

## СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ НА МЕТОДИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ СКОРОСТТА НА ВЪРТЕНЕ НА ПОСТОЯННОТОКОВ ДВИГАТЕЛ

**Владимир Христов**

Технически университет София, ф-т Автоматика, катедра АЕЗ, тел. 965 3945, 1797 София, E-mail vdhrstov@tu-sofia.bg

**РЕЗЮМЕ.** За получаване на информация за скоростта на механичната ос на вала на двигателя, обикновено се използват тахогенератори, резолвери и други устройства куплирани към него. В много от случаите се оказва неудобно с оглед на надеждността и невъзможността от използването на такива устройства особено при сервозадвижения, роботи, микрозадвижения и други. Поради тази причина стремежа е по косвен път да се получи информация за скоростта. Такава информация може да се получи чрез използване на наблюдатели за оценка на скоростта. Наблюдателите служат за оценяване на вътрешните състояния на една система. Настоящия доклад има за цел да изследва оценката на скоростта получена чрез наблюдател на Луенбъргър и филтър на Калман, при отчитане на смущения.

### COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS FOR ESTIMATING THE SPEED OF DC MOTOR

Vladimir Hristov

Technical university of Sofia, fac: Automatics; department: AEZ; 1797 Sofia, e-mail : vdhrstov@tu-sofia.bg

**ABSTRACT.** To receive information about the speed of the mechanical axis of the motor shaft is usually used tachometer, resolver and other devices coupled to the motor shaft. In many cases proved inconvenient in view of the reliability and the impossibility of using such devices especially in servos, robotics and other micro-motion. Therefore, the intention is to get information about speed by indirect way. This information can be received through used the observer for estimate to speed. Observers are used to estimated internal states of a system. This report have provides to investigate the estimate the speed, which received with Luenberger observer and optimal filtering of Kalman.

### Въведение

При редица електрозадвижения се оказва невъзможно директно да бъде отчетена скоростта на двигателя. Причините за това могат да бъдат: невъзможността за куплиране на датчик към вала на двигателя, високата цена на датчика (тахогенератор, енкодер), който в повечето случаи се оказва по-скъп от самия ел. двигател и освен това при редица сервозадвижения датчика който трябва да бъде куплиран е с размер съизмерим (Йончев Е., Йонков Т. 2010.). С развитието на технологиите постояннотоковите двигатели продължават да са водещи при реализиране на сервозадвижения поради реди причини: (лесни за управление, използване на карбонови четки, магнити с повишени показатели и др.). В такива случаи е удачно да се подходи към използване на наблюдатели за осъществяване на индиректно измерване (Йонков Т., 1993). Наблюдението има за цел на база измерване на електрическите величини на двигателя (котвения ток и захранващото напрежение) да оцени скоростта на двигателя. За да бъде оценката на скоростта напълно отговаряща на действителната, описанието на модела и параметрите на мотора заложи в наблюдателя трябва да отразяват реалната система (Seung-Ki Sul 2011). Освен това ако съществуват нелинейности или промяна на някой от параметрите в режим на работа трябва да бъдат

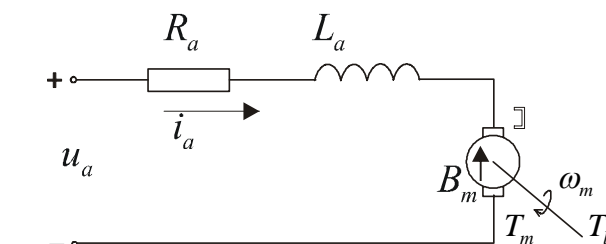
предвидени в наблюдателя и тяхното действие да не води до грешки в направените оценки.

### Математическо описание на ДПТ

За ДПТ с постоянни магнити показан на фиг.1 могат да се запишат следните математически уравнения описващи процесите на изменение на тока и скоростта:

$$\frac{d}{dt} i_a = \frac{1}{L_a} u_a - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K}{L_a} \omega_m \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_m = \frac{K}{J_m} i_a - \frac{B_m}{J_m} \omega_m - \frac{1}{J_m} T_l \quad (2)$$



Фиг.1 ДПТ с постоянни магнити

Където:

$R_a$  - котвено съпротивление;

$L_a$  - индуктивност на разсейване;

$u_a$  - захранващо напрежение;

$i_a$  - котвен ток;

$T_l$  - товарен момент на вала на двигателя;

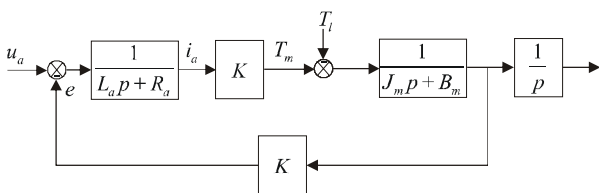
$T_m$  - електромагнитен момент на вала на двигател;

$J_m$  - инерционен момент на двигателя;

$B_m$  - коефициент на вискозно триене;

$\omega_m$  - скорост на вала;

На фиг.2 е показана структурната схема на ДПТ



Фиг. 2 Структурна схема на ДПТ

Горните уравнения могат да се запишат в матричен вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_a \\ \frac{d}{dt} \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{L_a} \\ \frac{K}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix} T_l$$

Ако ел. двигател работи на празен ход ( $T_l = 0$ ), тогава:

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt} i_a \\ \frac{d}{dt} \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{L_a} \\ \frac{K}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_a \quad (4)$$

Това уравнение е от вида:

$\dot{x} = Ax + Bu$ , където:

$x = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix}$  - вектор на състоянието

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K}{L_a} \\ \frac{K}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

За уравнението на изхода може да се запише:

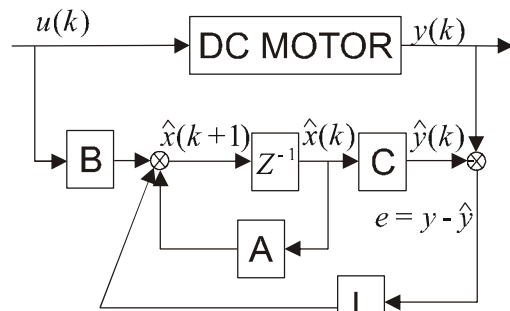
$$i_a = [1 \ 0] \begin{bmatrix} i_a \\ \omega_m \end{bmatrix} \text{ или } y = Cx$$

Идеята е да се оцени  $x(t)$  използвайки само  $u(t)$  и  $y(t)$ .

## Оценяване на скоростта на ДПТ

### ➤ Наблюдател на Луенбъргър

На фиг.3 е представена структурната схема на наблюдателя на Луенбъргър (Йончев, Е. 2010.).



Фиг. 3 Структурна схема на наблюдател

Ако ДПТ е описан в пространство на състоянието (Chiasson J. 2005.):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu; \\ y = Cx, \end{cases} \quad (5)$$

то уравнението на оценения вектор е:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C \hat{x}(t)) \quad (6)$$

$$\hat{i}_a = C \hat{x}, \quad (7)$$

където:  $C = [1 \ 0]$ ;

$L$  е матрицата в обратната връзка на наблюдателя, която се избира да осигури необходимата динамика и устойчивост;

По отношение на вектора на изчислителната грешка може

да се запише:  $e = x - \hat{x}$  или  $e = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = x - \hat{x}$ .

$$\frac{d}{dt} e = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = (Ax + Bu) - [A \hat{x} + Bu + L(Cx - C \hat{x})]$$

.....

$$\frac{d}{dt} e = (A - LC)(x - \hat{x}) = (A - LC)e$$

Процедура по пресмятане на матрицата (L) на наблюдателя:

1. Собствените стойности на матрицата A на ПТД се определят от:  $|xI - A| = 0$

$$xI - A = \begin{bmatrix} x + \frac{R_a}{L_a} & \frac{K}{L_a} \\ -\frac{K}{J_m} & x + \frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix}$$

Характеристичното уравнение е:

$$\left(x + \frac{R_a}{L_a}\right)\left(x + \frac{B_m}{J_m}\right) + \left(\frac{K}{L_a}\right)\left(\frac{K}{J_m}\right) = 0$$

$$x^2 + x\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B_m}{J_m}\right) + \frac{1}{L_a J_m}(R_a B_m + K^2) = 0$$

2. Изчисляване полюсите на наблюдателя:

Уравнението описващо грешката на наблюдателя:

$$\frac{d}{dt}e = (A - LC)e$$

където:  $e = (x - \hat{x})$  е грешката при определяне котвения ток;

Необходимо е да се намерят такива единични стойности на матрицата  $(A - LC)$ , че полюсите на наблюдателя да бъдат пропорционални на полюсите на постоянно-токовия двигател.

$$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}$$

$$A - LC = A - \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ L_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Единичните стойности за тази матрица са

$$\gamma I - (A - LC):$$

$$\gamma I - (A - LC) = \begin{bmatrix} \gamma + \frac{R_a}{L_a} + L_1 & \frac{K}{L_a} \\ L_2 - \frac{K}{J_m} & \gamma + \frac{B_m}{J_m} \end{bmatrix}$$

Характеристичното уравнение е:

$$\gamma^2 + \gamma\left(\frac{B_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a} + L_1\right) + \left(\frac{K}{L_a}\right)\left(L_2 - \frac{K}{J_m}\right) + \left(L_1 \frac{B_m}{J_m}\right) = 0$$

За да се осигури необходимата динамика и устойчивост на системата, единичните стойности на  $(A - LC)$  трябва да бъдат  $k > 1$  спрямо собствените стойности на матрицата A т.е.  $\gamma = kx$ :

$$(kx)^2 + kx\left(\frac{B_m}{J_m} + \frac{R_a}{L_a} + L_1\right) + \left(\frac{K}{L_a}\right)\left(L_2 - \frac{K}{J_m}\right) + \left(L_1 \frac{B_m}{J_m}\right) = 0$$

Като сравним това уравнение с характеристичното уравнение на ПТД:

$$k^2 x^2 + k^2 x\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B_m}{J_m}\right) + k^2 \frac{1}{L_a J_m}(R_a B_m + K^2) = 0 \quad (/ * k^2)$$

За матрица в обратната връзка на наблюдателя се

$$\text{получава: } L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$L_1 = (k - 1)\left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{B_m}{J_m}\right)$$

$$L_2 = (k - 1)\left[B_m^2 L_a - J_m K^2 - k(J_m R_a B_m + J_m K^2)\right]$$

Полюсите на наблюдателя се избират да бъдат пропорционални на полюсите на ДПТ, като с това наблюдателя става динамично по бърз от ДПТ (Йончев, Е. 2010). В реални системи се избира  $k \leq 3$ , понеже наблюдателя става много чувствителен към шума.

### ➤ Филтър на Калман

Филтър на Калман представлява стохастичен наблюдател приложим за линейни стохастични системи, който минимизира ковариацията на грешката на оценените състояния с отчитане на случайни смущения и грешки в измерванията при условие че шумовете са от вида бял гаусов шум с нормално разпределение (Йончев, Е. 2010). Ако системата може да се опише в пространство на състоянието във вида:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), & t \geq t_0 \\ y(t) = Cx(t) + v(t), & t \geq t_0 \end{cases} \quad (9)$$

където:

$x(t)$  - вектор на вътрешното състояние

$y(t)$  - вектор на изхода на измерваните параметри

$w(t)$  - бял гаусов шум от задвижването с ковариационна матрица  $Q$

$v(t)$  - бял гаусов шум от измерването с ковариационна матрица  $R$

Филтъра на Калман се представя със следната система уравнения :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}), & \hat{x}(t_0) = 0 \\ K(t) = PC^T R^{-1} \\ \dot{P} = AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CR \end{cases} \quad (10)$$

където:

$\hat{x}$  - наблюдател на вектора на вътрешното състояние  
 $P(t)$  - ковариационната матрица на грешката от оценяване,  
 $K(t)$  - коефициент на усилване на Калман.

Поради дискретния характер на процеса на измерване, системата трябва да бъде дискретизирана :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) = Cx(k) + v(k) \end{cases}$$

Използването (Rigatos G. 2009) на дискретния филтър на Калман се представя в две стъпки:

1. На първата стъпка се определя текущата оценка  $\hat{x}(k|k)$  на вектора на вътрешното състояние в момента  $k$  въз основа на текущото измерване  $y(k)$  и „a priori“ оценката на вектора  $\hat{x}(k|k-1)$  в предходния момент  $k-1$ . Пресмята се ковариационната матрица на грешката на оценяване.

Тази стъпка отговаря на решаване на уравнението на Рикати :

$$K(k) = P(k|k-1).C^T . [C.P(k|k-1).C^T + R]^{-1}$$

2. На втората стъпка се пресмята оценката „a posteriori“ на вектора на вътрешното състояние  $\hat{x}(k+1|k)$  и се прогнозира ковариационната матрицата на грешката на оценяване  $P(k+1|k)$  .

## Експериментални резултати

В реалните системи при измерване на електрическите величини (захранващо напрежение и котвен ток), които са входни за наблюдателя, трябва да се отчитат и смущенията от самите датчиците. Освен това в режим на

работа ел. двигател се нагрява. Това нагряване е свързано с промяна на котвеното съпротивление (Йонков Т., Йончев Е. 2006.).

Обикновено производителя представя в каталога данни за параметрите на двигателя при стайна температура  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  . При промяна на температурата се променя и съпротивлението  $R(T)$  на котвената намотката, като:

$$R(T) = R(T_0).[1 + \alpha.(T - T_0)] \quad (11)$$

където:

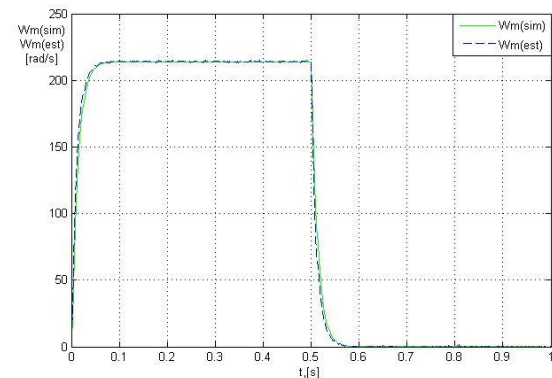
$R(T_0)$  е стойността на котвеното съпротивление при  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  ;

$T$  - температурата на промяна в ( $^\circ\text{C}$ ) ;

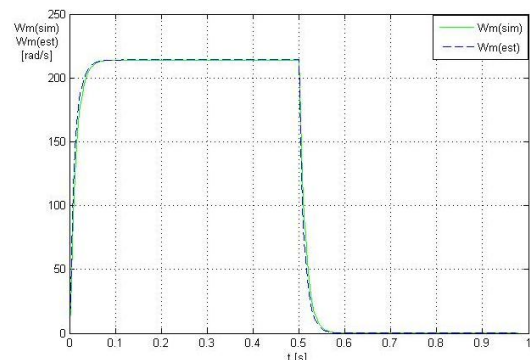
$\alpha$  - температурен коефициент на съпротивлението, който за мед е  $\alpha = 0.0039/1^\circ\text{C}$  .

Всички тези факти трябва да се имат в предвид и да се вземат под внимание когато се проектират системи.

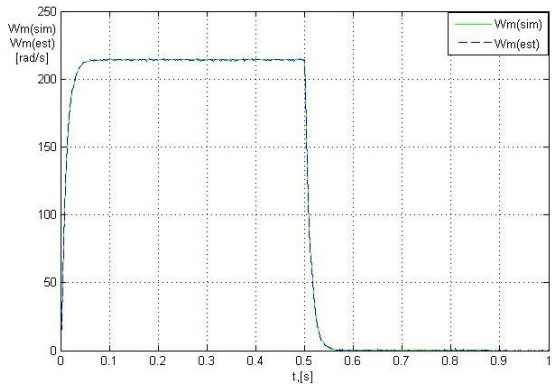
На следващите фигури са показани част от проведените симулационни изследвания за безсензорно оценяване на скоростта ДПТ с постоянни магнити чрез наблюдатели. На фигурите са построени  $Wm(\text{sim})$  - скорост на вала на двигателя;  $Wm(\text{est})$  - оценена скорост на вала на двигателя. Реализирани са двата подхода за оценяване на скоростта. Останалата част от изследванията са обобщени в таблици в АНАЛИЗ НА РЕЗУЛТАТИТЕ.



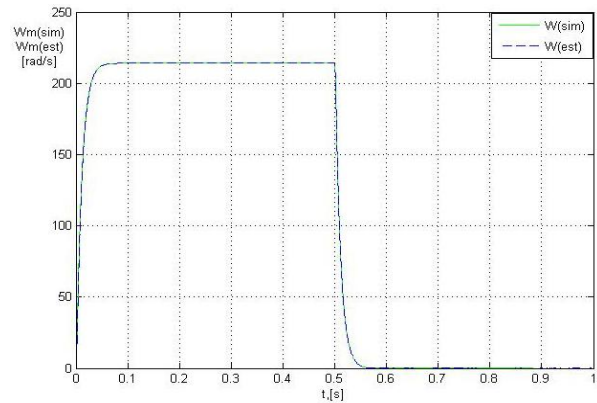
Фиг. 4 Наблюдател на Луенбъргър при отчитане промяната на котвеното съпротивление и шум от датчика



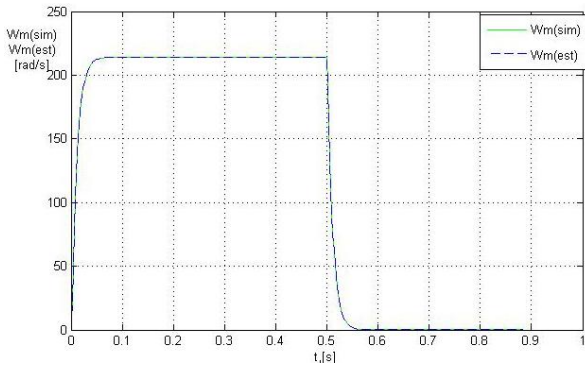
Фиг. 5 Наблюдател на Луенбъргър при отчитане промяната на котвеното съпротивление



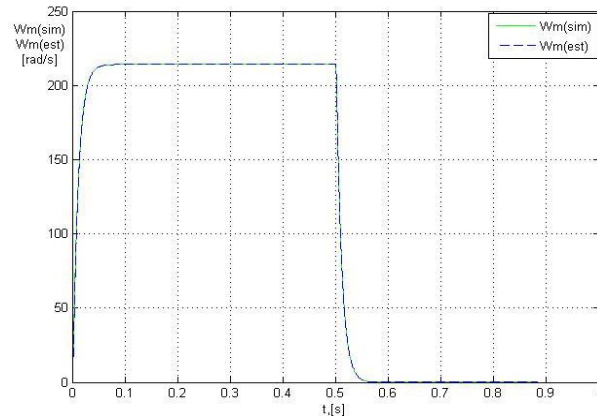
Фиг.6 Наблюдател на Луенбъргър при шум от датчика



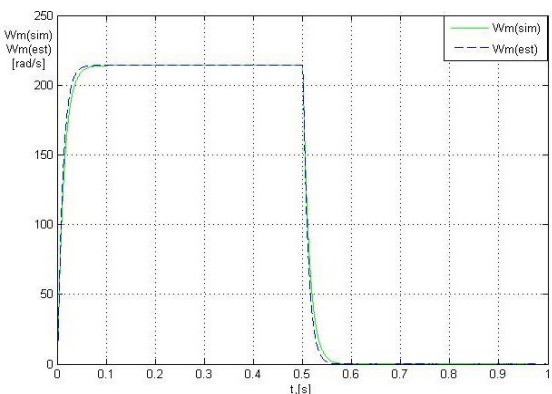
Фиг.10 Наблюдател с филтър на Калман при шум от датчика



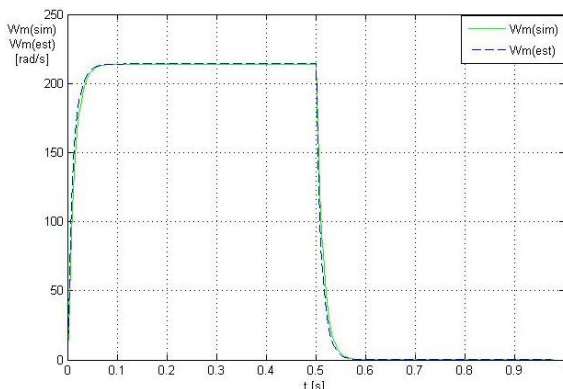
Фиг.7 Наблюдател на Луенбъргър без отчитане на допълнителни смущения



Фиг.11 Наблюдател с филтър на Калман без отчитане на допълнителни смущения



Фиг.8 Наблюдател с филтър на Калман при отчитане промяната на котвеното съпротивление и шум от датчика



Фиг.9 Наблюдател с филтър на Калман при отчитане промяната на котвеното съпротивление

## Анализ на резултатите

В следващите таблици са обобщени резултатите от изследването, което засяга два вида оценяване на скоростта: чрез наблюдател на Луенбъргър и чрез филтър на Калман. Изследванията обхващат оценки в ниския диапазон на скоростта при  $\omega = 15 \text{ [rad / s]}$  и във високия диапазон на скоростта при  $\omega = 214 \text{ [rad / s]}$ .

Изследването има за цел да оцени влиянието на шума от сензорите и промяната на котвеното съпротивление върху оценените величини. Шума е представен като бял гаусов шум в моделите с параметри  $\text{Noise power} = 2e^{-6}$ .

Симулационните изследвания са направени в средата на Simulink на Matlab. Използвания двигател за симулациите е на фирмата BUHLER MOTOR със следните каталожни данни: DC MOTOR 1.13.044.236:  $T_0 = 25^\circ\text{C}$  ::

$$L_a = 0.002\text{H} ; K = 0.056\text{Nm} / \text{A}$$

$$J_m = 18e^{-6}\text{kg.m}^2 ; B_m = 12e^{-6}\text{Nms} / \text{rad} ;$$

$$R_a = 2\Omega ;$$

При оценяването са приети следните показатели за качество:

$$|e_{\text{оцет}}| = \max \left| \frac{\omega_m(\text{sim}) - \omega_m(\text{est})}{\omega_m} \right| - \text{максимална грешка}$$

в установено състояние в [%];

$$|e_{\omega \max}| = \max \left| \frac{\omega_m(\text{sim}) - \omega_m(\text{est})}{\omega_m} \right| \quad - \quad \text{максимална}$$

динамична грешка по време на преходен режим в [%] .

Таблица 1. Симулационни резултати (наблюдател на Луенбъргър с шум от датчика на измерване)

	$R_a(20^\circ\text{C})$		$R_a = 1.2 * R_a(20^\circ\text{C})$	
	$\omega_m[\text{rad/s}]$		$\omega_m[\text{rad/s}]$	
	15	214	15	214
$ e_{\omega \max} $	0.073	2.5e-3	0.113	0.098
$ e_{\omega \text{уст}} $	0.1336	8.4e-4	0.133	0.1

Таблица 2. Симулационни резултати (наблюдател на Луенбъргър без шум от датчика на измерване)

	$R_a(20^\circ\text{C})$		$R_a = 1.2 * R_a(20^\circ\text{C})$	
	$\omega_m[\text{rad/s}]$		$\omega_m[\text{rad/s}]$	
	15	214	15	214
$ e_{\omega \max} $	7.3e-6	7e-5	0.105	0.103
$ e_{\omega \text{уст}} $	2.6e-15	9e-15	8.6e-5	7.47e-5

Таблица 3. Симулационни резултати (наблюдател с филтър на Калман с шум от датчика на измерване)

	$R_a(20^\circ\text{C})$		$R_a = 1.2 * R_a(20^\circ\text{C})$	
	$\omega_m[\text{rad/s}]$		$\omega_m[\text{rad/s}]$	
	15	214	15	214
$ e_{\omega \max} $	6.66e-4	4.7e-5	0.073	0.07
$ e_{\omega \text{уст}} $	1.6e-3	1.07e-4	0.0016	2.33e-4

Таблица 4. Симулационни резултати (наблюдател с филтър на Калман без шум от датчика на измерване)

	$R_a(20^\circ\text{C})$		$R_a = 1.2 * R_a(20^\circ\text{C})$	
	$\omega_m[\text{rad/s}]$		$\omega_m[\text{rad/s}]$	
	15	214	15	214
$ e_{\omega \max} $	2.33e-4	2.8e-5	0.073	0.07
$ e_{\omega \text{уст}} $	1.3e-16	1.8e-14	1.53e-4	2.33e-5

От обобщените резултати в таблица 1 и таблица 2, за наблюдателя на Луенбъргър може да се направи извод, че промяната на стойността на котвеното съпротивление поради нагряване на двигателя, определено оказва влияние при оценяването на скоростта. Това влияние най-

силно се проявява при оценяването на скоростта в динамичен режим при работа с ниски скорости.

От таблица 3 и таблица 4, следва, че при оценяване с филтър на Калман, влиянието от промяната на котвеното съпротивление също както при наблюдателя на Луенбъргър е изразено при динамичен режим в ниските скорости, но за разлика от там, тук е по-слабо изразено.

При наличие на шум от датчика, влияние върху оценката на скоростта се проявява при оценяване с наблюдателя на Луенбъргър, до колкото при използване на филтъра на Калман това влияние е пренебрежимо малко.

Логично следва извода, че при проектирането на наблюдатели и тяхното използване в структурата на системите за управление на постояннотокови електрозадвигания задължително трябва да се предвидят методи за намаляване на това влияние. В противен случай ще се допуска голяма грешка в оценяването на състоянията, а от там и неточност в работата на цялата система. Тези методи могат да се реализират с адаптивни алгоритми за оценка на съответното влияние.

## Литература

- Йонков Т., Йончев Е. 2006. Адаптивен наблюдател за безсензорно управление на асинхронен двигател, Сборник научни трудове на Юбилейна научна конференция 2006 „20 ГОДИНИ ФИЛИАЛ НА ТУ-СОФИЯ В ПЛОВДИВ“, 09-11 ноември 2006, Пловдив, © 2006, 101 – 114.
- Йонков Т., 1993. Устройство за управление на постояннотоков двигател с променлив инерционен момент, Авторско свид. 92415/1993.
- Йончев, Е. 2010. Безсензорно управляеми асинхронни електрозадвигания-дисертация, ТУ-СОФИЯ.
- Йончев Е., Йонков Т. 2010. Някои възможности за експериментално изследване на електрозадвигания в реално време, International Conference AUTOMATICS AND INFORMATICS'10, Bulgaria, Sofia, October 3 - 7, 2010, Proceedings ISSN 1313-1850, 119-123.
- Rigatos G. 2009, Particle and Kalman filtering for state estimation and control of DC motor, Published by Elsevier, ISA Transactions 48 (2009) 62-72.
- Seung-Ki Sul 2011. Control of Electric Machine Drive Systems, Publisher A JOHN WILEY&SONS 2011 ISBN 978-0-470-59079-9.
- Chiasson J. 2005. Modeling and High-Performance Control of Electric Machine Publisher A JOHN WILEY&SONS 2011 ISBN 0-471-68449.