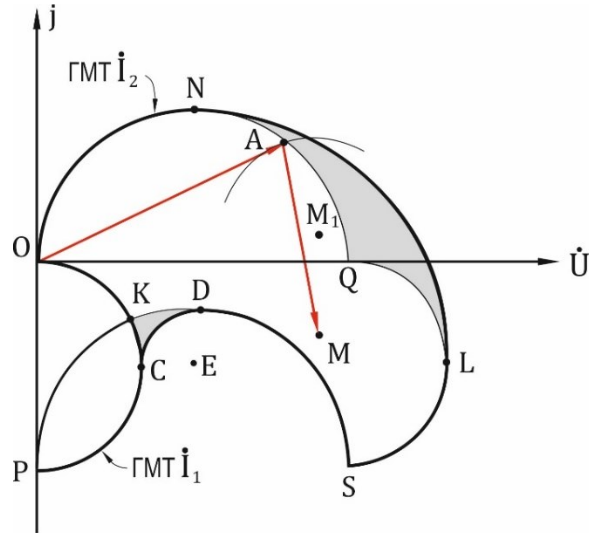
$\overline{OA}$ е вектор на тока $\dot{I}_2$.

$\overline{AM}$ е вектор на тока $\dot{I}_1$.

$\overline{OM}$ е вектор на тока $\dot{I}$.

На фиг. 4b е показан случай, при който $r_1 > r_2$ и съответно $I_{1m} < I_{2m}$.

OP отговаря на I_{1m}, а OQ на I_{2m}. Тук полуокръжност $\widehat{OP}$ се премества чрез транслация докато достигне полуокръжност $\widehat{QS}$, така че точка O винаги лежи върху направляващата полуокръжност $\widehat{OQ}$. При това движение дъгата $\widehat{OP}$ описва повърхността на фиг. 4b.



Фиг. 4b. $\mathbf{r_1 > x_2}$ $\quad$ $\mathbf{I_{1m} < I_{2m}}$

Тази повърхност е оградена от дъгите $\widehat{OK}$, $\widehat{KP}$, $\widehat{PC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DS}$, $\widehat{SL}$, $\widehat{LN}$ и $\widehat{NO}$.

Дъгите $\widehat{CD}$ и $\widehat{LN}$ имат общ център в точка E.

Маркираните области на „двойна повърхност“ са две – между точките C, D и К и N, L и Q. В тези области задачата има две решения. Точка M е точка на общия ток $\dot{I}$, $M_1M = \frac{OP}{2}$.

Окръжността с център M_1 и радиус M_1M пресича полуокръжност $\widehat{OQ}$ в точка A.

$\overline{OA}$ е вектор на тока $\dot{I}_2$.

$\overline{AM}$ е вектор на тока $\dot{I}_1$.

Заключение

Успоредно свързаните вериги може да са само r-L, само r-C или смесени. Освен за разгледаните тук две успоредно свързани вериги, методът на успоредно пренасяне на полуокръжност може да се използва и за три, и четири успоредно свързани вериги.

Поставената задача, при зададен общ ток да се определят токовете в отделните клонове, е решена графично.

Литература

Смит, Ф. (1976). *Круговые диаграмы в радиоэлектронике*. М., Связь.

Воронов, Р. А. (1941). Круговые диаграмы. *Известия Томского института имени Кирова. 59*, II.

Хорст Фрай. (1981). *Въведение в теорията на кръговите диаграми*. Техника, С.