Авторска справка за приносния характер на трудовете на Елза Иванова-Димова, представени за участие в конкурс за доцент по математика /геометрия и топология/

Област 4. Природни науки, математика и информатика
4.5. Математика
В4. Хабилитационен труд – научни публикации в издания, които са реферирани и индексирани в световноизвестни бази данни с научна информация (Web of Science и Scopus).

(Изискват се 100 точки. Представени са 2 научни публикации, носещи общо 105 точки.)

В4-1. Elza Ivanova-Dimova, Lower-Vietoris-type topologies on hyperspaces, *Topology and its Applications*, 220 (2017), 100-110, **IF 0.549, Web of Science Quartile: Q3**, http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2017.02.011, ISSN (print) 0166-8641, ISSN (electronic) 1879-3207, *MR3619282, Zbl 1365.54013* (**45 точки**)

Резюме

През 1975 г., М. М. Чобан [M. M. Čoban, Operations over sets, Sibirsk. Mat. Ž., 16 (1975), no. 6, 1332-1351] дефинира нова топология в множеството от всички затворени подмножества на едно топологично пространство, която е подобна на виеторисовата хипертопология, но е по-слаба от нея. През 1998 г., Г. Димов и Д. Вакарелов [G. Dimov and D. Vakarelov, On Scott consequence systems, Fundamenta Informaticae, 33 (1998), 43-70] въведоха понятието *хипертопология от тихонов тип*. Класът от всички хипертопологии от тихонов тип съдържа класа от всички хипертопологии на Чобан. Хипертопологиите от тихонов тип (които се наричат още и *хипертопологии от горно-виеторисов тип*), са подробно изучени в работата [G. Dimov, F. Obersnel and G. Tironi, On Tychonoff-type hypertopologies, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium (Prague, Czech Republic, August 19–25, 2001), Topology Atlas, Toronto, 2002, 51-70].

В настоящата статия е въведено ново понятие, а именно понятието *хипертопология от долно-виеторисов тип*, по начин подобен на този, по който в цитираната по-горе статия на Димов-Вакарелов е въведено понятието хипертопология от тихонов тип, и е показано, че то е различно от класическото понятие *долна виеторисова хипертопология*. Изучени са свойствата на хипертопологиите от долно-виеторисов тип, както и изображенията между хиперпространствата, чиято топология е от долно-виеторисов тип, обобщени са редица резутати от работата [E. Cuchillo-Ibáñez, M. A. Morón and F. R. Ruiz del Portal, Lower semifinite topology in hyperspaces, Topology Proceedings, 17 (1992), 29-39] и е доказана теорема относно "комутативността между хиперпространства и подпространства" в класа от всички хипертопологии от долно-виеторисов тип, която обобщава една теорема на Х.-Ю. Шмидт [H.-J. Schmidt, Hyperspaces of quotient and subspaces. I. Hausdorff topological spaces, Math. Nachr. 104 (1981), 271-280].

По-конкретно,

• изучават се взаимоотношенията между топологичните свойства на топологичните пространства и на техните хиперпространства, разглеждани с топологии от долно-виеторисов тип, а именно, топологичните свойства "компактност" и "тегло, не по-голямо от дадено кардинално число";

показва се, че при някои естествени допълнителни условия, хиперпространствата с топологии от долно-виеторисов тип

• имат тривиален хомотопен тип,

• явяват се абсолютни екстензори за класа от всички топологични пространства,

• имат свойството за неподвижната точка (т.е. всяко непрекъснато изображение на пространството в себе си има неподвижна точка).

Едно от следствията на нашата теорема за неподвижната точка е следното: *ако* $f : X \longrightarrow X$, *където* X *е континуум, е непрекъснато изображение, то съществува подконтинуум* K *на* X, *такъв че* $f(K) = K$.

За да представим по-подробно нашите резултати, ще използваме следните означения:

Ако X е множество, то с $\mathcal{P}(X)$ (респ., с $\mathcal{P}'(X)$) ще означаваме множеството от всички (непразни) подмножества на X; ако $\mathcal{M}, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ и $A \subseteq X$, то полагаме:

• $A^-_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{M \in \mathcal{M} \mid M \cap A \neq \emptyset\}$

• $\mathcal{A}^-_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{A^-_{\mathcal{M}} \mid A \in \mathcal{A}\}$;

ако $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство, то полагаме:

• $\mathrm{CL}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{M \subseteq X \mid M \text{ е затворено в } X,\ M \neq \emptyset\}$.

Нека X е множество. Да напомним, че една подфамилия $\mathcal{U}$ на $\mathcal{P}(X)$ може да бъде предбаза на топология $\mathcal{T}$ в X тогава и само тогава, когато $\bigcup \mathcal{U} = X$; ако това условие е изпълнено, то ще казваме, че *семейството* $\mathcal{U}$ *поражда топологията* $\mathcal{T}$ *в* X. Някои автори считат, че всяка подфамилия $\mathcal{U}$ на $\mathcal{P}(X)$ може да бъде предбаза на топология в X, разглеждайки като предбаза на тази топология фамилията $\mathcal{U} \cup \{X\}$, вместо $\mathcal{U}$. Ние, обаче, няма да считаме така.

Нека $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство. Да напомним, че класическата *долна виеторисова топология* Υ_{-X} в $\mathrm{CL}(X)$ се поражда от фамилията $\mathcal{T}^-_{\mathrm{CL}(X)}$, т.е. от фамилията от всички множества от вида $\{F \in \mathrm{CL}(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\}$, където U е отворено в X.

Една тривиална модификация на тази дефиниция е следната:

Нека $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. Топологията $\Upsilon_{-\mathcal{M}}$ в $\mathcal{M}$, породена от фамилията $\mathcal{T}^-_{\mathcal{M}}$, ще наричаме **долна виеторисова топология в** $\mathcal{M}$.

Очевидно, ако $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$, то $\Upsilon_{-\mathcal{M}}$ съвпада с класическата долна виеторисова топология Υ_{-X} в $\mathrm{CL}(X)$.

Сега ще въведем основното понятие в настоящата статия, разглеждайки не само произволни подфамилии $\mathcal{M}$ на $\mathcal{P}'(X)$, но и тръгвайки от **множество** X, вместо от топологично пространство:

Нека X **е множество,** $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ **и** $\mathcal{O}$ **е топология в** $\mathcal{M}$**. Ще казваме, че** $\mathcal{O}$ **е *топология от долно-виеторисов тип в*** $\mathcal{M}$ **ако** $\mathcal{O} \cap \{A^-_{\mathcal{M}} \mid A \subseteq X\}$ **е предбаза на** $\mathcal{O}$**.**

Ясно е, че ако X е топологично пространство, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ и $\mathcal{O}$ е долна виеторисова топология в $\mathcal{M}$, то $\mathcal{O}$ е топология от долно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$.

Макар че топологиите от долно-виеторисов тип в $\mathcal{O}$ са дефинирани в подфамилии $\mathcal{M}$ на фамилията $\mathcal{P}'(X)$ от всички непразни помножества на едно **множество** X, то се оказва, че те всъщност се пораждат по начин подобен на този, по който се пораждат долните виеторисови топологии в $\mathcal{M}$, т.е. в множеството X може да се въведе топология $\mathcal{T}$, която да има предбаза $\mathcal{P}$, такава че $\mathcal{P}^-_{\mathcal{M}}$ да е предбаза на $\mathcal{O}$. А именно, доказано е следното твърдение:

Нека X е множество, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ и $\mathcal{O}$ е топология от долно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$. Тогава фамилията

$$\mathcal{P}_{\mathcal{O}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{A \subseteq X \mid A^-_{\mathcal{M}} \in \mathcal{O}\}$$

съдържа X и служи като предбаза на топология

$$\mathcal{T}_{-\mathcal{O}}$$

в X. Фамилията $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}})^-_{\mathcal{M}}$ е предбаза на $\mathcal{O}$. Фамилията $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ е затворена относно произволни обединения.

Нещо повече, ние показваме, че *ако X е множество и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$, то една топология $\mathcal{O}$ в $\mathcal{M}$ е топология от долно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$ тогава и само тогава, когато съществува топология $\mathcal{T}$ в X и предбаза $\mathcal{S}$ на $\mathcal{T}$ (която съдържа X и е затворена относно произволни обединения), такава че $\mathcal{S}^-_{\mathcal{M}}$ е предбаза на $\mathcal{O}$.*

Следователно, разликата между една долна виеторисова хипертопология в подфамилия $\mathcal{M}$ на фамилията $\mathcal{P}'(X)$, където X е топологично пространство, и хипертопология от долно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$ е в това, че докато долната виеторисова хипертопология се поражда от цялата топология в X, то хипертопологията от долно-виеторисов тип се поражда от предбаза на някоя топология в X. Оказва се, че тази разлика е съществена: **показваме, че класът от всички долни виеторисови хипертопологии се съдържа строго в класа от всички хипертопологии от долно-виеторисов тип**. Включването е очевиден факт, а за да конструираме пример, който да различава двата класа, правим следното:

Ние отбелязваме първо, че ако X е множество, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ и $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}'(X)$, то $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^{-}$ може да породи топология $\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{M}$ (от долно-виеторисов тип) тогава и само тогава, когато $M \cap \bigcup \mathcal{S} \neq \emptyset$ за всяко $M \in \mathcal{M}$. До края на този абзац ще разглеждаме само такива фамилии $\mathcal{S}$, които удовлетворяват това условие, а фамилиите $\mathcal{M}$ ще бъдат винаги *естествени фамилии* (т.е., фамилиите $\mathcal{M}$ ще съдържат всички едноточкови подмножества на X). След това описваме онези фамилии $\mathcal{S}$, за които $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}} = \mathcal{S}$, и ги наричаме $\mathcal{M}^{-}$-*затворени фамилии.* Нашето описание показва, че за всяка фамилия $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}}$ се съдържа винаги в топологията в X, породена от $\mathcal{S}$. Тъй като, очевидно, за всяка фамилия $\mathcal{S}$ имаме, че $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}}$, то получаваме, че *ако $\mathcal{S}$ е топология в X, то $\mathcal{P}_{\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}} = \mathcal{S}$,* т.е. всяка топология в X е $\mathcal{M}^{-}$-затворена фамилия. Съществуват, обаче, много други примери на $\mathcal{M}^{-}$-затворени фамилии. И така, за да получим желания пример, нека разгледаме една $\mathcal{M}^{-}$-затворена фамилия $\mathcal{S}$. Тогава $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^{-}$ поражда топология $\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{M}$ от долно-виеторисов тип. Да допуснем, че тя е долна виеторисова топология в $\mathcal{M}$. Тогава би съществувала топология $\mathcal{T}$ в X, такава че $\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}} = \Upsilon_{-\mathcal{M}} (= \mathcal{O}_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{M}})$ и бихме получили, че $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}} = \mathcal{P}_{\Upsilon_{-\mathcal{M}}} = \mathcal{P}_{\mathcal{O}_{-\mathcal{T}}^{\mathcal{M}}} = \mathcal{T}$. Значи, *ако $\mathcal{S}$ не е топология в X, то $\mathcal{O}_{-\mathcal{S}}^{\mathcal{M}}$ няма да е долна виеторисова топология в* $\mathcal{M}$. С построения от нас пример осъществяваме този план. Следователно, класът от всички хипертопологии от долно-виеторисов тип съдържа строго класа от всички долни виеторисови хипертопологии.

Да споменем най-сетне, че в настоящата статия е отбелязано, че ако разгледаме топологиите, породени от фамилиите от вида $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}^{-}$, където $\mathcal{B}$ е база на топология в множество X, а $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ е естествена фамилия, то ще получим долни виеторисови топологии в $\mathcal{M}$.

Summary

In 1975, M. M. Čoban [M. M. Čoban, Operations over sets, Sibirsk. Mat. Ž., 16 (1975), no. 6, 1332-1351] introduced a new topology on the set of all closed subsets of a topological space which is similar to the upper Vietoris hypertopology but is weaker than it. In 1998, G. Dimov and D. Vakarelov [G. Dimov and D. Vakarelov, On Scott consequence systems, Fundamenta Informaticae, 33 (1998), 43-70] introduced the

notion of *Tychonoff-type hypertopology.* The class of Tychonoff-type hypertopologies contains the class of the Čoban hypertopologies. The Tychonoff-type hypertopologies (which are now called *upper-Vietoris-type hypertopologies* as well) were studied in details in [G. Dimov, F. Obersnel and G. Tironi, On Tychonoff-type hypertopologies, Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium (Prague, Czech Republic, August 19–25, 2001), Topology Atlas, Toronto, 2002, 51-70].

In this paper we introduce a new notion, namely, the notion of *lower-Vietoris-type hypertopology*, in a way similar to that with which the new Tychonoff-type hypertopology was introduced in the Dimov-Vakarelov paper cited above, and show that it is different from the notion of lower Vietoris hypertopology. We study the properties of the lower-Vietoris-type hypertopologies, as well as the maps between hyperspaces endowed with lower-Vietoris-type topologies, generalize many results from the paper [E. Cuchillo-Ibáñez, M. A. Morón and F. R. Ruiz del Portal, Lower semifinite topology in hyperspaces, Topology Proceedings, 17 (1992), 29-39] and prove a theorem about "commutability between hyperspaces and subspaces" in the class of lower-Vietoris-type hypertopologies with which we generalize a theorem of H.-J. Schmidt [H.-J. Schmidt, Hyperspaces of quotient and subspaces. I. Hausdorff topological spaces, Math. Nachr. 104 (1981), 271-280].

Specifically,

• we study the relationships between some topological properties of the topological spaces and their hyperspaces endowed with a lower-Vietoris-type topology, namely, the topological properties of being compact and to have a weight not greater than a given cardinal number;

we show that under mild conditions, the hyperspaces endowed with a lower-Vietoris-type topology

• have a trivial homotopy type,
• are absolute extensors for the class of all topological spaces, and
• have the fixed-point property.

As a corollary of our fixed-point theorem, we obtain that *for every continuous map $f : X \longrightarrow X$, where X is a continuum, there exist a subcontinuum K of X such that $f(K) = K$.*

For presenting our results in more details, we will use the following notation:

If X is a set, then we denote by $\mathcal{P}(X)$ (resp., by $\mathcal{P}'(X)$) the set of all (non-empty) subsets of X; if $\mathcal{M}, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ and $A \subseteq X$, then we set:

• $A^-_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{M \in \mathcal{M} \mid M \cap A \neq \emptyset\}$
• $\mathcal{A}^-_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{A^-_{\mathcal{M}} \mid A \in \mathcal{A}\}$;

if $(X, \mathcal{T})$ is a topological space, then we put

• $\mathrm{CL}(X) \stackrel{\text{df}}{=} \{M \subseteq X \mid M \text{ is closed in } X,\ M \neq \emptyset\}$.

Let X be a set. Recall that a subfamily $\mathcal{U}$ of $\mathcal{P}(X)$ can serve as a subbase for a topology $\mathcal{T}$ on X if and only if $\bigcup\mathcal{U} = X$; in this case we will say that *the family* $\mathcal{U}$ *generates the topology* $\mathcal{T}$ *on* X. Some authors consider that any subfamily $\mathcal{U}$ of $\mathcal{P}(X)$ can serve as a subbase for a topology on X taking as a subbase for this topology the family $\mathcal{U} \cup \{X\}$, instead of $\mathcal{U}$. However, we will not consider it so.

Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space. Recall that the classical *lower Vietoris topology* Υ_{-X} on $\mathrm{CL}(X)$ is generated by the family $\mathcal{T}^-_{\mathrm{CL}(X)}$, i.e. by the family of all sets of the form $\{F \in \mathrm{CL}(X) \mid F \cap U \neq \emptyset\}$, where U is open in X.

A trivial modification of this definition is the following one:

Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. The topology $\Upsilon_{-\mathcal{M}}$ on $\mathcal{M}$ generated by the family $\mathcal{T}^-_{\mathcal{M}}$ will be called a **lower Vietoris topology on** $\mathcal{M}$.

Clearly, if $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$, then $\Upsilon_{-\mathcal{M}}$ is just the classical lower Vietoris topology Υ_{-X} on $\mathrm{CL}(X)$.

We now introduce the main notion of this paper by regarding not only arbitrary subfamilies $\mathcal{M}$ of $\mathcal{P}'(X)$ but also starting with a **set** X instead with a topological space:

Let X be a set, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ and $\mathcal{O}$ be a topology on $\mathcal{M}$. We say that $\mathcal{O}$ is a *lower-Vietoris-type topology on* $\mathcal{M}$ if $\mathcal{O} \cap \{A^-_{\mathcal{M}} \mid A \subseteq X\}$ is a subbase for $\mathcal{O}$.

It is clear that if X is a topological space, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ and $\mathcal{O}$ is a lower Vietoris topology on $\mathcal{M}$, then $\mathcal{O}$ is a lower-Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$.

Although the lower-Vietoris-type topologies $\mathcal{O}$ are defined on subfamilies $\mathcal{M}$ of the family $\mathcal{P}'(X)$ of all non-empty subsets of a **set** X, it turns out that they are in fact generated in a way similar to that of lower Vietoris topologies on $\mathcal{M}$, i.e. the set X can be endowed with a topology $\mathcal{T}$ that has a subbase $\mathcal{P}$ such that $\mathcal{P}^-_{\mathcal{M}}$ is a subbase for $\mathcal{O}$. Namely, we prove the following statement:

Let X be a set, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ and $\mathcal{O}$ be a lower-Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$. Then the family

$$\mathcal{P}_{\mathcal{O}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{A \subseteq X \mid A^-_{\mathcal{M}} \in \mathcal{O}\}$$

contains X and serves as a subbase for a topology

$$\mathcal{T}_{-\mathcal{O}}$$

on X. The family $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}})^-_{\mathcal{M}}$ is a subbase for $\mathcal{O}$. The family $\mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ is closed under arbitrary unions.

Moreover, we show that *if X is a set and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$, then a topology $\mathcal{O}$ on $\mathcal{M}$ is a lower-Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$ if and only if there exists a topology $\mathcal{T}$ on X and a subbase $\mathcal{S}$ for $\mathcal{T}$ (which contains X and is closed under arbitrary unions), such that $\mathcal{S}^-_{\mathcal{M}}$ is a subbase for $\mathcal{O}$.*

Hence, the difference between a lower Vietoris topology on $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$, where X is a topological space, and a lower-Vietoris-type topology on the same $\mathcal{M}$, is in the fact that the lower Vietoris topology is generated by the whole topology on X while the lower-Vietoris-type topology is generated by a subbase of a topology on X. It turns out that this difference is essential: **we show that the class of all lower Vietoris hypertopologies is strictly contained in the class of all lower-Vietoris-type hypertopologies.** The inclusion is an obvious fact, and to construct an example that distinguishes between the two classes, we do the following:

We first note that if X is a set, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ and $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}'(X)$, then $\mathcal{S}^-_{\mathcal{M}}$ can serve as a subbase for a (lower-Vietoris-type) topology $\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}$ on $\mathcal{M}$ if and only if $M \cap \bigcup \mathcal{S} \neq \emptyset$ for every $M \in \mathcal{M}$. Till the end of this paragraph, we will regard only those families $\mathcal{S}$ which satisfy this condition, and, also, only those families $\mathcal{M}$ which are *natural families* (i.e. those families $\mathcal{M}$ which contain all singletons). We then describe those families $\mathcal{S}$ for which $\mathcal{P}_{\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$. We call them $\mathcal{M}^-$*-closed families.* Our description shows that, for every family $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}}$ is always contained in the topology on X generated by $\mathcal{S}$. Since, obviously, for every family $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}}$ holds, we obtain that *if* $\mathcal{S}$ *is a topology on* X*, then* $\mathcal{P}_{\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}} = \mathcal{S}$*,* i.e. every topology on X is an $\mathcal{M}^-$-closed family. There exist, however, many other examples of $\mathcal{M}^-$-closed families. So, for obtaining the desired example, let us start with an $\mathcal{M}^-$-closed family $\mathcal{S}$. Then $\mathcal{S}^-_{\mathcal{M}}$ generates the lower-Vietoris-type topology $\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}$ on $\mathcal{M}$. Suppose that it is a lower Vietoris topology on $\mathcal{M}$. Then there exists a topology $\mathcal{T}$ on X such that $\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}} = \Upsilon_{-\mathcal{M}} (= \mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{T}})$. This implies that $\mathcal{S} = \mathcal{P}_{\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}} = \mathcal{P}_{\Upsilon_{-\mathcal{M}}} = \mathcal{P}_{\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{T}}} = \mathcal{T}$. Thus, *if* $\mathcal{S}$ *is not a topology on* X*, than* $\mathcal{O}^{\mathcal{M}}_{-\mathcal{S}}$ *will not be a lower Vietoris topology on* $\mathcal{M}$. With the example we've built, we're implementing that plan. Therefore, the class of lower-Vietoris-type hypertopologies is strictly larger than the class of lower Vietoris hypertopologies.

Let us finally mention that in our paper we notice that if we regard the topologies generated by $\mathcal{B}^-_{\mathcal{M}}$, where $\mathcal{B}$ is a base for a topology on a set X and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ is a natural family, then we will obtain lower Vietoris hypertopologies on $\mathcal{M}$.

This paper is cited in:

1. Ismael Calomino, Paula Menchon, William J. Zuluaga Botero, A topological duality for monotone expansions of semilattices, Appl. Categorical Structures 30, 1257–1282 (2022). https://doi.org/10.1007/s10485-022-09690-0, ISSN (E): 1572-9095, Print ISSN: 0927-2852.

B4-2. Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Two extensions of the Stone Duality to the category of zero-dimensional Hausdorff spaces, *Filomat*, 35 (6) (2021), 1851-1878, https://doi.org/10.2298/FIL2106851D, **IF 0.988, Web of Science Quartile: Q2**, ISSN (print) 0354-5180, ISSN (electronic) 2406-0933, *MR4364041* **(60 точки)**

Резюме

През 1937 г., М. Стоун [M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41, 375-481] доказа, че съществува биективно съответствие T_l между класа от всички (с точност до хомеоморфизъм) нулмерни локално компактни хаусдорфови пространства (наричани, за краткост, *булеви пространства*) и класа от всички (с точност до изоморфизъм) обобщени булеви алгебри (за краткост, GBAs) (еквивалентно, булеви пръстени със или без единица). В класа от всички компактни булеви пространства (наричани, за краткост, *стоунови пространства*) тази биекция може да бъде продължена до дуална еквивалентност $\mathsf{T} : \mathbf{Stone} \longrightarrow \mathbf{Boole}$ между категорията **Stone** на стоуновите пространства и непрекъснатите изображения, и категорията **Boole** на булевите алгебри и булевите хомоморфизми; това е класическата стоунова дуалност. (Да отбележим, че превъзходната монография на П. Т. Джонстоун [P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982] демонстрира убедително огромното влияние на стоуновата дуалност върху почти всички области на математиката.) През 1964 г., Х. П. Доктор [H. Doctor, The categories of Boolean lattices, Boolean rings and Boolean spaces, Canad. Math. Bulletin, 7 (1964), 245–252] показа, че стоуновата биекция T_l може да бъде продължена даже до дуална еквивалентност между категорията $\mathbf{BooleSp_{perf}}$ на булевите пространства и съвършените изображения между тях, и категорията **GBoole** на всички GBAs и подходящи морфизми между тях. По-късно, Г. Димов [G. Dimov, Some generalizations of the Stone Duality Theorem, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80 (2012), 255–293] продължи стоуновата дуалност върху категорията **BooleSp** на булевите пространства и непрекъснатите изображения.

В настоящата статия построяваме две продължения на стоуновата дуалност върху категорията **ZHaus** на нулмерните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения. А именно, дефинирани са две категории **dzBoole** и **mzMaps**, и е доказано, че съществуват дуални еквивалентности $F : \mathbf{ZHaus} \longrightarrow \mathbf{dzBoole}$ и $\mathsf{F} : \mathbf{ZHaus} \longrightarrow \mathbf{mzMaps}$. Използвайки рестрикциите на контравариантните функтори F и F върху категорията **D** на дискретните пространства и непрекъснатите изображения, показваме, че нашите теореми за дуалност продължават също така и дуалността на Тарски между категорията **Set** на множествата и функциите, и категорията **Caba** на пълните атомни булеви алгебри и пълните булеви хомоморфизми [A. Tarski, Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. Fund. Math. 24 (1935), 177-198]. Нещо повече, с помощта на рестрикцията на дуалната еквивалентност F върху категорията **D**, получаваме и ново доказателство на дуалността на Тарски. Рестрикциите на F и F върху категорията **EDTych** на екстремално несвързаните тихонови пространства и непрекъснатите изображения ни дават две теореми за дуалност за категорията **EDTych**. Въвеждаме и две

други категории **zBoole** и **zMaps** и показваме, че те са дуално еквивалентни на категорията **ZComp** на нулмерните хаусдорфови компактни разширения на нулмерните хаусдорфови пространства. Също така, добре известната теорема на Двингер [Ph. Dwinger, *Introduction to Boolean Algebras*, Physica Verlag, Würzburg, 1961] за нулмерните хаусдорфови компактни разширения на нулмерните хаусдорфови пространства е получена като следствие от нашата категорна теорема за дуалност.

Всички резултати, изложени по-горе, са получени с помощта на въведените от нас понятия *булева z-алгебра*, *булева dz-алгебра*, *булево z-изображение* и *максимално булево z-изображение* (което ще наричаме още, за краткост, *mz-изображение*). Обекти на категорията **dzBoole** са именно булевите dz-алгебри, а обекти на категорията **mzMaps** са точно mz-изображенията. Обекти на категорията **zBoole** са всички булеви z-алгебри, а категорията **dzBoole** е пълна подкатегория на категорията **zBoole**. Обекти на категорията **zMaps** са всички булеви z-изображения, а категорията **mzMaps** е пълна подкатегория на категорията **zMaps**. Обекти на категориите, за които сме показали, че са дуални на категорията **EDTych**, са, съответно, всички пълни булеви z-алгебри и всички пълни булеви z-изображения, макар че би трябвало техни обекти да са пълните булеви dz-алгебри и, съответно, пълните булеви mz-изображения. Това е така, защото в класа от всички пълни булеви алгебри, булевите z-алгебри са идентични с булевите dz-алгебри, а булевите z-изображения – с mz-изображенията.

Идеите, които стоят зад основното понятие, въведено от нас в настоящата статия, а именно, понятието *булева dz-алгебра*, са следните. Класическата стоунова дуалност

$$\mathbf{Boole} \underset{\mathsf{T}=\mathsf{CO}}{\overset{\mathsf{S}=\mathsf{Ult}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Stone}$$

ни показва, че цялата информация относно едно стоуново пространство X се съдържа в булевата алгебра $(\mathrm{CO}(X), \subseteq)$ от всички отворено-затворени подмножества на X, т.е., разполагайки с тази булева алгебра, можем да реконструираме пространството X с точност до хомеоморфизъм. Ако, обаче, X не е компактно, т.е. X е само нулмерно хаусдорфово пространство, то булевата алгебра $\mathrm{CO}(X)$ не е достатъчна за реконструирането на пространството X. Наистина, съгласно теоремата на Двингер, компактното разширение $(\beta_0 X, \beta_0)$ на X, построено от Банашевски, е точно стоуновия дуален обект на булевата алгебра $(\mathrm{CO}(X), \subseteq)$ и следователно, съгласно стоуновата дуалност, $\mathrm{CO}(\beta_0 X)(= \mathsf{T}(\beta_0 X))$ и $(\mathrm{CO}(X), \subseteq)$ са изоморфни булеви алгебри, докато $\beta_0 X$ и X не са хомеоморфни, тъй като $\beta_0 X$ е компактно, а X не е такова. Ако, обаче, разгледаме, заедно с булевата алгебра $\mathrm{CO}(X)$, и множеството $\beta_0(X)$ (т.е. образа на X при изображението β_0), което е подмножество на $\mathsf{S}(\mathrm{CO}(X))$, то пространството X ще бъде хомеоморфно (посредством изображението $\beta_0 : X \longrightarrow \beta_0 X$) на множеството $\beta_0(X)$ разглеждано като подпространство на $\mathsf{S}(\mathrm{CO}(X))$. Нещо повече, следата на $\mathrm{CO}(\beta_0 X)$ върху $\beta_0(X)$ е точно $\mathrm{CO}(\beta_0(X))$. Всичко това показва, че двойката $(\mathrm{CO}(X), \beta_0(X))$, където $\beta_0(X)$ е взето само като множество, е достатъчна за реконструирането на пространството X с точност до хомеоморфизъм. Чрез понятието "булева dz-алгебра" даваме алгебрично описание на такива двойки и една от нашите теореми за дуалност, доказани в настоящата статия, показва, че това наистина е така.

Нека опишем накратко булевите dz-алгебри и категорията **dzBoole**. Булевите dz-алгебри са специални булеви z-алгебри, а една двойка (A, X), където A е булева алгебра и X е множество от ултрафилтри в A, е булева z-алгебра, ако за всеки елемент a на $A \setminus \{0\}$ съществува ултрафилтър $u \in X$, който съдържа a. Обектите на категорията **zBoole** са точно булевите z-алгебри, а **zBoole**-морфизмите между всеки два **zBoole**-обекта (A, X) и (A', X') са всички двойки (φ, f), такива че $\varphi : A \longrightarrow A'$ е булев хомоморфизъм, $f : X' \longrightarrow X$ е функция и $f(u') = \varphi^{-1}(u')$ за всеки ултрафилтър $u' \in X'$. (Да отбележим, че ние се нуждаем от компонентата f на двойката (φ, f) само за да поискаме, че $\varphi^{-1}(u') \in X$ за всяко $u' \in X'$.) Категорията **dzBoole**, чиито обекти са всички dz-алгебри, е дефинирана като пълна подкатегория на категорията **zBoole**. Както беше вече споменато по-горе, именно категорията **dzBoole** е дуално еквивалентна на категорията **ZHaus**.

Summary

In 1937, M. Stone [M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41, 375-481] proved that there exists a bijective correspondence T_l between the class of all (up to homeomorphism) zero-dimensional locally compact Hausdorff spaces (briefly, *Boolean spaces*) and the class of all (up to isomorphism) generalized Boolean algebras (briefly, GBAs) (or, equivalently, Boolean rings with or without unit). In the class of compact Boolean spaces (briefly, *Stone spaces*) this bijection can be extended to a dual equivalence $\mathsf{T} : \mathbf{Stone} \longrightarrow \mathbf{Boole}$ between the category **Stone** of Stone spaces and continuous maps and the category **Boole** of Boolean algebras and Boolean homomorphisms; this is the classical Stone Duality. (Let us note that the excellent monograph of P. T. Johnstone [P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982] demonstrates the tremendous impact of the Stone Duality on almost all areas of mathematics.) In 1964, H. P. Doctor [H. Doctor, The categories of Boolean lattices, Boolean rings and Boolean spaces, Canad. Math. Bulletin, 7 (1964), 245–252] showed that the Stone bijection T_l can be even extended to a dual equivalence between the category $\mathbf{BooleSp_{perf}}$ of Boolean spaces and perfect maps between them and the category **GBoole** of GBAs and suitable morphisms between them. Later on, G. Dimov [G. Dimov, Some generalizations of the Stone Duality Theorem, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80 (2012), 255–293] extended the Stone Duality to the category **BooleSp** of Boolean spaces and continuous maps.

In this paper, we construct two extensions of the Stone Duality to the category **ZHaus** of zero-dimensional Hausdorff spaces and continuous maps. Namely, we define two categories **dzBoole** and **mzMaps**, and prove that there exist dual equivalences $F : \mathbf{ZHaus} \longrightarrow \mathbf{dzBoole}$ and $\mathsf{F} : \mathbf{ZHaus} \longrightarrow \mathbf{mzMaps}$. Using the restrictions of F and F to the category $\mathbf{D}$ of discrete spaces and continuous maps, we show that our duality theorems extend also the Tarski Duality between the category **Set**

of sets and functions and the category **Caba** of complete atomic Boolean algebras and complete Boolean homomorphisms [A. Tarski, Zur Grundlegung der Boole'schen Algebra. Fund. Math. 24 (1935), 177-198]. Moreover, with the help of the restriction of the dual equivalence F to the category $\mathbf{D}$, we obtain a new proof of the Tarski Duality Theorem. The restrictions of F and F to the category **EDTych** of extremally disconnected Tychonoff spaces and continuous maps give us two duality theorems for the category **EDTych**. We introduce as well two other categories, namely, the categories **zBoole** and **zMaps**, and show that they are dually equivalent to the category **ZComp** of zero-dimensional Hausdorff compactifications of zero-dimensional Hausdorff spaces. As a corollary, we obtain the Dwinger Theorem [Ph. Dwinger, *Introduction to Boolean Algebras*, Physica Verlag, Würzburg, 1961] about zero-dimensional compactifications of a zero-dimensional Hausdorff space.

All results presented above are obtained with the help of the notions of *Boolean z-algebra*, *Boolean dz-algebra*, *Boolean z-map* and *maximal Boolean z-map* (briefly, *mz-map*) introduced by us. The objects of the category **dzBoole** are exactly the Boolean dz-algebras and the objects of the category **mzMaps** are precisely the maximal Boolean z-maps. The category **zBoole** has as objects all Boolean z-algebras and the category **dzBoole** is its full subcategory. The category **zMaps** has as objects all Boolean z-maps and the category **mzMaps** is its full subcategory. The categories dual to the category **EDTych** have as objects all complete Boolean z-algebras and all complete Boolean z-maps, respectively, although one could expect that their objects should be all complete Boolean dz-algebras and all complete mz-maps, respectively. This is so because, in the realm of complete Boolean algebras, Boolean z-algebras coincide with Boolean dz-algebras and Boolean z-maps coincide with mz-maps.

The ideas behind the main notion introduced by us in this paper, namely, the notion of *Boolean dz-algebra*, are as follows. The classical Stone Duality

$$\mathbf{Boole} \underset{\mathsf{T}=\mathsf{CO}}{\overset{\mathsf{S}=\mathsf{Ult}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Stone}$$

shows that the whole information about a Stone space X is contained in the Boolean algebra $(\mathrm{CO}(X), \subseteq)$ of all simultaneously closed and open (briefly, clopen) subsets of X, i.e. having the Boolean algebra $\mathrm{CO}(X)$, we can reconstruct the space X up to homeomorphism. If, however, X is not compact, i.e. X is only a zero-dimensional Hausdorff space, then the Boolean algebra $\mathrm{CO}(X)$ is not enough for reconstructing the space X. Indeed, by the Dwinger Theorem, the Banaschewski compactification $(\beta_0 X, \beta_0)$ of X is the Stone dual of $(\mathrm{CO}(X), \subseteq)$ and thus, by the Stone duality, $\mathrm{CO}(\beta_0 X)(= \mathsf{T}(\beta_0 X))$ and $(\mathrm{CO}(X), \subseteq)$ are isomorphic Boolean algebras, although $\beta_0 X$ is compact and, therefore, it is not homeomorphic to X. However, if we regard, together with the Boolean algebra $\mathrm{CO}(X)$, the set $\beta_0(X)$ (i.e. the image of X under the map β_0) which is a subset of $\mathsf{S}(\mathrm{CO}(X))$, then the space X will be homeomorphic (via the map $\beta_0 : X \longrightarrow \beta_0 X$) to the set $\beta_0(X)$ endowed with the subspace topology of $\mathsf{S}(\mathrm{CO}(X))$. Moreover, the trace of $\mathrm{CO}(\beta_0 X)$ on $\beta_0(X)$ will be precisely $\mathrm{CO}(\beta_0(X))$. All this shows that the pair $(\mathrm{CO}(X), \beta_0(X))$, where $\beta_0(X)$ is regarded only as a set, is enough for reconstructing the space X up to homeomorphism. With the notion of Boolean dz-algebra we give the algebraic description of such pairs and one of our duality theorems shows that this is really so.

Let's briefly describe the Boolean dz-algebras and the category **dzBoole**. The Boolean dz-algebras are special Boolean z-algebras, and a pair (A, X), where A is a Boolean algebra and X is a set of ultrafilters in A, is a Boolean z-algebra if for each $a \in A \setminus \{0\}$ there exists $u \in X$ containing a. The category **zBoole** has as objects all Boolean z-algebras and its morphisms between every two **zBoole**-objects (A, X) and (A', X') are all pairs (φ, f) such that $\varphi : A \longrightarrow A'$ is a Boolean homomorphism, $f : X' \longrightarrow X$ is a function and $f(u') = \varphi^{-1}(u')$ for every $u' \in X'$. (Note that we need the component f of the pair (φ, f) just for requiring that $\varphi^{-1}(u') \in X$ for every $u' \in X'$.) The category **dzBoole** is defined as a full subcategory of the category **zBoole** having as objects all Boolean dz-algebras. As we already mentioned above, the category **dzBoole** is dual to the category **ZHaus**.

This paper is cited in:

1. A. Piękosz, Esakia Duality for Heyting Small Spaces, Symmetry 14 (12) (2022), 2567, https://doi.org/10.3390/sym14122567. IF 2.940 (2021), ISSN: 2073-8994.

Област 4. Природни науки, математика и информатика
4.5. Математика
Г7. Научна публикация в издания, които са реферирани и индексирани в световноизвестни бази данни с научна информация (Web of Science и Scopus), извън хабилитационния труд.

(Изискват се 200 точки. Представени са 6 научни публикации, носещи общо 240 точки.)

Г7-1. Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Extensions of the Stone Duality to the category of Boolean spaces and continuous maps, *Quaestiones Mathematicae*, 45(7), 2022, 1115–1124, https://doi.org/10.2989/16073606.2021.1928324, **IF 0.81 (2021), Web of Science Quartile: Q3 (2021)**, ISSN (print) 1607-3606, ISSN (electronic) 1727-933X, *MR4462230, Zbl 1498.18004* **(45 точки)**

Резюме

В статията **В4-2**, разгледана по-горе (т.е. статията [G. Dimov, E. Ivanova-Dimova, Two extensions of the Stone Duality to the category of zero-dimensional Hausdorff spaces, *Filomat*, 35 (6) (2021), 1851-1878]), стоуновата дуалност бе продължена върху категорията **ZHaus** на нулмерните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения. В настоящата статия, която може да бъде разглеждана като продължение на статията **В4-2** (и затова ще използваме нейното резюме), показваме, че продължението на стоуновата дуалност върху категорията **BooleSp** на булевите пространства и непрекъснатите изображения, намерено от Димов [G. Dimov, Some generalizations of the Stone Duality Theorem, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80 (2012), 255–293], може да бъде получено с помощта на теоремите ни за дуалност за категорията **ZHaus**, доказани в **B4-2**. Нещо повече, използвайки резултатите от **B4-2**, доказваме две нови теореми за дуалност за категорията **BooleSp**, които също се явяват продължения на теоремата на Стоун за дуалност. За да направим всичко това, въвеждаме понятията *булева ldz-алгебра* и *lmz-изображение*. Булевите ldz-алгебри са специални булеви dz-алгебри. Означавайки с **ldzBoole** категорията, чиито обекти са всички ldz-алгебри и която е пълна подкатегория на категорията **dzBoole**, ние доказваме, че **категориите BooleSp и ldzBoole са дуално еквивалентни**. Това е нашата първа нова теорема за дуалност. В работата си, цитирана по-горе, Димов въвежда категорията **ZLBA** и показва, че тя е дуално еквивалентна на категорията **BooleSp**. Ние доказваме, че **категориите ldzBoole и ZLBA са изоморфни**, което, съчетано с нашата първа нова теорема за дуалност, ни дава ново доказателство на теоремата за дуалност на Димов. След това въвеждаме lmz-изображенията като специални mz-изображения и означаваме с **lmzMaps** категорията, чиито обекти са всички lmz-изображения и която е пълна подкатегория на категорията **mzMaps**. Показваме, че **категориите ldzBoole и lmzMaps са еквивалентни.** Съчетавайки този резултат с първата ни теорема за дуалност, цитирана по-горе, получаваме нашата втора нова теорема за дуалност: **категориите BooleSp и lmzMaps са дуално еквивалентни.**

Summary

In the paper **B4-2** reviewed above (i.e. the paper [Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Two extensions of the Stone Duality to the category of zero-dimensional Hausdorff spaces, *Filomat*, 35 (6) (2021), 1851-1878]), we extended the Stone Duality to the category **ZHaus** of zero-dimensional Hausdorff spaces and continuous maps. In this paper, which can be considered as a continuation of the paper **B4-2** (and thus we will regard the summary of **B4-2** as a part of the present one), we show that the extension of the Stone Duality Theorem to the category **BooleSp** of Boolean spaces and continuous maps provided by Dimov [G. Dimov, Some generalizations of the Stone Duality Theorem, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80 (2012), 255–293] can be derived from our duality theorems for the category **ZHaus** proved in **B4-2**. Moreover, with the help of our results from **B4-2**, we obtain two new duality theorems which extend the Stone Duality Theorem to the category **BooleSp**. For doing all this we introduce the notions of *Boolean ldz-algebra* and *lmz-map*. Boolean ldz-algebras are special Boolean dz-algebras. Let **ldzBoole** be the full subcategory of the category **dzBoole** having as objects all ldz-algebras. Then we prove that **the categories BooleSp and ldzBoole are dually equivalent**. This is our first new duality theorem. In his aforementioned paper, Dimov introduced a category **ZLBA** and proved that it is dually equivalent to the category **BooleSp**. We prove that **the categories ldzBoole and ZLBA are isomorphic** which, together with our first duality theorem, implies Dimov's duality theorem. In this way we obtain our

new proof of Dimov's duality theorem. After that, we introduce lmz-maps as special mz-maps and define the category **lmzMaps** as the full subcategory of the category **mzMaps** having as objects all lmz-maps. We show that **the categories ldzBoole and lmzMaps are equivalent.** Combining this result with our first duality theorem cited above, we obtain our second new duality theorem: **the categories BooleSp and lmzMaps are dually equivalent.**

Г7-2. G. Dimov, E. Ivanova-Dimova, W. Tholen, Extensions of dualities and a new approach to the Fedorchuk duality, *Topology and its Applications*, 281 (2020) 107207 (26 pages), https://doi.org/10.1016/j.topol.2020.107207, **IF 0.617, Web of Science Quartile: Q4**, ISSN (print) 0166-8641, ISSN (electronic) 1879-3207, *MR4174608, Zbl 1457.54016* **(36 точки)**

Резюме

В настоящата статия предлагаме обща категорна схема за продължаване на дуалности и с нейна помощ даваме ново доказателство на теоремата за дуалност на В. В. Федорчук [V. V. Fedorchuk, Boolean δ-algebras and quasi-open mappings. Sibirsk. Mat. Ž. 14 (5) (1973), 1088–1099; English translation: Siberian Math. J. 14 (1973), 759-767 (1974)]. А именно, при дадени дуална еквивалентност

$$\mathcal{A} \underset{S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \mathcal{X}$$

(която ще наричаме *базисна дуална еквивалентност*) между категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{X}$, където $\mathcal{X}$ е пълна подкатегория на категория $\mathcal{Y}$, и специален клас $\mathcal{P}$ от $\mathcal{Y}$-морфизми, ние построяваме една "хубава" категория $\mathcal{B}$, в която $\mathcal{A}$ се влага чрез функтор J като пълна подкатегория, както и дуална еквивалентност

$$\mathcal{B} \underset{\tilde{S}}{\overset{\tilde{T}}{\rightleftarrows}} \mathcal{Y},$$

която се явява продължение (с точност до естествен изоморфизъм) на дадената такава чрез функтора J и влагащ функтор I, както е показано на диаграмата

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathcal{Y} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\
\mathcal{A} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T"] & \mathcal{X}. \arrow[l, shift left, "S"] \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}$$

Разбира се, може лесно да се построи "лоша" категория $\mathcal{B}$, която да удовлетворява тези изисквания: вътре в $\mathcal{Y}$ заместваме $\mathcal{X}$ с $\mathcal{A}$ и дефинираме по подходящ начин композициите, използвайки дадената дуална еквивалентност. Тази *ad-hoc* процедура, обаче, ни дава като резултат категория $\mathcal{B}$, която е просто камуфлаж на категорията $\mathcal{Y}$, без никакви смислени приложения. *Нашата основна идея е да използваме специалния клас $\mathcal{P}$ от $\mathcal{Y}$-морфизми, така че той, при наличието на категорията $\mathcal{X}$, да е в състояние да кодира цялата информация относно останалите $\mathcal{Y}$-обекти.* Това би трябвало да доведе до появата на "хубава" категория $\mathcal{B}$. Нейните обекти би трябвало да са $\mathcal{A}$-обекти със структура, която да е предоставена от класа $\mathcal{P}$. И наистина, ние дефинираме обектите на $\mathcal{B}$ като двойки (A, p), където A е $\mathcal{A}$-обект и $p \in \mathcal{P}$ е $\mathcal{Y}$-морфизъм с дефиниционна област $T(A)$. Желаната роля на класа $\mathcal{P}$ осигуряваме чрез налагането на пет основни изисквания към този клас. Да отбележим, че *корефлективността* на $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ позволява винаги да бъде намерен такъв "хубав" клас $\mathcal{P}$.

Прилагайки нашата категорна теорема за продължаване на дуалности, получаваме дуалността на Федорчук като продължение на подходяща рестрикция на стоуновата дуалност. Федорчук доказва своята теорема за дуалност с помощта на теоремата за дуалност на де Врис. Той показва, че неговата дуалност се получава като рестрикция на дуалността на де Врис. Ние, обаче, я получаваме използвайки единствено подходяща рестрикция на стоуновата дуалност, без да имаме нужда от дуалността на де Врис. Поради това нашето доказателство е директно и съвършено ново. Нещо повече, благодарение на нашия категорен подход, получаваме *топологична интерпретация на всички алгебрични понятия, използвани в теоремата за дуалност на Федорчук.*

За да представим по-подробно нашата работа, първо ще опишем накратко дуалностите на Федорчук и де Врис.

Знаменитата стоунова теорема за дуалност [M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41, 375-481] показва, че цялата информация за едно нулмерно компактно хаусдорфово пространство (= *стоуново пространство*) X, с точност до хомеоморфизъм, се съдържа в неговата булева алгебра $\mathrm{CO}(X)$ от всички отворено-затворени подмножества на X. Също така, цялата информация относно непрекъснатите изображения между две стоунови пространства X и Y се съдържа в булевите хомоморфизми между булевите алгебри $\mathrm{CO}(Y)$ и $\mathrm{CO}(X)$. Естествено възниква въпросът дали подобен резултат е валиден за всички компактни хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения между тях. Като най-атрактивен кандидат за ролята на булевата алгебра $\mathrm{CO}(X)$ при едно такова продължение се откроява булевата алгебра $\mathrm{RC}(X)$ от всички регулярно затворени подмножества на едно компактно хаусдорфово пространство X (или нейното изоморфно копие $\mathrm{RO}(X)$ от всички регулярно отворени подмножества на X), но, за съжаление, тази кандидатура се оказва неподходяща: наистина, добре известно е, че булевите алгебри $\mathrm{RC}(X)$ и $\mathrm{RC}(EX)$, където EX е *абсолюта* (= *проективното покритие*) на X, са изоморфни, докато EX е хомеоморфно с X само ако X е екстремално несвързано. Въпреки това, през 1962 г., де Врис [H. de Vries, Compact spaces and compactifications, an algebraic approach, Van Gorcum, The Netherlands, 1962; https://www .illc .uva .nl /Research /Publications /Dissertations /HDS/] показа, че ако разгледаме булевата алгебра $\mathrm{RC}(X)$ заедно с релацията ρ_X над $\mathrm{RC}(X)$, дефинирана чрез формулата

$$F \rho_X G \Leftrightarrow F \cap G \neq \emptyset,$$

то двойката $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ напълно определя (с точност до хомеоморфизъм) компактното хаусдорфово пространство X. Нещо повече, с помощта на специални изображения между двойките $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ и $(\mathrm{RC}(Y), \rho_Y)$, могат да бъдат реконструирани всички непрекъснати изображения между компактните хаусдорфови пространства Y и X. Де Врис успява да опише алгебрично двойките $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ като двойки (A, ρ), формирани от пълна булева алгебра A и релация ρ над A, удовлетворяваща определени условия (аксиоми), и също така - специалните изображения между тези двойки. С това той дефинира категорията **deV** и доказва, че тя е дуално еквивалентна на категорията **KHaus** на компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения. Всъщност, в своята публикация де Врис не използва релацията ρ_X спомената по-горе, а нейната "дуална" релация $F \ll_X G$ дефинирана чрез формулата $(F \ll_X G \Leftrightarrow F \bar{\rho}_X G^*)$, където G^* е булевото отрицание на G в булевата алгебра $\mathrm{RC}(X)$, а $\bar{\rho}$ е допълнението на ρ; еквивалентната дефиниция на тази релация над $\mathrm{RC}(X)$ е следната:

$$F \ll_X G \Leftrightarrow F \subseteq \mathrm{int}_X(G).$$

Абстрактните двойки $(A, \ll)$ са наречени от де Врис *компинджентни алгебри*, а сега те се наричат *алгебри на де Врис*. Аксиомите на релацията ρ (респективно, $\ll$) над A всъщност съвпадат с аксиомите на *близостите на Ефремович* [V. A. Efremovič, Infinitesimal spaces, DAN SSSR 76 (1951), 341–343], със само едно изключение: вместо аксиомата за отделимост на Ефремович, в която се споменават точките на съответното множество, де Врис въвежда нова аксиома, която сега се нарича *аксиома за екстенсионалност*. Тъй като близостите на Ефремович са релации над булевата алгебра $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ от всички подмножества на едно множество X, алгебрите на де Врис могат да се разглеждат като безточково обобщение на близостите на Ефремович. Понастоящем двойките (A, ρ), където A е булева алгебра, а ρ е релация от близостен тип над A (наречена *контактна релация*), привличат вниманието не само на тополозите, но и на логиците и информатиците.

Морфизмите на категорията **deV** са доста необичайни и не са достатъчно удобни за работа с тях, тъй като те не са булеви хомоморфизми и тяхната категорна композиция, в общия случай, не съвпада с теоретико-множествената композиция на функции. Но, както показва Федорчук в статията си, цитирана по-горе, пълните булеви хомоморфизми, които рефлектират контактните релации, са **deV**-морфизми и, нещо повече, техните категорни композиции са обичайните теоретико-множествени композиции на функции. Затова той разглежда (непълната) подкатегория **Fed** на **deV**, чиито обекти са същите като на категорията **deV**, но чиито морфизми са само тези "хубави" **deV**-морфизми, които току-що описахме. Той показва, че рестрикцията на дуалността на де Врис върху подкатегорията **Fed** на **deV** е дуалност между категорията **Fed** и (непълната) подкатегория $\mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}}$ на категорията **KHaus**, чиито обекти са същите като на категорията **KHaus**, но чиито морфизми са само *квази-отворените* (непрекъснати) изображения, получавайки по този начин своята теорема за дуалност.

Прилагайки нашата обща категорна теорема за продължаване на дуални еквивалентности, получаваме дуалността на Федорчук по следния начин. Полагаме $\mathcal{A} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{CBoole}_{\mathrm{sup}}$ (където $\mathbf{CBoole}_{\mathrm{sup}}$ е категорията на пълните булеви алгебри и пълните булеви хомоморфизми), $\mathcal{X} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}$ (където $\mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}$ е категорията на екстремално несвързаните компактни хаусдорфови пространства и отворените изображения) и $\mathcal{Y} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}}$. В статията на Г. Димов [G. Dimov, Some generalizations of the Stone duality theorem, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80 (2012), 255–293] е показано, че рестрикцията на дуалността на Стоун върху категорията $\mathcal{A}$ е дуалност между категориите $\mathcal{A}$ и $\mathcal{X}$; именно нея ще разглеждаме като базисна дуалност. За да осигурим наличието на класа $\mathcal{P}$, използваме теоремата на В. Румп [W. Rump, The absolute of a topological space and its application to abelian l-groups, Appl. Categ. Struct. 17(2) (2009) 153–174], че категорията $\mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}$ е корефлективна подкатегория на категорията $\mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}}$ (наистина, както вече отбелязахме по-горе, при наличието на корефлективност, по естествен начин възниква клас $\mathcal{P}$, удовлетворяващ всички изисквания към него, формулирани в нашата обща категорна теорема). Имайки вече всички необходими изходни данни, ние прилагаме нашата обща категорна теорема и получаваме категория $\mathcal{B}$, която е дуално еквивалентна на категорията $\mathcal{Y}$, съдържа $\mathcal{A}$ като пълна подкатегория и е такава, че следната диаграма е комутативна (с точност до естествен изоморфизъм):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\
\mathbf{CBoole}_{\mathrm{sup}} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T=\mathsf{Ult}"] & \mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}. \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{CO}"] \arrow[u, "I"']
\end{tikzcd}$$

Най-сетне, доказвайки, че категорията $\mathcal{B}$ е еквивалентна на категорията **Fed**, ние завършваме нашето ново доказателство на теоремата за дуалност на Федорчук. Точно тук, в процеса на доказателство на последната еквивалентност, ние разкриваме топологичната природа на обектите и морфизмите на категорията **Fed**.

Summary

In this paper we propound a general categorical framework for the extension of dualities and applying it, we present a new proof of the Fedorchuk duality [V. V. Fedorchuk, Boolean δ-algebras and quasi-open mappings. Sibirsk. Mat. Ž. 14 (5) (1973), 1088–1099; English translation: Siberian Math. J. 14 (1973), 759-767 (1974)]. Namely, given a dual equivalence

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, shift left, "T"] & \mathcal{X} \arrow[l, shift left, "S"]
\end{tikzcd}$$

(which we will call *basic dual equivalence*) of categories $\mathcal{A}$ and $\mathcal{X}$, where $\mathcal{X}$ is a full subcategory of a category $\mathcal{Y}$, and a distinguished class $\mathcal{P}$ of morphisms in $\mathcal{Y}$, we find a "good" category $\mathcal{B}$ into which $\mathcal{A}$ is fully embedded via a functor J, and a dual equivalence

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathcal{Y}, \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \end{tikzcd}$$

extending (up to natural isomorphisms) the given one along the inclusion functor I and the embedding J, as in the diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathcal{Y} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\ \mathcal{A} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T"] & \mathcal{X}. \arrow[l, shift left, "S"] \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}$$

Of course, one may easily form a "bad" category $\mathcal{B}$ satisfying these requirements: inside $\mathcal{Y}$, simply replace $\mathcal{X}$ by $\mathcal{A}$ and adjust the composition, using the given dual equivalence. But this *ad-hoc* procedure produces a category $\mathcal{B}$ that is just a camouflage of $\mathcal{Y}$, with no meaningful application. *Our main point is to take advantage of the special class $\mathcal{P}$ of morphisms in $\mathcal{Y}$ that, knowing the category $\mathcal{X}$, is able to encode all needed information about the remaining $\mathcal{Y}$-objects.* Then a "good" category $\mathcal{B}$ should emerge. Its objects should be $\mathcal{A}$-objects with a structure, provided by the class $\mathcal{P}$. And so indeed, we consider as objects of $\mathcal{B}$ the pairs (A, p), with A an $\mathcal{A}$-object and $p \in \mathcal{P}$ a $\mathcal{Y}$-morphism with domain $T(A)$. The desired role of the class $\mathcal{P}$ is ensured by imposing by us five basic requirements on this class. Let us note that *coreflectivity* of $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ always allows for the provision of such a "good" class $\mathcal{P}$.

Applying our general categorical theorem for the extension of dualities, we obtain the Fedorchuk duality as an extension of a suitable restriction of the Stone duality. Fedorchuk proved his duality theorem using de Vries' duality theorem. He showed that his duality theorem is a restriction of de Vries' duality. We, however, establish it solely from a suitable restricted Stone duality, and without any use of the de Vries duality. So that, our proof is a direct one and completely new. Moreover, thanks to our categorical approach, we obtain *a topological interpretation of all algebraic notions used in the Fedorchuk Duality Theorem.*

For presenting some more details about our paper, we will first describe briefly the Fedorchuk and the de Vries dualities.

The celebrated Stone Duality Theorem [M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41, 375-481] shows that the entire information about a zero-dimensional compact Hausdorff space (= *Stone space*) X is, up to homeomorphism, contained in its Boolean algebra $\mathrm{CO}(X)$ of all clopen (= simultaneously closed and open) subsets of X. Likewise, all information about the continuous maps between two Stone spaces X and Y is encoded by the Boolean homomorphisms between the Boolean algebras $\mathrm{CO}(Y)$ and $\mathrm{CO}(X)$. It is natural to ask whether a similar result holds for all compact Hausdorff spaces and continuous maps between them. The first candidate for the role of the Boolean algebra $\mathrm{CO}(X)$ under such an extension seems to be the Boolean algebra $\mathrm{RC}(X)$ of all regular closed subsets of a compact Hausdorff space X (or, its isomorphic copy $\mathrm{RO}(X)$ of all regular open subsets of X), but it fails immediately: indeed, for the *absolute* (or *projective cover*) EX of X, it is well known that the Boolean algebras $\mathrm{RC}(X)$ and $\mathrm{RC}(EX)$ are isomorphic, even though EX is homeomorphic to X only if X is extremally disconnected. However, de Vries [H. de Vries, Compact spaces and compactifications, an algebraic approach, Van Gorcum, The Netherlands, 1962; https://www .illc .uva .nl /Research /Publications /Dissertations /HDS/] showed in 1962 that, if we regard the Boolean algebra $\mathrm{RC}(X)$ together with the relation ρ_X on $\mathrm{RC}(X)$, defined by

$$F\rho_X G \Leftrightarrow F \cap G \neq \emptyset,$$

then the pair $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ determines uniquely (up to homeomorphism) the compact Hausdorff space X. Moreover, with the help of some special maps between the pairs $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ and $(\mathrm{RC}(Y), \rho_Y)$, one can reconstruct all continuous maps between the compact Hausdorff spaces Y and X. He gave an algebraic description of the pairs $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ as pairs (A, ρ), formed by a complete Boolean algebra A and a relation ρ on A, satisfying certain axioms, and he also described algebraically the needed special maps of such pairs. In this way he obtained a category **deV** and its dual equivalence with the category **KHaus** of compact Hausdorff spaces and continuous maps. In fact, de Vries did not use the relation ρ_X as mentioned above, but its "dual" relation, that is, the relation $F \ll_X G$ defined by $(F \ll_X G \Leftrightarrow F\bar{\rho}_X G^*)$, where G^* is the Boolean negation of G in the Boolean algebra $\mathrm{RC}(X)$ and $\bar{\rho}$ is the complement of ρ; the equivalent definition of this relation on $\mathrm{RC}(X)$ is the following one:

$$F \ll_X G \Leftrightarrow F \subseteq \mathrm{int}_X(G).$$

Now known as *de Vries algebras*, he originally called the abstract pairs $(A, \ll)$ *compingent algebras*. The axioms for the relation ρ (respectively, $\ll$) on A are precisely the axioms for Efremovič *proximities* [V. A. Efremovič, Infinitesimal spaces, DAN SSSR 76 (1951), 341–343], with only one exception: instead of Efremovič's separation axiom, which refers to the points of the space in question, de Vries introduced, what is now called, the *extensionality axiom*. Since Efremovič proximities are relations on the Boolean algebra $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ of all subsets of a set X, de Vries algebras may be regarded as point-free generalizations of the Efremovič proximities. Nowadays the pairs (A, ρ), where A is a Boolean algebra and ρ is a proximity-type relation on A (called *contact relation*), attract the attention not only of topologists, but also of logicians and theoretical computer sciencists.

A drawback of the category **deV** is that its morphisms are quite unusual, and not very convenient to work with, since they are not Boolean homomorphisms, and since their categorical composition is in general not the set-theoretical composition of functions. But, as Fedorchuk noted in his aforementioned paper, those complete Boolean homomorphisms which reflect the contact relations of their domains and codomains, are morphisms in **deV** and, moreover, their categorical composition coincides with the usual set-theoretical composition of functions. He therefore considered the (non-full) subcategory **Fed** of **deV** with the same objects, but with morphisms only those “good” **deV**-morphisms just described. He proved that the restricted to the subcategory **Fed** de Vries’ duality gives a duality between **Fed** and the (non-full) subcategory $\mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}}$ of **KHaus** whose morphisms are just the *quasi-open* maps, thus obtaining his duality theorem. Applying our general categorical theorem for extensions of dualities, we obtain the Fedorchuk duality in the following way. We set $\mathcal{A} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{CBoole}_{\mathrm{sup}}$ (where $\mathbf{CBoole}_{\mathrm{sup}}$ is the category of complete Boolean algebras with their suprema-preserving Boolean homomorphisms), $\mathcal{X} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}$ (where $\mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}$ is the category of extremally disconnected compact Hausdorff spaces and their open maps) and $\mathcal{Y} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}}$. As it was shown by Dimov [G. Dimov, Some generalizations of the Stone duality theorem, Publicationes Mathematicae Debrecen, 80 (2012), 255–293], the Stone duality restricts to a duality between the categories $\mathcal{A}$ and $\mathcal{X}$. To construct the class $\mathcal{P}$, we utilize the Rump theorem [W. Rump, The absolute of a topological space and its application to abelian l-groups, Appl. Categ. Struct. 17(2) (2009) 153–174] that $\mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}$ is coreflective in $\mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}}$ (indeed, as we have already noted, this fact allows for the provision of a class $\mathcal{P}$ which satisfies all five conditions required by our general categorical theorem). Hence, we are in position to use it and to obtain a category $\mathcal{B}$ which is dually equivalent to the category $\mathcal{Y}$, contains $\mathcal{A}$ as a full subcategory and makes the following diagram commute (up to natural isomorphisms):

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathbf{KHaus}_{\mathrm{qop}} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\
\mathbf{CBoole}_{\mathrm{sup}} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T=\mathsf{Ult}"] & \mathbf{EKH}_{\mathrm{op}}. \arrow[u, "I"'] \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{CO}"]
\end{tikzcd}$$

Finally, proving that the category $\mathcal{B}$ is equivalent to the category **Fed**, we complete our new proof of the Fedorchuk duality theorem. Exactly here, in the course of the proof of the last equivalence, we reveal the topological nature of the objects and morphisms of the category **Fed**.

This paper is cited in:

1. Ali Akbar Estaji, Toktam Haghdadi and Javad Farokhi Ostad, Topobooleans and Boolean Contact Algebras with Interpolation Property, Filomat 35 (9) (2021), 2895-2909. IF 0.844 (2020), ISSN: 2406-0933.

Г7-3. Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Walter Tholen, Categorical Extension of Dualities: From Stone to de Vries and Beyond, I, *Applied Categorical Structures*, 30(2), 2022, 287–329, https://doi.org/10.1007/s10485-021-09658-6, **IF 0.713 (2021), Web of Science Quartile: Q3 (2021)**, ISSN (print) 0927-2852, ISSN (electronic) 1572-9095, *MR4385368, Zbl 1492.54013* **(45 точки)**

Резюме

Тази статия може да бъде разглеждана като продължение на статията **Г7-2** (т.е. на статията [G. Dimov, E. Ivanova-Dimova, W. Tholen, Extensions of dualities and a new approach to the Fedorchuk duality, *Topology and its Applications*, 281 (2020) 107207] и поради това ще считаме нейното резюме за част от настоящото.

В настоящата статия предлагаме нова обща категорна конструкция (= схема, теорема) за продължаване на дуални еквивалентности. Конструкцията, представена в **Г7-2**, се явява неин частен случай. В новата теорема заместваме старото условие (P5) за класа $\mathcal{P}$ от статията **Г7-2** с по-слабо условие (то фигурира в новата статия като условие (P3)). Това ни позволява да получим ново доказателство на теоремата за дуалност на де Врис и, нещо повече, да я представим в нова модифицирана форма, в която морфизмите на категорията дуална на категорията **KHaus**, както и техните композиции, са вече естествени. С това получаваме нова теорема за дуалност за категорията **KHaus**. Също така, използвайки дуалната форма на нашата категорна теорема от статията **Г7-2**, даваме ново доказателство на продължението на дуалността на де Врис върху категорията **Tych** на тихоновите пространства и непрекъснатите изображения, получено от Бежанишвили-Моранди-Олбердинг [G. Bezhanishvili, P.J. Morandi, B. Olberding, An extension of De Vries duality to completely regular spaces and compactifications, Topol. Appl. 257, 85–105 (2019)]; нещо повече, правейки това, получаваме и нова теорема за дуалност за категорията **Tych**.

По-конкретно, за получаването на дуалността на де Врис, полагаме $\mathcal{A} \overset{\text{df}}{=}$ **CBoole** (където **CBoole** е категорията на пълните булеви алгебри и булевите хомоморфизми), $\mathcal{X} \overset{\text{df}}{=}$ **EKH** (където **EKH** е категорията на компактните хаусдорфови екстремално несвързани пространства и непрекъснатите изображения), $\mathcal{Y} \overset{\text{df}}{=}$ **KHaus**, а като базисна дуалност между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{X}$ използваме добре известната рестрикция

$$\mathbf{CBoole} \underset{S=\mathsf{CO}}{\overset{T=\mathsf{Ult}}{\rightleftarrows}} \mathbf{EKH}$$

на стоуновата дуалност. Очевидно, **EKH** е пълна подкатегория на **KHaus**. С помощта на известната теорема на Глисон [A.M. Gleason, Projective topological spaces. Ill. J. Math. 2, 482–489 (1958)] (а именно, че едно компактно хаусдорфово пространство е проективно тогава и само тогава, когато то е екстремално несвързано) лесно се вижда, че класът от всички неприводими изображения между компактни хаусдорфови пространства с екстремално несвързана дефиниционна област може да играе ролята на $\mathcal{P}$ в нашата нова категорна теорема за продължаване на дуалности. Разполагайки с всички тези изходни данни, ние сме в

състояние да се възползваме от нашата категорна теорема. Тя ни дава една категория $\mathcal{B}$, която е дуално еквивалентна на категорията **KHaus**, съдържа **CBoole** като пълна подкатегория и е такава, че следната диаграма е комутативна (с точност до естествен изоморфизъм):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathbf{KHaus} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\ \mathbf{CBoole} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T=\mathsf{Ult}"] & \mathbf{EKH}. \arrow[u, "I"'] \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{CO}"] \end{tikzcd}$$

В настоящата работа тази категория $\mathcal{B}$ е означена с $\mathsf{C}(\mathcal{A},\mathcal{P},\mathcal{X})/\sim$. След това трансформираме категорията $\mathcal{B}$ в нова категория $\mathbf{deVBoo}/\backsim$, чиито обекти са същите като обектите на категорията **deV** и *чиито морфизми са класове на еквивалентност от булеви хомоморфизми, рефлектиращи контактните релации, а техните композиции се получават чрез теоретико-множествени композиции на представители на класовете на еквивалентност.* Доказваме, че категорията $\mathcal{B}$ е еквивалентна на тази нова категория, което означава, че категорията $\mathbf{deVBoo}/\backsim$ е дуално еквивалентна на категорията **KHaus**. Точно тази нова дуалност за категорията **KHaus** ние наричаме *модифицирана дуалност на де Врис.* Показвайки, че категорията $\mathbf{deVBoo}/\backsim$ е изоморфна на категорията **deV**, ние завършваме нашето ново доказателство на теоремата на де Врис за дуалност.

Като всяка друга категорна теорема, нашата нова обща категорна теорема за продължаване на дуалности има *дуален двойник* (= нова теорема, получена от старата чрез обръщане на стрелките). Неин частен случай се явява дуалният двойник на нашата категорна теорема, доказана в работата ни **Г7-2**. В резюмето на **Г7-2** отбелязахме, че корефлективността на $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ осигурява съществуването на клас $\mathcal{P}$, удовлетворяващ всички изисквания, формулирани в нашата категорна теорема от статията **Г7-2**. Следователно рефлективността на $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ осигурява наличието на клас, означен вече с $\mathcal{J}$, удовлетворяващ всички изисквания, формулирани в дуалния двойник на нашата категорна теорема от статията **Г7-2**. Имайки това предвид, за да получим ново доказателство на теоремата за дуалност на Бежанишвили-Моранди-Олбердинг, полагаме $\mathcal{A} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{deV}$, $\mathcal{X} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{KHaus}$, $\mathcal{Y} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{Tych}$ и в качеството на базисна дуалност разглеждаме дуалността на де Врис

$$\begin{tikzcd} \mathbf{deV} \arrow[r, shift left, "T"] & \mathbf{KHaus} \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{RC}"] \end{tikzcd}$$

Добре известно е, че категорията **KHaus** е рефлективна подкатегория на категорията **Tych**. Следователно, можем да използваме дуалния двойник на нашата категорна теорема и да получим с негова помощ една категория $\mathcal{B}$ (означена в статията ни с $\mathsf{D}(\mathcal{A},\mathcal{J},\mathcal{X})$), която е дуално еквивалентна на категорията **Tych**, съдържа **deV** като пълна подкатегория и е такава, че следната диаграма е комутативна (с точност до естествен изоморфизъм):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathbf{Tych} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\ \mathbf{deV} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T"] & \mathbf{KHaus}. \arrow[u, "I"'] \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{RC}"] \end{tikzcd}$$

Дуалността на де Врис се осъществява чрез контравариантните функтори $\mathsf{RC}(=S)$ и Clust. Функторът RC съпоставя на всеки **KHaus**-обект X двойката, състояща се от булевата алгебра $\mathrm{RC}(X)$ от всички негови регулярно затворени подмножества и релацията ρ_X над $\mathrm{RC}(X)$, дефинирана чрез формулата $F\rho_X G \Leftrightarrow F\cap G\neq\emptyset$. (Да напомним, че ако X е екстремално несвързано пространство, то булевата алгебра $\mathrm{RC}(X)$ съвпада с булевата алгебра $\mathrm{CO}(X)$ от всички отворено-затворени подмножества на X, която се използва в дуалността на Стоун.) Функторът Clust наподобява стоуновия функтор Ult (който съпоставя на всяка (пълна) булева алгебра B пространството от ултрафилтрите в B) и съпоставя на всяка алгебра на де Врис B пространството от така наречените *клъстъри* в B. В настоящата статия показваме, че функторът Clust се представя (точно като функтора Ult) от булевата алгебра $\mathbf{2}$ с два елемента и че той може да бъде заменен в дуалността на де Врис с контравариантния hom-функтор $\mathbf{deV}(-,\mathbf{2})$ със стойности в категорията **KHaus**, където $\mathbf{2}$ се разглежда като дискретна алгебра на де Врис. (Тази констатация се базира на факта, доказан първо в [G. Dimov, Proximity-type relations on Boolean algebras and their connections with topological spaces. Doctor of Sciences (= Dr. Habil.) Thesis, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University "St. Kl. Ohridski", Sofia, 1–292 (2013), https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/prof-dmn-georgi-dimov], че точно както ултрафилтрите в една булева алгебра A могат да бъдат еквивалентно представени като булеви хомоморфизми, изобразяващи A в $\mathbf{2}$, клъстърите в една алгебра на де Врис A могат да бъдат еквивалентно представени като **deV**-морфизми, изобразяващи A в дискретната алгебра на де Врис $\mathbf{2}$.) След установяването на този факт, ние вече считаме, че именно функторът $\mathbf{deV}(-,\mathbf{2})$ е гореспоменатия функтор T в дуалността на де Врис. Разполагайки с категорията $\mathcal{B}$ (означена в статията ни с $\mathsf{D}(\mathcal{A},\mathcal{J},\mathcal{X})$), построяваме с нейна помощ една "междинна" категория **UdeV**. Обектите на категорията **UdeV**, които наричаме *универсални двойки на де Врис*, са двойки (A,Y), формирани от алгебра на де Врис A и подмножество Y на (компактното хаусдорфово пространство) $\mathbf{deV}(A,2)$, което, както е показано в статията ни, се явява Стоун-Чеховско компактно разширение на своето подпространство Y. Лесно се вижда, че категорията **UdeV** е еквивалентна на категорията $\mathcal{B}(=\mathsf{D}(\mathcal{A},\mathcal{J},\mathcal{X}))$ и, следователно, категорията **UdeV** е дуално еквивалентна на категорията **Tych**. Това е и нашата нова теорема за дуалност за категорията **Tych**. Последната стъпка към установяване на дуалността на Бежанишвили-Моранди-Олбердинг се състои в използването на дуалността на Тарски за кодирането на множеството Y чрез неговия булеан, разглеждан като пълна атомна булева алгебра. Идеята е следната: вместо множествата Y можем да разглеждаме **deV**-влаганията $A\to B$, където B е пълна атомна булева алгебра. По този начин показваме, че категорията **UdeV** е еквивалентна на категорията **UBdeV**, построена от Бежанишвили-Моранди-Олбердинг като дуална на категорията **Tych**. С това завършваме нашето алтернативно доказателство на теоремата за дуалност на Бежанишвили-Моранди-Олбердинг.

Summary

This paper can be regarded as a continuation of the paper **Г7-2** (i.e. of the paper [G. Dimov, E. Ivanova-Dimova, W. Tholen, Extensions of dualities and a new approach to the Fedorchuk duality, *Topology and its Applications*, 281 (2020) 107207], so that we will consider its summary as a part of the present one.

In the present paper we propound a new general categorical extension construction for dual equivalences. That one presented in **Г7-2** is now a special case of it. In the new theorem we replace the old condition (P5) for the class $\mathcal{P}$ from **Г7-2** with a weaker condition (it appears in the paper as condition (P3)). This allows us to obtain a new proof of the de Vries duality theorem and, moreover, to present it in a new modified form in which the morphisms and their compositions are already natural. In this way we obtain a new duality theorem for the category **KHaus**. Also, using the dualization of our categorical theorem from **Г7-2**, we give an alternative proof of the extension of the de Vries duality to the category **Tych** of Tychonoff spaces and continuous maps that was provided by Bezhanishvili, Morandi and Olberding [G. Bezhanishvili, P.J. Morandi, B. Olberding, An extension of De Vries duality to completely regular spaces and compactifications, Topol. Appl. 257, 85–105 (2019)] (we will refer to it as *BMO duality*) and, in the process of doing this, we obtain a new duality theorem for the category **Tych**.

Specifically, for obtaining de Vries duality, we put $\mathcal{A} \stackrel{\text{df}}{=}$ **CBoole** (where **CBoole** is the category of complete Boolean algebras and Boolean homomorphisms), $\mathcal{X} \stackrel{\text{df}}{=}$ **EKH** (where **EKH** is the category of compact Hausdorff extremally disconnected spaces and continuous maps), $\mathcal{Y} \stackrel{\text{df}}{=}$ **KHaus** and as a basic duality between $\mathcal{A}$ and $\mathcal{X}$, we use the well-known restricted Stone duality

$$\mathbf{CBoole} \underset{S=\mathsf{CO}}{\overset{T=\mathsf{Ult}}{\rightleftarrows}} \mathbf{EKH}$$

Clearly, **EKH** is a full subcategory of **KHaus**. With Gleason's Theorem [A.M. Gleason, Projective topological spaces. Ill. J. Math. 2, 482–489 (1958)] (namely, that a compact Hausdorff space is projective if, and only if, it is extremally disconnected) one sees easily that the class of irreducible maps of compact Hausdorff spaces with extremally disconnected domain can be taken as the class $\mathcal{P}$ in our new categorical theorem for extension of dualities. Hence, we are in a position to apply our categorical theorem. It gives us a category $\mathcal{B}$ which is dually equivalent to the category **KHaus**, contains **CBoole** as a full subcategory and makes the following diagram commute

(up to natural isomorphisms):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathbf{KHaus} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\ \mathbf{CBoole} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T=\mathsf{Ult}"] & \mathbf{EKH}. \arrow[u, "I"'] \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{CO}"] \end{tikzcd}$$

In the paper this category $\mathcal{B}$ is denoted by $\mathsf{C}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{X})/\sim$. Then we transform the category $\mathcal{B}$ into a new category $\mathbf{deVBoo}/\backsim$ whose objects are the same as those of the category **deV** and *whose morphisms are equivalence classes of Boolean homomorphisms reflecting the contact relations, to be composed by ordinary map composition of their representatives*. We prove that the category $\mathcal{B}$ is equivalent to this new category, which implies immediately that the category $\mathbf{deVBoo}/\backsim$ is dually equivalent to the category **KHaus**. Exactly this new duality for the category **KHaus** is called by us *modified de Vries' duality*. Proving that the category $\mathbf{deVBoo}/\backsim$ is isomorphic to the category **deV**, we complete our new proof of de Vries' duality theorem.

As every categorical theorem, our new general categorical theorem for the extension of dualities has a dualization. The dualization of our categorical theorem proved in the paper **Γ7-2** is a special case of it. In the summary of **Γ7-2** we noted that coreflectivity of $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ always allows for the provision of a class $\mathcal{P}$ which satisfies all requirements of our categorical theorem from **Γ7-2**. Then, obviously, the reflectivity of $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ allows for the provision of a class, which we denote now by $\mathcal{J}$, and which satisfies all requirements of the dualization of our categorical theorem from **Γ7-2**. Having this in mind, for obtaining our new proof of BMO duality theorem, we set $\mathcal{A} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{deV}$, $\mathcal{X} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{KHaus}$, $\mathcal{Y} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{Tych}$ and start with the de Vries duality

$$\begin{tikzcd} \mathbf{deV} \arrow[r, shift left, "T"] & \mathbf{KHaus} \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{RC}"] \end{tikzcd}$$

It is a well-known fact that the category **KHaus** is a reflective subcategory of the category **Tych**. Thus we can apply our dualized categorical theorem for obtaining a category $\mathcal{B}$ (denoted in the paper by $\mathsf{D}(\mathcal{A}, \mathcal{J}, \mathcal{X})$) which is dually equivalent to the category **Tych**, contains **deV** as a full subcategory and makes the following diagram commute (up to natural isomorphisms):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "\tilde{T}"] & \mathbf{Tych} \arrow[l, shift left, "\tilde{S}"] \\ \mathbf{deV} \arrow[u, "J"] \arrow[r, shift left, "T"] & \mathbf{KHaus}. \arrow[u, "I"'] \arrow[l, shift left, "S=\mathsf{RC}"] \end{tikzcd}$$

The de Vries duality is realized by the contravariant functors $\mathsf{RC}(= S)$ and Clust. The functor RC assigns to every space X in **KHaus** the complete Boolean algebra $\mathrm{RC}(X)$ of its regular closed sets, provided with the relation that declares two sets to be in contact when they intersect. (Recall that for X extremally disconnected, $\mathrm{RC}(X)$ coincides with the algebra $\mathrm{CO}(X)$ of clopen sets in X, as used in the Stone duality.) The functor Clust generalizes Stone's formation of the space of ultrafilters in a (complete) Boolean algebra, assigning to a de Vries algebra its space of so-called *clusters*. As we show in this paper, the functor Clust is (just like the ultrafilter functor for Boolean algebras) represented by the two-chain $\mathbf{2}$ and may be replaced by the **KHaus**-valued contravariant hom-functor $\mathbf{deV}(-,\mathbf{2})$, where $\mathbf{2}$ is regarded as a discrete de Vries algebra. This observation is based on the fact, proved first in [G. Dimov, Proximity-type relations on Boolean algebras and their connections with topological spaces. Doctor of Sciences (= Dr. Habil.) Thesis, Faculty of Mathematics and Informatics, Sofia University "St. Kl. Ohridski", Sofia, 1–292 (2013), https://www.fmi.uni-sofia.bg/bg/prof-dmn-georgi-dimov], that exactly as the ultrafilters in a Boolean algebra A may equivalently be described as $\mathbf{2}$-valued Boolean homomorphisms on A, the clusters in a de Vries algebra A may equivalently be presented by $\mathbf{2}$-valued de Vries morphisms on A. Here we prefer to take the functor T in the form $\mathbf{deV}(-,\mathbf{2})$. Having the category $\mathcal{B}(=\mathsf{D}(\mathcal{A},\mathcal{J},\mathcal{X}))$, we form a "mediating" category, **UdeV**, whose definition flows naturally from our categorical extension technique. The **UdeV**-objects, which we call *universal de Vries pairs*, are de Vries algebras A that come equipped with a subset Y of (the compact Hausdorff space) $\mathbf{deV}(A,2)$ which may then serve as the Stone-Čech compactification of its subspace Y. It is easily seen that the category **UdeV** is equivalent to the category $\mathcal{B}(=\mathsf{D}(\mathcal{A},\mathcal{J},\mathcal{X}))$ and thus the category **UdeV** is dually equivalent to the category **Tych**. This is our new duality theorem for the category **Tych**. The last step towards establishing the BMO duality then consists of employing the Tarski duality to encode the subset Y by its power set, treated as a complete atomic Boolean algebra. Briefly, rather than subsets Y one may equivalently consider de Vries embeddings $A \to B$ into complete atomic Boolean algebras B. In this way we show that our category **UdeV** is equivalent to the BMO category **UBdeV**. This completes our alternative proof of BMO duality.

This paper is cited in:

1. Ali Akbar Estaji, Toktam Haghdadi and Javad Farokhi Ostad, Topobooleans and Boolean Contact Algebras with Interpolation Property, Filomat 35 (9) (2021), 2895-2909. IF 0.844 (2020).

2. Guram Bezhanishvili, Luca Carai, Patrick J. Morandi and Bruce Olberding, A unified approach to Gelfand and de Vries dualities, Forum Mathematicum (Published online by De Gruyter: February 28, 2023), https://doi.org/10.1515/forum-2022-0096, Impact Factor: 0.943 (2021), Online ISSN: 1435-5337, Print ISSN: 0933-7741.

Г7-4. Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Walter Tholen, Categorical Extension of Dualities: From Stone to de Vries and Beyond, II, *Topology and its Applications* (2023) **IF 0.583 (2021), Web of Science Quartile: Q4 (2021)**, ISSN (print) 0166-8641, ISSN (electronic) 1879-3207 (accepted for publication) **(36 точки)**.

Резюме

Тази статия е продължение на статията **Г7-3** (т.е. на работата [Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Walter Tholen, Categorical Extension of Dualities: From Stone to de Vries and Beyond, I, *Applied Categorical Structures*, 30(2), 2022, 287–329]), но в нея се използват и някои резултати от статиите **В4-2** и **Г7-1**, и затова ще считаме, че резюметата на тези три статии са части от настоящото резюме.

В настоящата статия, използвайки нашата обща категорна теорема за продължаване на дуални еквивалентности, доказана в **Г7-3**, получаваме нова категория, която е дуално еквивалентна на категорията **LKHaus** на локално компактните хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения, като при това тази нова дуалност се явява продължение на дуалност от стоунов тип за категорията **EdLKH** на екстремално несвързаните локално компактни хаусдорфови пространства и непрекъснатите изображения. Доказваме също така, че новата категория е изоморфна на категорията **CLCA** на пълните локално контактни алгебри и подходящи морфизми, въведена от Димов в статията [G. Dimov, A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps – I, Acta Math. Hungarica 129 (2010) 314–349]. С това показваме, че категорията **CLCA** е дуално еквивалентна на категорията **LKHaus** – факт, установен от Димов в цитираната току-що негова статия. По този начин получаваме ново доказателство на теоремата за дуалност на Димов за категорията **LKHaus**, която е продължение на дуалността на де Врис за категорията **KHaus**. *За разлика от морфизмите на категорията* **CLCA** *и техния композиционен закон (които са подобни на морфизмите на категорията* **deV** *и техния композиционен закон), морфизмите на новата категория, както и техния композиционен закон са много естествени и с тях се работи лесно.*

По-конкретно, обекти на категорията **CLCA** са всички пълни локално контактни алгебри. Локално контактните алгебри са въведени от П. Рьопер [P. Roeper, Region-based topology, Journal of Philosophical Logic 26 (1997) 251– 309] (вж. също [D. Vakarelov, G. Dimov, I. Düntsch and B. Bennett, A proximity approach to some region-based theories of space, J. Applied Non-Classical Logics 12 (2002) 527-559] и [G. Dimov and D. Vakarelov, Contact Algebras and Region-based Theory of Space: A Proximity Approach - I, Fundamenta Informaticae 74 (2-3) (2006) 209–249]). Те са обобщени алгебри на де Врис, като в тях, като трета компонента, присъства идеал в булевата алгебра, явяваща се тяхна първа компонента, който удовлетворява някои естествени условия. **CLCA**-морфизмите пък са обобщени **deV**-морфизми, които удовлетворяват някои допълнителни условия, отчитащи наличието на новата трета компонента – идеала. Техният композиционен закон е подобен на композиционния закон за **deV**-морфизмите. *Нашата основна цел в настоящата статия е конструирането на нова категория, която да е дуално* *еквивалентна на категорията* **LKHaus**, *да има същите обекти като категорията* **CLCA**, *но да е с по-естествени морфизми, които да са със стандартен композиционен закон.*

За постигането на тази цел процедираме по начин подобен на този, който използвахме за получаването на алтернативно доказателство на дуалността на де Врис в работата **Г7-3**. Полагаме $\mathcal{X} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{EdLKH}$. Съчетавайки резултатите от статиите ни **В4-2** и **Г7-1**, получаваме веднага дуалната на $\mathcal{X}$ категория $\mathcal{A} = \mathbf{lzCBoo}$: нейни обекти са пълните lz-алгебри, които представляват двойки от пълна булева алгебра и отворено подмножество на нейния стоунов дуален обект (вж. **В4-2** и **Г7-1**). Полагайки $\mathcal{Y} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{LKHaus}$ и фиксирайки в качеството на $\mathcal{P}$ класа от всички съвършени неприводими изображения между локално компактни хаусдорфови пространства с екстремално несвързана дефиниционна област, ние сме в състояние да установим следната поредица от един изоморфизъм и две еквивалентности, посочени в диаграмата

$$\mathbf{CLCA}^{\mathrm{op}} \rightleftarrows (\mathbf{DBoo}/\backsim)^{\mathrm{op}} \rightleftarrows (\mathsf{C}(\mathcal{A},\mathcal{P},\mathcal{X})/\sim)^{\mathrm{op}} \rightleftarrows \mathbf{LKHaus}\ ,$$

композицията на които е точно споменатата по-горе дуална еквивалентност, получена от Димов. Тук $\mathsf{C}(\mathcal{A},\mathcal{P},\mathcal{X})/\sim$ е всъщност категорията $\mathcal{B}$, която ни се дава от нашата обща категорна теорема за продължаване на дуални еквивалентности, доказана в **Г7-3**, а **DBoo** е категория, чиито обекти са същите като тези на категорията **CLCA**, но *чиито морфизми са булевите хомоморфизми, които рефлектират контактната релация и са съгласувани с елементите на фиксираните идеали, а композицията им е обичайната композиция на функции.* Фактор категорията на категорията **DBoo**, построена в статията ни, е дуално еквивалентна на категорията **LKHaus** (това твърдение всъщност е *нашата нова теорема за дуалност за категорията* **LKHaus**); показвайки, че тя е изоморфна на категорията **CLCA**, ние завършваме нашето алтернативно доказателство на теоремата за дуалност на Димов.

Summary

This paper is a continuation of the paper **Г7-3** (i.e. of the paper [Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Walter Tholen, Categorical Extension of Dualities: From Stone to de Vries and Beyond, I, *Applied Categorical Structures*, 30(2), 2022, 287–329]) but in it we use some results from the papers **В4-2** and **Г7-1** as well, so that we will consider the summaries of these three papers as parts of the present summary.

In this paper, applying our general categorical procedure for the extension of dual equivalences as presented in **Г7-3**, a new algebraically defined category is established that is dually equivalent to the category **LKHaus** of locally compact Hausdorff spaces and continuous maps, with the dual equivalence extending a Stone-type duality for the category **EdLKH** of extremally disconnected locally compact Hausdorff spaces and continuous maps. The new category is then shown to be isomorphic to the category

CLCA of complete local contact algebras and suitable morphisms between them, introduced by Dimov in the paper [G. Dimov, A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps – I, Acta Math. Hungarica 129 (2010) 314–349]. With this we prove that the category **CLCA** is dually equivalent to the category **LKHaus** - a fact established by Dimov in his article just quoted. Thereby, a new proof of Dimov's duality theorem is presented. (Note that Dimov's duality theorem for the category **LKHaus** is an extension of the de Vries duality theorem for the category **KHaus**.) *Unlike the morphisms of the category* **CLCA** *and their composition law (which are similar to the morphisms of the category* **deV** *and their composition law), the morphisms of the new category and their composition law are very natural and easy to handle.*

Specifically, the objects of the category **CLCA** are all complete local contact algebras. The local contact algebras were introduced by Roeper [P. Roeper, Region-based topology, Journal of Philosophical Logic 26 (1997) 251– 309] (see also [D. Vakarelov, G. Dimov, I. Düntsch and B. Bennett, A proximity approach to some region-based theories of space, J. Applied Non-Classical Logics 12 (2002) 527-559] and [G. Dimov and D. Vakarelov, Contact Algebras and Region-based Theory of Space: A Proximity Approach - I, Fundamenta Informaticae 74 (2-3) (2006) 209– 249]). They are generalized de Vries algebras equipped with an ideal of their underlying Boolean algebra which satisfies some natural conditions. The **CLCA**-morphisms are generalized de Vries morphisms satisfying some compatibility conditions with the ideal structure. Their composition law is similar to the composition law of de Vries morphisms. Our main goal is the construction of a new category, dually equivalent to the category **LKHaus**, with the same objects as **CLCA**, but with more naturally described morphisms, composed in a standard manner.

To this end we follow a path similar to the procedure used in our alternative proof of the de Vries duality presented in **Γ7-3**. We set $\mathcal{X} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{EdLKH}$. Using the results from **B4-2** and **Γ7-1**, we describe its Stone-type dual as the category $\mathcal{A} = \mathbf{lzCBoo}$; its object are complete lz-algebras, these being complete Boolean algebras equipped with an open dense subset of its Stone dual (see **B4-2** and **Γ7-1**). Putting $\mathcal{Y} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{LKHaus}$ and choosing for $\mathcal{P}$ the class of perfect irreducible maps of locally compact Hausdoff spaces with extremally disconnected locally compact Hausdorff domain, we are now at the beginning of a passage that culminates in the establishment of a string of an isomorphism and two equivalences, indicated by

$$\mathbf{CLCA}^{\mathrm{op}} \rightleftarrows (\mathbf{DBoo}/\backsim)^{\mathrm{op}} \rightleftarrows (\mathsf{C}(\mathcal{A},\mathcal{P},\mathcal{X})/\sim)^{\mathrm{op}} \rightleftarrows \mathbf{LKHaus}\,,$$

whose composite is the mentioned above dual equivalence obtained by Dimov. Here, $\mathsf{C}(\mathcal{A},\mathcal{P},\mathcal{X})/\sim$ is the category $\mathcal{B}$ given by our general categorical theorem for the extension of dual equivalences as presented in **Γ7-3**, and **DBoo** is a category with the same objects as the category **CLCA** and *with morphisms that are Boolean homomorphisms reflecting the contact relation and respecting the ideal structure, composed by ordinary map composition.* Its quotient category gives a new dual equivalence with **LKHaus** (this assertion, actually, is *our new duality theorem for the category* **LKHaus**) and by showing that it is isomorphic to **CLCA**, we finally obtain an alternative proof of the Dimov duality theorem.

Г7-5. Georgi Dimov, Elza Ivanova-Dimova, Ivo Duentsch, On dimension and weight of a local contact algebra, *Filomat*, 32 (15) (2018), 5481-5500, **IF 0.789, Web of Science Quartile: Q2**, https://doi.org/10.2298/FIL1815481D, ISSN (print) 0354-5180, ISSN (electronic) 2406-0933, *MR3898590, Zbl 1499.54138* (**60 точки**)

Резюме

В това резюме ще използваме някои факти и означения от резюметата на статиите **Г7-2**, **Г7-3** и **Г7-4**, и поради това ще считаме тези три резюмета за част от настоящото.

В настоящата статия въвеждаме понятията за *тегло* w_a *и размерност* $\dim_a$ *на локално контактна алгебра* и доказваме, че ако X е локално компактно хаусдорфово пространство, то $w(X) = w_a(\Lambda^t(X))$, и ако, освен това, X е нормално, то $\dim(X) = \dim_a(\Lambda^t(X))$. Тук $w(X)$ е теглото на топологичното пространство X, а Λ^t е контравариантния функтор, осъществяващ дуалната еквивалентност между категориите **LKHaus** и **CLCA**, построен от Димов [G. Dimov, A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps – I, Acta Math. Hungarica 129 (2010) 314–349].

Теоремата за дуалност на Димов се базира на резултатите от статията на Рьопер [P. Roeper, Region-based topology, Journal of Philosophical Logic 26 (1997) 251–309], в която е показано, че цялата информация относно едно локално компактно хаусдорфово пространство X се съдържа в тройката

$$(\mathrm{RC}(X), \rho_X, \mathrm{CR}(X)),$$

където $\mathrm{CR}(X)$ е множеството от всички компактни регулярно затворени подмножества на X. За да опише абстрактно тройките $(\mathrm{RC}(X), \rho_X, \mathrm{CR}(X))$, Рьопер въвежда понятието *топология, базирана на региони* и доказва, че – с точност до хомеоморфизъм, респективно, изоморфизъм – съществува биекция между класа от всички локално компактни хаусдорфови пространства и класа от всички пълни топологии, базирани на региони. Да отбележим, че

$$\Lambda^t(X) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (\mathrm{RC}(X), \rho_X, \mathrm{CR}(X)),$$

за всяко локално компактно хаусдорфово пространство X. В статията на Г. Димов и Д, Вакарелов [G. Dimov, D. Vakarelov, Contact algebras and region-based theory of space: a proximity approach – I, Fundamenta Informaticae 74 (2006) 209–249], бе въведено по-общото понятие *булева контактна алгебра* и, съответно, "дуалните" алгебри на "компинджентните булеви алгебри" бяха наречени "нормални булеви контактни алгебри" (съкратено, NCAs), а "топологиите, базирани на региони" бяха наречени "локално контактни алгебри" (съкратено, LCAs). Типични примери на булеви контактни алгебри са двойките

$$(\mathrm{RC}(X), \rho_X),$$

където X е произволно топологично пространство. Ще използваме даже още по-общото понятие *булева предконтактна алгебра*, въведено от Дюнч и Вакарелов в статията [I. Düntsch, D. Vakarelov, Region-based theory of discrete spaces:

A proximity approach, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 49 (2007) 5–14].

При наличието на дуалността на Димов

$$\mathbf{LKHaus} \underset{\Lambda^a}{\overset{\Lambda^t}{\rightleftarrows}} \mathbf{CLCA},$$

естествено възниква следната задача: ако $\mathcal{P}$ е топологично свойство, да се опише в термините на локално контактните алгебри свойството $\mathcal{P}'$, дефинирано чрез $A \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow \Lambda^a(A) \in \mathcal{P}$, където A е произволен **CLCA**-обект (или, еквивалентно, $X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \Lambda^t(X) \in \mathcal{P}'$, където X е произволен **LKHaus**-обект).

В настоящата статия въвеждаме понятията за *размерност на предконтактна алгебра* и *тегло на локално контактна алгебра*, и доказваме, в частност, че:

1. теглото на локално компактно хаусдорфово пространство X е равно на теглото на локално контактната алгебра $\Lambda^t(X)$,

2. Чех-Лебеговата размерност на нормално T_1-пространство X е равна на размерността на булевата нормална контактна алгебра $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ (да отбележим, че всяка нормална контактна алгебра (B, ρ) може да се разглежда като локално контактна алгебра от вида (B, ρ, B)). В частност, Чех-Лебеговата размерност на нормално локално компактно хаусдорфово пространство X е равна на размерността на локално контактната алгебра $\Lambda^t(X)$,

3. размерността на всяка булева нормална контактна алгебра е равна на размерността на нейното *NCA-попълнение* (вж. [G. Dimov, A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps – II, Acta Math. Hungarica 130 (2011) 50–77] за това понятие),

4. размерността на всяка NCA от вида (B, ρ_s) (където ρ_s е най-малката (нормална) контактна релация над булевата алгебра B) е равна на нула (както и би трябвало да бъде), и

5. ако $(B, \rho, \mathbb{B})$ е LCA, $m \in B \setminus \{0\}$, и $(B_m, \rho_m, \mathbb{B}_m)$ е релативната LCA на $(B, \rho, \mathbb{B})$, т.е.

   $$B_m \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{b \in B \mid b \leq m\},\ \rho_m \stackrel{\mathrm{df}}{=} \rho_{\restriction B_m^2},\ \mathbb{B}_m \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{b \wedge m : b \in \mathbb{B}\},$$

   то $\dim_a(B_m, \rho_m, \mathbb{B}_m) \leq \dim_a(B, \rho, \mathbb{B})$.

   (Да отбележим, че, както е добре известно, B_m, разглеждана с частичната наредба, индуцирана от B, е булева алгебра; тя се нарича *релативна алгебра* или *фактор алгебра* на B по отношение на m.)

Във връзка с последното твърдение, нека отбележим, че то е алгебрично обобщение на дуалното твърдение на следния топологичен факт: за всяко (локално компактно) нормално T_1-пространство X и негово регулярно затворено подмножество M, е изпълнено, че $\dim(M) \leq \dim(X)$. (Разбира се, това неравенство е изпълнено и за всяко затворено подмножество M.)

Най-сетне, струва си да отбележим, че с помощта на дуалностите на Димов или де Врис не може да се дефинира понятие за размерност *само за булеви алгебри*, което да е дуално на топологичното понятие за размерност, тъй като за всеки две естествени числа n и m, булевите алгебри $\mathrm{RC}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathrm{RC}(\mathbb{R}^m)$ са изоморфни, но, разбира се, при $n \neq m$, $\dim(\mathbb{R}^n) \neq \dim(\mathbb{R}^m)$ (тук $\mathbb{R}$ е реалната права със своята естествена топология). Също така, не може да се дефинира адекватно (в същия смисъл) понятие за тегло само за булеви алгебри, тъй като, например, булевите алгебри $\mathrm{RC}(\mathbb{I})$ и $\mathrm{RC}(E\mathbb{I})$ са изоморфни, но $w(\mathbb{I}) = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = w(E\mathbb{I})$ (тук $\mathbb{I}$ е единичния интервал [0,1] със своята естествена топология, а $E\mathbb{I}$ е абсолюта на $\mathbb{I}$, т.е. стоуновото дуално пространство на булевата алгебра $\mathrm{RC}(\mathbb{I})$).

Summary

In this summary we will use some facts and notation from the summaries of the papers **Г7-2**, **Г7-3** and **Г7-4**, so that we will consider these three summaries as parts of the present one.

In the present paper, we introduce the notions of weight w_a and dimension $\dim_a$ of a local contact algebra, and we prove that if X is a locally compact Hausdorff space then $w(X) = w_a(\Lambda^t(X))$, and if, in addition, X is normal, then $\dim(X) = \dim_a(\Lambda^t(X))$. Here $w(X)$ is the weight of the topological space X and Λ^t is the contravariant functor, constructed by Dimov [G. Dimov, A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps – I, Acta Math. Hungarica 129 (2010) 314–349], that realizes the dual equivalence between the categories **LKHaus** and **CLCA**.

The Dimov duality theorem is based on the results by P. Roeper [P. Roeper, Region-based topology, Journal of Philosophical Logic 26 (1997) 251–309], who showed that all information about a locally compact Hausdorff space X is contained in the triple

$$(\mathrm{RC}(X), \rho_X, \mathrm{CR}(X)),$$

where $\mathrm{CR}(X)$ is the set of all compact regular closed subsets of X. In order to describe abstractly the triples $(\mathrm{RC}(X), \rho_X, \mathrm{CR}(X))$, he introduced the notion of *region-based topology*, and he proved that – up to homeomorphisms, respectively, isomorphisms – there exists a bijection between the class of all locally compact Hausdorff spaces and the class of all complete region-based topologies. Note that

$$\Lambda^t(X) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (\mathrm{RC}(X), \rho_X, \mathrm{CR}(X)),$$

for every locally compact Hausdorff space X. In [G. Dimov, D. Vakarelov, Contact algebras and region-based theory of space: a proximity approach – I, Fundamenta Informaticae 74 (2006) 209–249], the general notion of *Boolean contact algebra* was introduced and, accordingly, the "dual" algebras of the de Vries "compingent Boolean algebras" were called "normal Boolean contact algebras" (abbreviated as NCAs), and "region-based topologies" were called "local contact Boolean algebras" (abbreviated as LCAs). Typical examples of Boolean contact algebras are the pairs

$$(\mathrm{RC}(X), \rho_X),$$

where X is an arbitrary topological space. We will even use a more general notion, namely, the notion of a *Boolean precontact algebra*, introduced by Düntsch and Vakarelov in [I. Düntsch, D. Vakarelov, Region-based theory of discrete spaces: A proximity approach, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence 49 (2007) 5–14].

In the presence of the Dimov duality

$$\mathbf{LKHaus} \underset{\Lambda^a}{\overset{\Lambda^t}{\rightleftarrows}} \mathbf{CLCA},$$

the following problem naturally arises: if $\mathcal{P}$ is a topological property, describe in terms of local contact algebras the property $\mathcal{P}'$, defined by $A \in \mathcal{P}' \Leftrightarrow \Lambda^a(A) \in \mathcal{P}$, where A is an arbitrary **CLCA**-object (or, equivalently, $X \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \Lambda^t(X) \in \mathcal{P}'$, where X is an arbitrary **LKHaus**-object).

In this paper we introduce the notions of *dimension of a precontact algebra* and *weight of a local contact algebra*, and prove, in particular, that

1. the weight of a locally compact Hausdorff space X is equal to the weight of the local contact algebra $\Lambda^t(X)$,

2. the Čech–Lebesgue dimension of a normal T_1-space X is equal to the dimension of the Boolean normal contact algebra $(\mathrm{RC}(X), \rho_X)$ (let's note that any normal contact algebra (B, ρ) can be regarded as a local contact algebra of the form (B, ρ, B)). In particular, the Čech–Lebesgue dimension of a normal locally compact Hausdorff space X is equal to the dimension of the local contact algebra $\Lambda^t(X)$,

3. the dimension of a normal contact algebra is equal to the dimension of its *NCA-completion* (see [G. Dimov, A de Vries-type duality theorem for the category of locally compact spaces and continuous maps – II, Acta Math. Hungarica 130 (2011) 50–77] for this notion),

4. the dimension of every NCA of the form (B, ρ_s) (where ρ_s is the smallest (normal) contact relation on the Boolean algebra B) is equal to zero (as it should be), and

5. if $(B, \rho, \mathbb{B})$ is an LCA, $m \in B \setminus \{0\}$, and $(B_m, \rho_m, \mathbb{B}_m)$ is the relative LCA of $(B, \rho, \mathbb{B})$, i.e.

$$B_m \stackrel{\text{df}}{=} \{b \in B \mid b \leq m\},\ \rho_m \stackrel{\text{df}}{=} \rho_{\restriction B_m^2},\ \mathbb{B}_m \stackrel{\text{df}}{=} \{b \wedge m : b \in \mathbb{B}\},$$

then $\dim_a(B_m, \rho_m, \mathbb{B}_m) \leq \dim_a(B, \rho, \mathbb{B})$.

(Note that, as it is well known, with the partial order inherited from B, B_m is a Boolean algebra; it is called the *relative algebra* or *factor algebra* of B with respect to m.)

In relation to the last assertion, we note that it is an algebraic generalization of the dual of the following topological statement: for a (locally compact) normal T_1-space X and a regular closed subset M of X, $\dim(M) \leq \dim(X)$ holds. (Of course, the last inequality is satisfied by any closed subset M as well.)

Finally, it is worth remarking that one cannot define a notion of dimension *only for Boolean algebras* corresponding to the topological notion of dimension via de Vries' or Dimov's dualities because for all positive natural numbers n and m, the Boolean algebras $\mathrm{RC}(\mathbb{R}^n)$ and $\mathrm{RC}(\mathbb{R}^m)$ are isomorphic but, clearly, for $n \neq m$, $\dim(\mathbb{R}^n) \neq \dim(\mathbb{R}^m)$ (here $\mathbb{R}$ is the real line with its natural topology). Also, one cannot define an adequate (in the same sense) notion of weight for Boolean algebras because, for example, the Boolean algebras $\mathrm{RC}(\mathbb{I})$ and $\mathrm{RC}(E\mathbb{I})$ are isomorphic but $w(\mathbb{I}) = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = w(E\mathbb{I})$ (here $\mathbb{I}$ is the unit interval [0,1] with its natural topology, and $E\mathbb{I}$ is the absolute of $\mathbb{I}$, i.e. the Stone dual of the Boolean algebra $\mathrm{RC}(\mathbb{I})$).

This paper is cited in:

1. Ali Akbar Estaji, Toktam Haghdadi and Javad Farokhi Ostad, Topobooleans and Boolean Contact Algebras with Interpolation Property, Filomat 35 (9) (2021), 2895-2909. IF 0.844 (2020), ISSN: 2406-0933.

Г7-6. Elza Ivanova-Dimova, Vietoris-type Topologies on Hyperspaces, *Serdica Math. J.*, 44 (1-2) (2018), 103-120, ISSN (print) 1310-6600, **MR3889573** (**18 точки**)

Резюме

Тази статия може да бъде разглеждана като продължение на работата **В4-1** (т.е. на работата [E. Ivanova-Dimova, Lower-Vietoris-type topologies on hyperspaces, *Topology and its Applications*, 220 (2017), 100-110]), и поради това ще считаме нейното резюме за част от настоящото.

През 1975 г., М. М. Чобан [M. M. Čoban. Operations over sets, Sibirsk. Mat. Ž. 16, 6 (1975), 1332– 1351] въведе нова топология в множеството от всички затворени подмножества на едно топологично пространство, която е подобна на горната виеторисова топология, но е по-слаба от нея. През 1997 г., М. М. Клементино и В. Толен [M. M. Clementino, W. Tholen, A characterization of the Vietoris topology, Topology Proc. 22 (1997), 71–95] въведоха три нови топологии в булеана $\mathcal{P}(X)$ (и неговите подмножества) на едно множество X, които се пораждат от произволни фамилии $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ от подмножества на множеството X, и ги нарекоха, респективно, *горна $\mathcal{F}$-топология, долна $\mathcal{F}$-топология* и $(\mathcal{F},\mathcal{G})$*-хит-анд-мис топология.* (Да отбележим, че в споменатата по-горе статия, авторите нямат за цел изучаването на тези три хипертопологии (и те не го правят); тези дефиниции се появяват съвсем естествено в процеса на работата им върху проблема за категорна характеризация на виеторисовата хипертопология.) Оказва се, че горната $\mathcal{F}$-хипертопология е обобщена версия на хипертопологията на Чобан. През 1998 г., Г. Димов и Д. Вакарелов [G. Dimov and D. Vakarelov, On Scott consequence systems, Fund. Inform. 33, 1 (1998), 43–70] въведоха независимо от М. М. Клементино и В. Толен понятието горна $\mathcal{F}$-хипертопология, което бе наречено от тях *хипертопология от тихонов тип* (по-късно, в **B4-1**, то бе наречено също и *хипертопология от горно-виеторисов тип,* защото "тихонова хипертопология" и "горна виеторисова хипертопология" са две имена на едно и също понятие). Хипертопологиите от тихонов тип бяха изучени подробно в работата [G. Dimov, F. Obersnel, G. Tironi. On Tychonoff-type hypertopologies. Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium (Prague, Czech Republic, August 19–25, 2001), Topology Atlas, Toronto, ON, 2002, 51–70]. Също така, в **B4-1**, понятието долна $\mathcal{F}$-хипертопология бе въведено независимо и бе наречено *хипертопология от долно-виеторисов тип.* Най-сетне, в предварителната arXiv-версия [E. Ivanova-Dimova, Vietoris-type topologies on hyperspaces, arXiv:1701.01181] на тази статия, бе въведено понятието *хипертопология от виеторисов тип.* Както разбрахме по-късно, то е еквивалентно на понятието $(\mathcal{F},\mathcal{G})$-хит-анд-мис хипертопология, въведено от М. М. Клементино и В. Толен.

В настоящата статия изследваме хипертопологиите от виеторисов тип. Въвеждаме също така понятието *силна хипертопология от виеторисов тип.* Струва ни се, че в сравнение с понятието хипертопология от виеторисов тип, то е по-подходяща модификация на понятието виеторисова хипертопология. Силните хипертопологии от виеторисов тип са специални хипертопологии от виеторисов тип. Изследваме тези хипертопологии и показваме, че класът от всички виеторисови хипертопологии се съдържа строго в класа от всички силни хипертопологии от виеторисов тип. Получаваме и резултати за хиперпространствата с топология от виеторисов тип, които са аналози на някои от резултатите на Е. Майкъл за хиперпространствата с виеторисова топология, публикувани в класическата му работа [E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182]. В класа от всички хиперпространства със силна топология от виеторисов тип, разглеждаме и проблема за "комутативността между хиперпространства и подпространства", който е решен от Х.-Ю. Шмидт [Hans-Jürgen Schmidt, Hyperspaces of quotient and subspaces - I. Hausdorff topological spaces, Math. Nachr. 104 (1981), 271–280] в класа от всички долни виеторисови хипертопологии.

За да представим по-детайлно получените резултати, ще въведем първо някои означения.

Нека X е множество, а $\mathcal{M}, \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ и $A \subseteq X$. Полагаме:

- $A^+_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{M \in \mathcal{M} \mid M \subseteq A\}$, и
- $\mathcal{A}^+_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{A^+_{\mathcal{M}} \mid A \in \mathcal{A}\}$.

Когато $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$, ще пишем просто A^+ и A^- вместо $A^+_{\mathcal{M}}$ и $A^-_{\mathcal{M}}$; същото се отнася и за подфамилиите $\mathcal{A}$ на фамилията $\mathcal{P}(X)$.

Сега ще припомним понятията *горна виеторисова хипертопология* и *виеторисова хипертопология*.

Нека $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство. База на *горната виеторисова топология* Υ_{+X} в $\mathrm{CL}(X)$ (наричана също *тихонова топология в* $\mathrm{CL}(X)$) е фамилията от всички множества от вида $U^+ = \{F \in \mathrm{CL}(X) \mid F \subseteq U\}$, където U е отворено подмножество на X. *Виеторисовата топология* Υ_X в $\mathrm{CL}(X)$ се дефинира като супремум на топологиите Υ_{+X} и Υ_{-X}, т.е. $\Upsilon_{+X} \cup \Upsilon_{-X}$ е предбаза на Υ_X. Да отбележим, че фамилията $\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ също е предбаза на Υ_X.

Замествайки фамилията $\mathrm{CL}(X)$, фигурираща в дефиницията на горната виеторисова хипертопология, с произволна подфамилия $\mathcal{M}$ на фамилията $\mathcal{P}'(X)$, получаваме следната дефиниция.

Нека $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. Топологията $\Upsilon_{+\mathcal{M}}$ в $\mathcal{M}$, за която фамилията $\mathcal{T}^+_{\mathcal{M}}$ е база, се нарича *тихонова топология в* $\mathcal{M}$ (или, *горна виеторисова топология в* $\mathcal{M}$). Ако $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$, то $\Upsilon_{+\mathcal{M}}$ съвпада с класическата горна виеторисова топология Υ_{+X} в $\mathrm{CL}(X)$ (= тихоновата топология Υ_{+X} в $\mathrm{CL}(X)$).

Съществена модификация на същото понятие се получава, обаче, в случая, когато X е само **множество**. Съответното ново понятие е въведено в гореспоменатите работи на Клементино-Толен и Димов-Вакарелов.

Нека X е множество и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. Една топология $\mathcal{O}$ в множеството $\mathcal{M}$ се нарича *топология от тихонов тип в* $\mathcal{M}$, ако фамилията $\mathcal{O} \cap \mathcal{P}(X)^+_{\mathcal{M}}$ е база на $\mathcal{O}$.

В статията на Димов-Оберснел-Тирони, цитирана по-горе, е показано, че класът от всички тихонови хипертопологии се съдържа строго в класа от всички хипертопологии от тихонов тип. В същата статия е доказано, че понятието "топология от тихонов тип в $\mathcal{M}$" може да бъде еквивалентно изразено и ако тръгнем не от множество X, а от топологично пространство. Показано е, че разликата между тихоновите хипертопологии и хипертопологиите от тихонов тип е в това, че тихоновите хипертопологии се пораждат от цялата топология в съответното пространство X, докато хипертопологиите от тихонов тип се пораждат от база на топологията в X. Това е направено по следния начин.

Нека X е множество, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ и $\mathcal{O}$ е топология в $\mathcal{M}$. Тогава фамилията

$$\mathcal{B}_{\mathcal{O}} \stackrel{\text{df}}{=} \{A \subseteq X \mid A^+_{\mathcal{M}} \in \mathcal{O}\}$$

съдържа X и е затворена относно крайни сечения; следователно, тя може да служи за база на топология

$$\mathcal{T}_{+\mathcal{O}}$$

в X. Когато $\mathcal{O}$ е топология от тихонов тип в $\mathcal{M}$, фамилията $(\mathcal{B}_{\mathcal{O}})^+_{\mathcal{M}}$ е база на $\mathcal{O}$.

По аналогичен начин, в статията на Клементино-Толен и в моята статия в arXiv, цитирани по-горе, бяха въведени следните модификации на виеторисовата хипертопология:

• Нека $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. Топологията $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ в $\mathcal{M}$, породена от фамилията $\mathcal{T}^+_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{T}^-_{\mathcal{M}}$, се нарича *виеторисова топология в* $\mathcal{M}$. Ако $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$, то $\Upsilon_{\mathcal{M}} = \Upsilon_X$.

• Нека X е множество, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ и $\mathcal{O}$ е топология в $\mathcal{M}$. Топологията $\mathcal{O}$ се нарича *топология от виеторисов тип в* $\mathcal{M}$, ако фамилията $(\mathcal{B}_{\mathcal{O}})^+_{\mathcal{M}} \cup (\mathcal{P}_{\mathcal{O}})^-_{\mathcal{M}}$ е предбаза на $\mathcal{O}$.

Ще означаваме с $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ топологията в X, за която $\mathcal{B}_{\mathcal{O}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ е предбаза.

Ако $\mathcal{O}$ е топология от виеторисов тип в $\mathcal{M}$ и ако означим с
• $\mathcal{O}_u$ топологията в $\mathcal{M}$, за която фамилията $(\mathcal{B}_{\mathcal{O}})^+_{\mathcal{M}}$ е база, и с
• $\mathcal{O}_l$ топологията в $\mathcal{M}$, за която фамилията $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}})^-_{\mathcal{M}}$ е предбаза,

ще получим, че $\mathcal{O}_u$ е топология от горно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$, $\mathcal{O}_l$ е топология от долно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$, и че $\mathcal{O}$ се явява супремум на топологиите $\mathcal{O}_u$ и $\mathcal{O}_l$, както и би трябвало да бъде. Също така, ако $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство и $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$, то, очевидно, $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ е топология от виеторисов тип в $\mathcal{M}$. Понятието "топология от виеторисов тип в $\mathcal{M}$", обаче, ни поднася и някои изненади. Наистина, както веднага се вижда от дефинициите им, всяка топология от горно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$, както и всяка топология от долно-виеторисов тип в $\mathcal{M}$, е топология от виеторисов тип в $\mathcal{M}$.

За да избегнем такива нежелани ефекти, въвеждаме ново понятие, с което дефинираме специален подклас на класа от всички хипертопологии от виеторисов тип. Неговата дефиниция е следната: ако X е множество, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ и $\mathcal{O}$ е топология от виеторисов тип в $\mathcal{M}$, то $\mathcal{O}$ се нарича *силна топология от виеторисов тип в* $\mathcal{M}$, ако $\mathcal{T}_{+\mathcal{O}} = \mathcal{T}_{-\mathcal{O}} (= \mathcal{T}_{\mathcal{O}})$.

Доказваме, че при минимални изисквания за $\mathcal{M}$, всяка виеторисова топология в $\mathcal{M}$ е силна топология от виеторисов тип в $\mathcal{M}$. В частност, за всяко T_1-пространство X, Υ_X е силна топология от виеторисов тип в $\mathrm{CL}(X)$. Също така, построяваме пример на силна хипертопология от виеторисов тип, която не е виеторисова хипертопология.

Изучавайки свойствата на хиперпространствата с топологии от виеторисов тип, успяваме да обобщим някои от резултатите на Майкъл (от цитираната по-горе негова класическа статия), отнасящи се до хиперпространствата с виеторисова топология, доказвайки аналогични резултати за хиперпространствата с топология от виеторисов тип. Работата над тези обобщение ни доведе до дефинирането на две интересни нови понятия, а именно, понятията за *тегло* $w(X, \mathcal{P})$ *на множество* X *по отношение на подфамилия* $\mathcal{P}$ *на фамилията* $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}$-*регулярност на топологично пространство* $(X, \mathcal{T})$, където $\mathcal{P}$ е предбаза на $(X, \mathcal{T})$. Техните дефиниции са приведени по-долу:

• Нека X е множество и $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Тогава $w(X, \mathcal{P}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \min\{|\mathcal{P}'| \mid (\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}) \wedge (\forall U \in \mathcal{P}$ и $\forall x \in U\ \exists V \in \mathcal{P}'$ такова че $x \in V \subseteq U)\}$.

• Нека $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство и $\mathcal{P}$ е предбаза на $(X, \mathcal{T})$. Казваме, че $(X, \mathcal{T})$ е *$\mathcal{P}$-регулярно пространство*, ако за всяко $x \in X$ и за всяко $U \in \mathcal{P}$, такова че $x \in U$, съществуват $V, W \in \mathcal{P}$, за които е изпълнено, че $x \in V \subset X \setminus W \subset U$.

Очевидно, $w(X, \mathcal{P}) \leq |\mathcal{P}|$; също така, ако $\mathcal{P}$ е топология в X, то $w(X, \mathcal{P})$ съвпада с теглото на топологичното пространство $(X, \mathcal{P})$, а ако $(X, \mathcal{T})$ е топологично пространство с безкрайно тегло и $\mathcal{P}$ е предбаза на $(X, \mathcal{T})$, то $w(X, \mathcal{P}) \geq w(X, \mathcal{T})$. Освен това, едно топологично пространство $(X, \mathcal{T})$ е $\mathcal{T}$-регулярно тогава и само тогава, когато то е регулярно; всяко $\mathcal{P}$-регулярно пространство е регулярно, но не и обратното: ние привеждаме пример на регулярно топологично пространство X и негова база $\mathcal{P}$, такава че X не е $\mathcal{P}$-регулярно. Доказани са и редица други твърдения, отнасящи се до тези понятия, и е демонстрирана тяхната полезност при изучаването на хиперпространствата с топологии от виеторисов тип.

Най-сетне, изследваме и проблема за “комутативност между хиперпространства и подпространства” в класа от всички силни хипертопологии от виеторисов тип, т.е. следния проблем: кога *хиперпространството на едно подпространство* A на топологично пространство X е канонично представимо като *подпространство на хиперпространството* на X, където топологиите и на двете хиперпространства са силни топологии от виеторисов тип. Такива изследвания са правени от Х.-Ю. Шмидт (в статията му, цитирана по-горе) в класа от всички долни виеторисови хипертопологии, от Г. Димов [G. Dimov, On the commutability between hyperspaces and subspaces, and on Schmidt’s conjecture, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 25 (1993), no. 1-2, 175–194, MR 96d:54011] в класа от всички тихонови хипертопологии и в класа от всички виеторисови хипертопологии, от Димов-Оберснел-Тирони (в гореспоменатата тяхна работа) в класа от всички хипертопологии от тихонов тип, и от Б. Караиванов [Borislav Karaivanov, On the commutability between hyperspaces and subspaces, Questions Answers Gen. Topology 14 (1996), no. 1, 85–102. MR 97a:54014] в други класове от хипертопологии.

Summary

This paper can be regarded as a continuation of the paper **B4-1** (i.e. of the paper [Elza Ivanova-Dimova, Lower-Vietoris-type topologies on hyperspaces, *Topology and its Applications*, 220 (2017), 100-110]), so that we will consider its summary as a part of the present one.

In 1975, M. M. Choban [M. M. Čoban. Operations over sets, Sibirsk. Mat. Ž. 16, 6 (1975), 1332– 1351] introduced a new topology on the set of all closed subsets of a topological space which is similar to the upper Vietoris topology but is weaker than it. In 1997, M. M. Clementino and W. Tholen [M. M. Clementino, W. Tholen, A characterization of the Vietoris topology, Topology Proc. 22 (1997), 71–95] introduced,

for every two families $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ of subsets of a set X, three new topologies on the power set $\mathcal{P}(X)$ (and its subsets), called by them, respectively, *upper $\mathcal{F}$-topology, lower $\mathcal{F}$-topology* and *$(\mathcal{F},\mathcal{G})$-hit-and-miss topology.* (Note that in the aforementioned article, the authors do not aim to study these three topologies (and they do not do this); these definitions appear quite naturally in the process of their work on the problem of categorical characterization of the Vietoris topology.) The upper $\mathcal{F}$-topology turned out to be a generalized version of the Čoban topology. In 1998, G. Dimov and D. Vakarelov [G. Dimov and D. Vakarelov, On Scott consequence systems, Fund. Inform. 33, 1 (1998), 43–70] introduced independently of M. M. Clementino and W. Tholen the notion of upper $\mathcal{F}$-topology, which was called by them *Tychonoff-type hypertopology* (later on, in **B4-1**, it was called also *upper-Vietoris-type hypertopology* because "Tychonoff hypertopology" and "upper Vietoris hypertopology" are two names of one and the same notion). Tychonoff-type hypertopologies were studied in details in [G. Dimov, F. Obersnel, G. Tironi. On Tychonoff-type hypertopologies. Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium (Prague, Czech Republic, August 19–25, 2001), Topology Atlas, Toronto, ON, 2002, 51–70]. Also, in **B4-1**, the notion of lower $\mathcal{F}$-topology was introduced independently and was called *lower-Vietoris-type hypertopology.* Finally, in the preliminary arXiv-version [E. Ivanova-Dimova, Vietoris-type topologies on hyperspaces, arXiv: 1701.01181] of this paper, the notion of *Vietoris-type hypertopology* was introduced. As we learned later on, it is equivalent to the notion of $(\mathcal{F},\mathcal{G})$-hit-and-miss topology introduced by M. M. Clementino and W. Tholen.

In the present paper we study the Vietoris-type hypertopologies. We introduce as well the notion of *strong Vietoris-type hypertopology.* It seems to us that compared to the notion of Vietoris-type hypertopology, it is a more appropriate modification of the notion of Vietoris hypertopology. Strong Vietoris-type hypertopologies are special Vietoris-type hypertopologies. We study such hypertopologies and show that the class of all Vietoris hypertopologies is strictly contained in the class of all strong Vietoris-type hypertopologies. Also, some of the results of E. Michael from his classical paper [E. Michael, Topologies on spaces of subsets, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), 152–182] about hyperspaces with Vietoris topology are extended to analogous results for hyperspaces with Vietoris-type topology. In the class of strong Vietoris-type hypertopologies, we investigate as well the problem of "commutability between hyperspaces and subspaces" regarded previously by H.-J. Schmidt [H.-J. Schmidt, Hyperspaces of quotient and subspaces - I. Hausdorff topological spaces, Math. Nachr. 104 (1981), 271–280] in the class of lower Vietoris hypertopologies.

For presenting our results in more details, we have to introduce some notation.

Let X be a set. Let $\mathcal{M},\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ and $A \subseteq X$. We put:

- $A^+_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{M \in \mathcal{M} \mid M \subseteq A\}$, and
- $\mathcal{A}^+_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{df}}{=} \{A^+_{\mathcal{M}} \mid A \in \mathcal{A}\}$.

When $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$, we will simply write A^+ and A^- instead of $A^+_{\mathcal{M}}$ and $A^-_{\mathcal{M}}$; the same for subfamilies $\mathcal{A}$ of the family $\mathcal{P}(X)$.

We will now recall the notions of *upper Vietoris hypertopology* and *Vietoris hypertopology.*

Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space. The *upper Vietoris topology* Υ_{+X} on $\mathrm{CL}(X)$ (called also *Tychonoff topology on* $\mathrm{CL}(X)$) has as a base the family of all sets of the form $U^+ = \{F \in \mathrm{CL}(X) \mid F \subseteq U\}$, where U is open in X. The *Vietoris topology* Υ_X on $\mathrm{CL}(X)$ is defined as the supremum of Υ_{+X} and Υ_{-X}, i.e. $\Upsilon_{+X} \cup \Upsilon_{-X}$ is a subbase for Υ_X. Note that the family $\mathcal{T}^+ \cup \mathcal{T}^-$ is also a subbase for Υ_X.

Replacing the family $\mathrm{CL}(X)$ appearing in the definition of the upper Vietoris hypertopology with an arbitrary subfamily $\mathcal{M}$ of the family $\mathcal{P}'(X)$, we obtain the following definition:

Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. The topology $\Upsilon_{+\mathcal{M}}$ on $\mathcal{M}$ having as a base the family $\mathcal{T}^+_{\mathcal{M}}$ is called a *Tychonoff topology on* $\mathcal{M}$ (or, *upper Vietoris topology on* $\mathcal{M}$). When $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$, then $\Upsilon_{+\mathcal{M}}$ is just the classical upper Vietoris topology Υ_{+X} on $\mathrm{CL}(X)$ (= the Tychonoff topology Υ_{+X} on $\mathrm{CL}(X)$).

A substantial modification of the same notion occurs, however, in the case where X is just a **set**. The relevant new concept was introduced in the papers of Clementino-Tholen and Dimov-Vakarelov, cited above:

Let X be a set and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. A topology $\mathcal{O}$ on the set $\mathcal{M}$ is called a *Tychonoff-type topology on* $\mathcal{M}$ if the family $\mathcal{O} \cap \mathcal{P}(X)^+_{\mathcal{M}}$ is a base for $\mathcal{O}$.

In the aforementioned paper of Dimov-Obersnel-Tironi, it was shown that the class of all Tychonoff topologies is strictly contained in the class of all Tychonoff-type topologies. In the same paper, it was revealed that the notion of Tychonoff-type topology on $\mathcal{M}$ can be expressed equivalently starting not with a set X but with a topological space. It was shown that the difference between Tychonoff topologies and Tychonoff-type topologies is in the fact that while Tychonoff topologies are generated by a topology on the relevant set X, the Tychonoff-type topologies are generated by a base for a topology on X. This was done as follows:

Let X be a set, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ and $\mathcal{O}$ be a topology on $\mathcal{M}$. Then the family

$$\mathcal{B}_{\mathcal{O}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{A \subseteq X \mid A^+_{\mathcal{M}} \in \mathcal{O}\}$$

contains X and is closed under finite intersections; hence, it can serve as a base for a topology

$$\mathcal{T}_{+\mathcal{O}}$$

on X. When $\mathcal{O}$ is a Tychonoff-type topology on $\mathcal{M}$, the family $(\mathcal{B}_{\mathcal{O}})^+_{\mathcal{M}}$ is a base for $\mathcal{O}$.

In an analogous way, in the paper of Clementino-Tholen and in my arXiv-paper cited above, the following modifications of the notion of Vietoris hypertopology were introduced:

- Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$. The topology $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ on $\mathcal{M}$ having as a subbase the family $\mathcal{T}^+_{\mathcal{M}} \cup \mathcal{T}^-_{\mathcal{M}}$ is called *the Vietoris topology on* $\mathcal{M}$. If $\mathcal{M} = \mathrm{CL}(X)$ then $\Upsilon_{\mathcal{M}} = \Upsilon_X$.
- Let X be a set, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ and $\mathcal{O}$ be a topology on $\mathcal{M}$. The topology $\mathcal{O}$ is called a *Vietoris-type topology on* $\mathcal{M}$ if the family $(\mathcal{B}_{\mathcal{O}})^+_{\mathcal{M}} \cup (\mathcal{P}_{\mathcal{O}})^-_{\mathcal{M}}$ is a subbase for $\mathcal{O}$.

We denote by $\mathcal{T}_{\mathcal{O}}$ the topology on X having $\mathcal{B}_{\mathcal{O}} \cup \mathcal{P}_{\mathcal{O}}$ as a subbase.

Having a Vietoris-type topology $\mathcal{O}$ on $\mathcal{M}$ and denoting by
- $\mathcal{O}_u$ the topology on $\mathcal{M}$ having as a base the family $(\mathcal{B}_{\mathcal{O}})^+_{\mathcal{M}}$, and by
- $\mathcal{O}_l$ the topology on $\mathcal{M}$ having as a subbase the family $(\mathcal{P}_{\mathcal{O}})^-_{\mathcal{M}}$,

we obtain that $\mathcal{O}_u$ is an upper-Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$, $\mathcal{O}_l$ is an lower-Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$ and $\mathcal{O}$ is equal to the supremum of the topologies $\mathcal{O}_u$ and $\mathcal{O}_l$, as it should be. Also, if $(X, \mathcal{T})$ is a topological space and $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$, then, clearly, $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ is a Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$. However, the notion of Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$ produces some surprises as well. Indeed, as it follows immediately from their definitions, all upper-Vietoris-type topologies on $\mathcal{M}$ and all lower-Vietoris-type topologies on $\mathcal{M}$ are Vietoris-type topologies on $\mathcal{M}$.

For avoiding such side effects, we introduce a new notion with which we define a special subclass of the class of Vietoris-type hypertopologies. Its definition is the following one: if X is a set, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}'(X)$ and $\mathcal{O}$ is a Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$, then $\mathcal{O}$ is called a *strong Vietoris-type topology on* $\mathcal{M}$ if $\mathcal{T}_{+\mathcal{O}} = \mathcal{T}_{-\mathcal{O}} (= \mathcal{T}_{\mathcal{O}})$.

We prove that, under mild conditions on $\mathcal{M}$, every Vietoris topology on $\mathcal{M}$ is a strong Vietoris-type topology on $\mathcal{M}$. In particular, for every T_1-space X, Υ_X is a strong Vietoris-type topology on $\mathrm{CL}(X)$. Also, we construct an example of a strong Vietoris-type hypertopology which is not a Vietoris hypertopology.

Studying the properties of the hyperspaces with Vietoris-type hypertopologies, we succeeded to generalize some of the Michael results (from his classical paper cited above) concerning hyperspaces with Vietoris hypertopology by obtaining analogous results for the hyperspaces with Vietoris-type hypertopology. The work on these generalizations led us to the definition of two interesting new notions, namely the notions of *weight* $w(X, \mathcal{P})$ *of a set* X *with regard to a subfamily* $\mathcal{P}$ *of* $\mathcal{P}(X)$ and $\mathcal{P}$*-regularity of a topological space* $(X, \mathcal{T})$, where $\mathcal{P}$ is a subbase for $(X, \mathcal{T})$. Their definitions are given below:

- Let X be a set and $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Then $w(X, \mathcal{P}) \overset{\mathrm{df}}{=} \min\{|\mathcal{P}'| \mid (\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}) \wedge (\forall U \in \mathcal{P}$ and $\forall x \in U \; \exists V \in \mathcal{P}'$ such that $x \in V \subseteq U)\}$.
- Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space and $\mathcal{P}$ be a subbase for $(X, \mathcal{T})$. The space $(X, \mathcal{T})$ is said to be $\mathcal{P}$*-regular*, if for every $x \in X$ and for every $U \in \mathcal{P}$ such that $x \in U$, there exist $V, W \in \mathcal{P}$ with $x \in V \subset X \setminus W \subset U$.

Clearly, $w(X, \mathcal{P}) \leq |\mathcal{P}|$; also, if $\mathcal{P}$ is a topology on X, then $w(X, \mathcal{P})$ is just the weight of the topological space $(X, \mathcal{P})$. Furthermore, if $(X, \mathcal{T})$ is a topological space with infinite weight and $\mathcal{P}$ is a subbase for $(X, \mathcal{T})$, then $w(X, \mathcal{P}) \geq w(X, \mathcal{T})$. Besides that, a topological space $(X, \mathcal{T})$ is $\mathcal{T}$-regular iff it is regular; every $\mathcal{P}$-regular space is regular, but not viceversa. Some other results concerning these new notions are obtained and it is demonstrated their usefulness in the study of hyperspaces endowed with Vietoris-type hypertopologies.

Finally, we investigate the problem of "commutability between hyperspaces and subspaces" in the class of strong Vietoris-type hypertopologies, i.e. the following problem: when *the hyperspace of a subspace* A of a topological space X is canonically representable as *a subspace of the hyperspace* of X, where both hyperspaces are endowed with a strong Vietoris-type hypertopology. Such investigations were done previously by H.-J. Schmidt (in his paper cited above) in the class of lower Vietoris hypertopologies, by G. Dimov [G. Dimov, On the commutability between hyperspaces and subspaces, and on Schmidt's conjecture, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 25 (1993), no. 1-2, 175–194, MR 96d:54011] in the class of the Tychonoff hypertopologies and in the class of Vietoris hypertopologies, by Dimov-Obersnel-Tironi (in their aforementioned paper) in the class of Tychonoff-type hypertopologies, and by B. Karaivanov [Borislav Karaivanov, On the commutability between hyperspaces and subspaces, Questions Answers Gen. Topology 14 (1996), no. 1, 85–102. MR 97a:54014] in other classes of hypertopologies.

София, 07.04.2023 г.

/Елза Иванова-Димова/