

## ОТНОСИТЕЛНА ПЛЪТНОСТ НА ЕЛЕКТРИЧЕСКИЯ ТОК СЪЗДАДЕН ОТ ДВА РАЗНОПОЛЯРНИ ИЗТОЧНИКА НА ТОК (ЗАЗЕМТЕЛИ) ВЪВ ФУНКЦИЯ ОТ РАЗСТОЯНИЕТО МЕЖДУ ТЯХ И ОТ ДЪЛБОЧИНАТА НА РАЗПРОСТРАНЕНИЕТО НА ТОКА В ЗЕМЯТА

**Стефан Стефанов<sup>1</sup>, Теодора Христова<sup>2</sup>, Любомир Атанасов<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, e-mail: teodora@mgu.bg

<sup>2</sup>Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

<sup>3</sup>Технически университет 1700 София

**РЕЗЮМЕ.** В статията е разгледан случаят, когато два разнополярни точковидни източници на ток са поставени в тримерно проводящо пространство – „земя“, ограничено от безкрайна равнина на друго пространство – „въздух“, с безкрайно голямо съпротивление.

Определен е интензитетът на стационарното електрическо поле и потенциалът в произволна точка, намираща се в проводящото полупространство и общата плътност на тока в същото това полупространство, като функция от дълбочината на разположението на разглежданата точка.

RELATIVE DENSITY OF ELECTRICAL CURRENT GENERATED BY TWO HETERO-POLAR ELECTRICAL SOURCES (GROUNDED) AS A FUNCTION OF THE DISTANCE BETWEEN THEM AND OF THE DEPTH OF THE SPREADING OF THE CURRENT IN THE EARTH

*Stefan Stefanov<sup>1</sup>, Teodora Hristova<sup>2</sup>, Lubomir Atanasov<sup>3</sup>*

<sup>1</sup>University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, e-mail: teodora@mgu.bg

<sup>2</sup>University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia

<sup>3</sup>Technical University, 1700 Sofia

**ABSTRACT.** In this paper is presented a case when two hetero-polar point-formed electrical sources are situated in three dimensional conductive areas – "earth" (restricted by indefinite surface of other area) - "air" (with indefinite great resistance). The aim is to be determined the intension of stationary electrical field and the potential in odd point, located in the conductive semi area and total density of electric current in the same semi area, as a function of the depth of the location of odd point.

### Увод

При корозионните изследвания се разглеждат законите за разпределение на токовете в тримерно проводящо пространство „земя“, ограничена от безкрайна равнина на друго пространство „въздух“, с безкрайно голямо съпротивление. Въздухът в сравнение със земята практически не е проводник, затова на границата, която ги разделя, нормалната съставяща на плътността на тока се изразява с формулата (Козаров 1991, Бургсдорф 1987г):

$$\delta_n = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (1)$$

където  $\rho$  е специфичното електрическо съпротивление на средата,  $\Omega\text{m}$ ;

$n$  - посоката на нормалата към повърхността разделяща средите, показваща непрекъснатостта на нормалната съставяща на вектора на плътността на тока;

$U$  - потенциалът на електрическото поле.

За осъществяване на контакта между земята и уредбата, с помощта на която се въвежда токът или се извършват измервания на параметрите на електрическото поле в

земята, се използват електроди-заземители, които в практиката на геофизичното електропроучване и електрозащитните работи на подземните метални съоръжения, имат различна форма: сферична, цилиндрична, дискова и накрая, системи от заземления с различна конфигурация в план и разрез.

Единичното заземление или система от заземления на голямо разстояние (по-голямо от десетократния радиус на електрода (Костуба, 1993) създават токове и електрическо поле, както и сферичен електрод с малък радиус, наподобяващ точковиден електрод. Потенциалът във всяка точка на такова разстояние от електрод с произволна форма може да се изчисли по формулата за потенциала на точковиден електрод. Затова при разглеждане на изчисленията на параметрите на електрическото поле за случая в проводяща среда се изхожда от представата за протичането на ток от точковидни електроди.

### Теоретична обосновка

Разглежда се точковиден електрод, захранван с ток със сила  $I$ , поставен в еднородна, изотропна и безгранична

среда. За определяне разпределението на потенциала  $U$  в разглежданата среда се използва диференциалното уравнение на Лаплас. Решението се извършва в сферична координатна система, центърът на която съвпада с центъра на точковидния източник на ток:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (2)$$

Вследствие однородността на средата потенциалът  $U$  във всяка точка от нея  $M$  на разстояние  $r$  от началото на координатната система не зависи от полярния  $\alpha$  и азимуталния  $\theta$  ъгли. Решението на диференциалното уравнение на Лаплас зависи само от координатата  $r$ , т.е.  $U = U(r)$ . В този случай производните на останалите променливи са равни на нула и уравнение (2) добива вида:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 \quad (3)$$

От уравнение (3) следва:  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0$ ;

$$r^2 \frac{dU}{dr} = A; \quad \frac{dU}{dr} = \frac{A}{r^2}, \quad (4)$$

откъдето за потенциала се получава

$$U = U(r) = -\frac{A}{r} + B \quad (5)$$

Константите  $A$  и  $B$  се определят по следния начин. В безкрайно отдалечените точки при  $r = \infty$ , потенциалът на електрическото поле  $U = 0$ . Тогава от уравнение (5) следва, че  $B = 0$ .

Токът протичащ през произволно избрана сферична повърхнина с радиус  $r$  е равен:

$$I_s = \int_s \vec{\delta} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\rho} \int_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\rho} \int_s E \cdot ds = -\frac{1}{\rho} \int_s \frac{dU}{dr} ds = -\frac{1}{\rho} \int_s \frac{A}{r^2} ds = -\frac{A}{\rho r^2} \int_s ds = -\frac{A}{\rho r^2} \cdot 4\pi r^2 = -\frac{4\pi A}{\rho} \quad (6)$$

откъдето  $A = -\frac{\rho I}{4\pi}$

След заместване на константите  $A$  и  $B$  в уравнение (5) се получава израза за потенциала на електрическото поле в явен вид

$$U = U(r) = -\frac{A}{r} + B = -\left( -\frac{\rho I}{4\pi r} \right) + 0 = \frac{\rho I}{4\pi r} \quad (7)$$

Еквипотенциалните повърхнини удовлетворяват условието

$$r = \frac{\rho I}{4\pi U} = const;$$

а интензитетът на електрическото поле се определя по формулата

$$E = -\frac{dU}{dr} = \frac{\rho I}{4\pi r^2}. \quad (8)$$

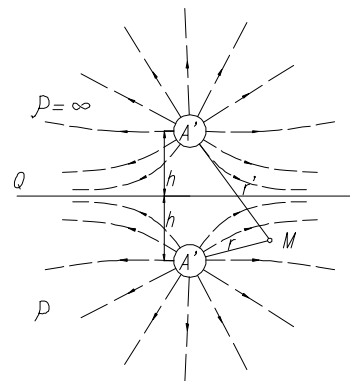
Големината на вектора на плътността на тока се определя посредством израза

$$\delta = \frac{E}{\rho} = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (9)$$

Разглежда се случаят, когато източникът на ток е разположен на повърхността на земята, която в случая е проводящо полупространство, граничещо със среда с безкрайно голямо съпротивление – въздухът. На земната повърхност трябва да се спазва условието за равенство на нула на нормалната съставка на плътността на тока [1,2], т.е. уравнение (1) се записва така:

$$\delta_n = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (10)$$

За определяне на закона на разпределение на потенциала на електрическото поле в проводящо полупространство се предполага, че източникът на ток  $A$  се намира в проводящата среда на разстояние  $h$  от границата на разделяне (фиг. 1.)



Фиг. 1. Линии на тока в близост до земната повърхност

Граничното условие (10) ще бъде спазено ако се предположи, че пространството „въздух“ е запълнено с еднаквостранствена проводяща среда със специфично електрическо съпротивление  $\rho$  и в точка  $A'$  (огледален

образ на точковидния източник в равнината  $O$ ) се намира втори точковиден източник на ток  $I' = I$ .

В точка  $M$  потенциалът на електрическото поле е равен на алгебричната сума от потенциалите на полетата, създадени от източниците на ток  $A$  и  $A'$ :

$$U_M = U_{AM} + U_{A'M} = \frac{\rho I}{4\pi r} + \frac{\rho I'}{4\pi r'} = \frac{\rho I}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)$$

В правоъгълна координатна система с център в източника на ток  $A$

$$U_M = \frac{\rho I}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (2h - z)^2}} \right] \quad (11)$$

Ако източникът на ток  $A$  е разположен на повърхността на земята, т.е.  $h = 0$ , уравнение (11) добива вида

$$U_M = \frac{\rho I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\rho I}{2\pi r} \quad (12)$$

Интензитетът на електрическото поле и плътността на тока съответно са равни на:

$$E = \frac{\rho I}{2\pi r^2} \quad (13)$$

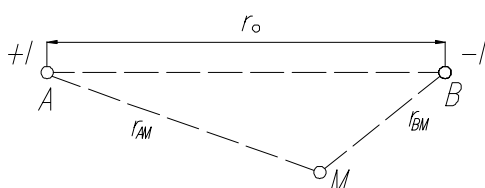
$$\delta = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (14)$$

От формули (12), (13) и (14) следва, че при разполагане на захранващия електрод на границата „земя-въздух“, екипотенциалните повърхнини са полусфери с център в източника на ток и удовлетворяват равенството  $r = const$ .

Линиите на интензитета на полето и на тока са радиални прави, излизащи от източника на ток, а потенциалът на електрическото поле и плътността на тока намаляват обратно пропорционално на квадрата на разстоянието от източника на ток. От практическа гледна точка са възможни случаите, когато електрическото поле е създадено от два разнополярни:

1. точковидни източника на ток;
2. линейни източника на ток;
3. линеен и точковиден източника на ток.

В статията по-нататък се разглежда само първият случай, когато два разнополярни точковидни заземители  $A$  и  $B$ , са поставени в еднородно и изотропно пространство на разстояние  $r_0$  един от друг (фиг.2).



Фиг. 2.

В произволна точка  $M$  на проводящото полупространство

$$U_M = U_{AM} + U_{BM} = \frac{\rho I}{2\pi r_{AM}} - \frac{\rho I'}{2\pi r_{BM}} = \frac{\rho I}{3\pi} \left( \frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} \right), \quad (15)$$

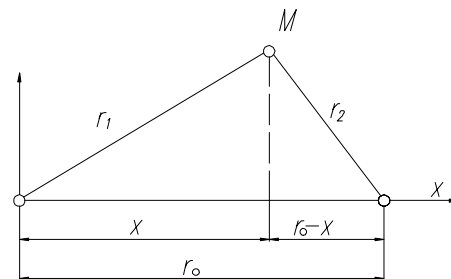
където  $r_{AM}$  и  $r_{BM}$  са разстоянията между точка  $M$  и заземителите  $A$  и  $B$ .

От формула (15) следва, че екипотенциалните повърхнини на електрическото поле на две заземления не са концентрични сфери и удовлетворяват условието.

$$\frac{1}{r_{AM}} - \frac{1}{r_{BM}} = const$$

Ако точка  $M$  е разположена на повърхността на полупространството (фиг.3), то  $r_{AM} = r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\text{и } r_{BM} = r_2 = \sqrt{(r_0 - x)^2 + y^2}.$$



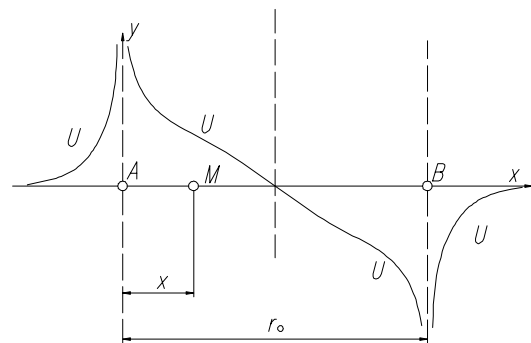
Фиг. 3. Изчисляване на електрическото поле на два точковидни заземителя

Тогава потенциалът в произволна точка от земната повърхност  $M$  от електродите  $A$  и  $B$  е равен:

$$U_M = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r_0 - x)^2 + y^2}} \right) \quad (16)$$

От формула (16) следва, че потенциалът  $U_M$ , когато  $y = 0$  (точката  $M$  е разположена на линията  $AB$ ) в точка  $A$  е равен на безкрайност. С увеличаване на  $x$ , той

намалява. В точка  $x = \frac{r_0}{2}$ , потенциалът  $U_M$  е равен на нула, след това се увеличава по абсолютна стойност, но с обратен знак и в точка  $B$  е равен на безкрайност (фиг.4)



Фиг. 4

Потенциалната разлика между точките М и N на повърхността на земята от източниците на ток А и В е равна:

$$\Delta U_M = U_M - U_N = \frac{\rho I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right), \quad (17)$$

където  $r_3 = r_{AN}$  и  $r_4 = r_{BN}$  са разстоянията от точка М до точки А и В.

Тъй като  $E = -\frac{dU}{dr}$ , то за произволна точка М на земната повърхност стойностите на проектите върху координатните оси са:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(r_0 - x)^2 + y^2}} \right) \right] =$$

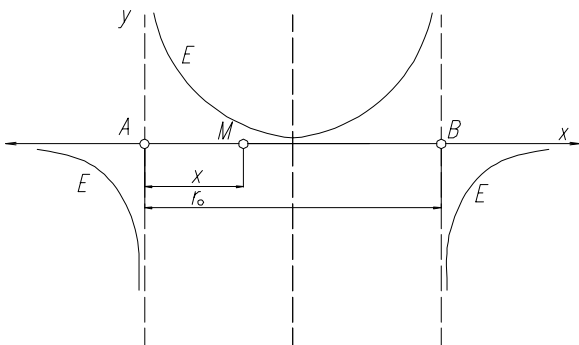
$$= \frac{\rho I}{2\pi} \left\{ \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{r_0 - x}{[(r_0 - x)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}$$

$$E_y = \frac{\rho I}{2\pi} \left\{ \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{[(r_0 - x)^2 + y^2]^{3/2}} \right\}. \quad (19)$$

Изразът за интензитета на електрическото поле в точките от правата, съединяваща източниците на ток А и В (при  $y = 0$ ), има вида

$$E = \frac{\rho I}{2\pi} \left[ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(r_0 - x)^2} \right] \quad (20)$$

В точките А и В (формула 20), интензитетът на полето е безкрайност (фиг. 5)



Фиг. 5.

В произволна точка М от равнината Q-Q (фиг. 6), преминаваща през средата на отсечката А-В, на дълбочина  $h$ , общата плътност на тока  $\delta_{AB}$  предизвикана в земята от разположените в нея точковидни

източници А и В, е равна на геометричната сума от плътността на токовете  $+I$  и  $-I$ .

Плътността на тока  $\delta_A = \frac{I}{2\pi r_A^2}$ , а

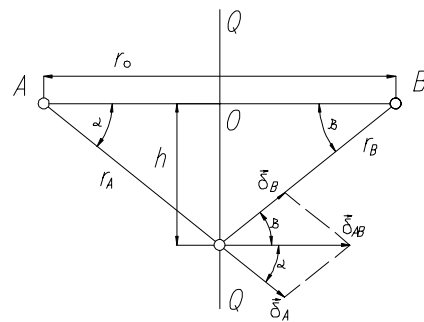
$\delta_B = -\frac{I}{2\pi r_B^2}$  (фиг. 6), следователно

$$\delta_{AB} = \delta_A + \delta_B = \frac{I}{2\pi r_A^2} \cos \alpha - \frac{I}{2\pi r_B^2} \cos \beta =$$

$$= \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{\cos \alpha}{r_A^2} - \frac{\cos(180 - \alpha)}{r_B^2} \right]$$

Но  $\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$ . Тогава

$$\delta_{AB} = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{\cos \alpha}{r_A^2} + \frac{\cos \alpha}{r_B^2} \right) = \frac{I}{2\pi} \left( \frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} \right) \cos \alpha$$



Фиг. 6. Изменение на плътността на тока в зависимост от дълбочината  $h$

Тъй като  $r_A = r_B = r$ , то

$$\delta_{AB} = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{2}{r^2} \cos \alpha = \frac{I}{\pi r^2} \cos \alpha \quad (21)$$

На земната повърхност в точка О, където  $h = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ,  $r = \frac{r_0}{2}$ , а плътността на тока е

$$\delta_0 = \frac{4I}{\pi r_0^2} \quad (22)$$

Но  $r = \frac{h}{\sin \alpha}$ , а формула (21) добива вида

$$\delta_{AB} = \frac{I}{\pi r^2} \cos \alpha = \frac{I}{\pi \frac{h^2}{\sin^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{I}{\pi h^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{I}{\pi h^2} \sin \alpha \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$\frac{I}{\pi h^2} \sin \alpha \frac{\cos \alpha}{2} = \frac{I}{2\pi h^2} \sin 2\alpha \sin \alpha$$

Когато  $h = 0$ , ъгълът  $\alpha = 0$ , а границата

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{I}{2\pi} \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I}{\pi} \frac{\sin^2 \alpha \cos \alpha}{h^2}$$

Но  $\sin \alpha = \frac{h}{r}$ . Тогава

$$\frac{I}{\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{r^2} \cos \alpha}{h^2} = \frac{I}{\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha}{r^2}$$

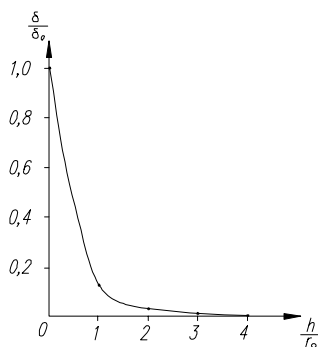
Тъй като

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}}, \text{ то}$$

$$\frac{I}{\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha}{r^2} = \frac{I}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{4I}{\pi r_0^2}$$

С увеличаване на дълбочината  $h$  (формула 23) плътността на тока намалява от стойността  $\frac{4I}{\pi r_0^2}$  до нула

(при  $h \rightarrow \infty$ ), при което в началото плътността на тока намалява по-малко интензивно, отколкото по обратноквадратична зависимост, тъй като нараства не само знаменателят, но и числителят. При ъгъл  $\alpha$ , превишаващ  $45^\circ$ ,  $\sin \alpha$  намалява. Следователно започвайки от някаква стойност  $\alpha = \alpha_1$ , намаляването на плътността на тока с увеличаване на  $h$  е по-интензивно, отколкото по обратноквадратична зависимост. Кривата на изменение на плътността на тока в зависимост от дълбочината  $h$  е показана на фиг.7.



Фиг. 7. Графика на изменението на плътността на тока с изменение на дълбочината  $h$

Отношението на плътността на тока  $\delta$  в дълбочина, към плътността на тока  $\delta_0$  на земната повърхност в точка О е равно

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{I \cos \alpha}{\pi r^2} : \frac{4I}{\pi r_0^2}$$

Но  $r = \frac{r_0}{2 \cos \alpha}$ , тогава

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{\left(\frac{r_0}{2}\right)^3}{r^3} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2h}{r_0}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (24)$$

тъй като  $r = \sqrt{\left(\frac{r_0}{2}\right)^2 + h^2}$ .

От израза (24) и кривата (фиг. 7) следва, че разпределението на плътността на тока с изменение на дълбочината зависи от разстоянието между захранващите електроди А и В. Колкото е по-голямо разстоянието между електродите, толкова е по-голяма дълбочината  $h$ , на която може да се наблюдава стойността  $\frac{\delta}{\delta_0}$ .

## Заклучение

Изведена е формула за определяне на относителната плътност на тока в зависимост от разстоянието между разнополярни точковидни източници на ток и дълбочината на проникването му в земята. Забележка. Формула (24) е точна в случая, когато разглежданата произволна точка се намира в еднопластова проводяща, еднородна и изотропна среда.

## Литература

- Козаров А. С., С. А. Стефанов. Теоретични основи на електротехниката, част III, София, 1991 година  
 Бургсдорф В. В., А. И. Якобс, Заземляющие устройства электроустановок, Москва, ЭНЕРГЕАТОМИЗДАТ, 1987  
 Костуба С. И., Измерения электрических параметров земли и заземляющих устройств, Москва, ЭНЕРГЕАТОМИЗДАТ, 1983  
 Шимони К., Теоретическая электротехника, изд. „Мир“, Москва, 1964 г.

Препоръчана за публикуване от  
 Катедра «Електротехника», МЕМФ