

ДВИЖЕНИЕ НА МАТЕРИАЛНА ЧАСТИЧКА В НАКЛОНЕН ЦИЛИНДРИЧЕН БАРАБАН

Кристиян Цветков

РЕЗЮМЕ: В работата се изследва движението на материална частичка (точкова маса) във въртящ се наклонен цилиндричен барабан. Изследва се относителното движение на частичката спрямо вътрешната цилиндрична повърхнина на барабана под действие на собственото ѝ тегло, центробежната сила и силата на триене. Получени са аналитични зависимости за определяне на ъгъла на завъртане и ъгловата скорост на частичката, както и на скоростта и пътя на надлъжното ѝ преместване спрямо оста на барабана. На базата на получените аналитични зависимости е изследвано влиянието на основни геометрични, физични и кинематични параметри върху скоростта на надлъжно преместване на материалната частичка. Влиянието на отделните параметри върху тази скорост е представено в графична форма. Извършен е анализ на получените резултати, който позволява да се направи качествена и количествена оценка на влиянието на отделните параметри върху основни технологични показатели на машините.

MOTION OF A MATERIAL PARTICLE IN AN INCLINED CYLINDRICAL DRUM

Kristian Tsvetkov

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski"

ABSTRACT: This paper discusses the motion of a material particle (a point mass) in a rotating inclined cylindrical drum. The particle movement is studied relative to the inner cylindrical drum surface under the action of its own weight, centrifugal force and force of friction. Analytical dependencies have been obtained for determining the rotational angle and the particle angular velocity as well as the velocity and distance of longitudinal displacement in relation to the drum axis. The effect of basic geometric, physical and kinematic parameters on the velocity of longitudinal movement of the material particle is investigated on the basis of the analytical dependencies derived. The influence of each parameter on that movement is represented graphically. The results obtained are analyzed thus allowing a qualitative and quantitative assessment of the effect of the individual parameters on basic technological indices of the machines concerned.

I. ВЪВЕДЕНИЕ

Различни промишлени процеси, отнасящи се до технологична обработка и преработка на насипни (зърнести) продукти, се осъществяват в апарати, чийто работен орган е въртящ се цилиндричен барабан.

Такива машини са: барабанните зърночистачни и сортиращи машини (триори) в селското стопанство; много смесители и гранулятори в химическата и хранително-вкусовата промишленост; различните барабанни, промивни и пресевни машини в обогатяването, строителството и миннодобивната промишленост.

Основна характеристика на работния процес при тези машини е, че той се осъществява вътре във въртящ се цилиндричен (или леко коничен) барабан. Взаимодействието между вътрешната повърхнина на барабана и материалните частички под действие на гравитационните и центробежните сили и породените от тях сили на триене осигурява относителното движение (плъзгане) между частичките и барабана. Това относително движение позволява да се осъществяват технологични процеси като пресяване, промиване, смесване, гранулиране, зърноочистка и др. Непрекъснатостта на технологичните процеси при цилиндричните барабанни машини се осигурява от надлъжното преместване на материала по оста на барабана, дължащо се на наклоненото монтиране на цилиндричната повърхнина. Стеснените условия на разполагане и движение на материалните частички вътре в барабана позволяват само тяхното относително плъзгане по цилиндричната повърхност.

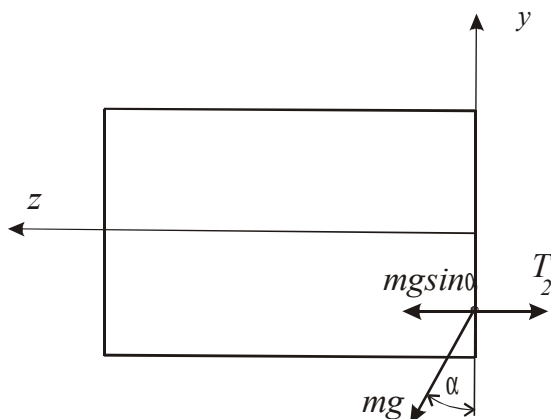
В настоящата работа се разглежда движението на отделна материална частичка (точка) по вътрешната повърхност на цилиндричен барабан под действие на собственото ѝ тегло, действащата върху нея центробежна сила и силите на триене. Получените резултати ще позволят да се направи както качествена, така и количествена оценка на изследвания процес; ще дадат възможност за формулиране и решаване на оптимизационни задачи. Това ще открие възможности за подходящ избор на конструктивни и технологични параметри, водещи до най-добри решения.

II. ТЕОРЕТИЧНИ ИЗСЛЕДВАНИЯ

В цилиндричен барабан с наклонена ос е поставена частичка (материална точка). В началния момент точката се намира в най-ниското положение в барабана. Последният се върти с постоянна ъглова скорост ω . Поради триенето точката започва да се движи заедно с барабана. Наклоненото монтиране на барабана под ъгъл α осигурява надлъжното преместване на частичката по оста на барабана.

В настоящото разглеждане вместо да наклоним оста на барабана, ще приемем, че силата на теглото на частичката не е вертикална, а сключва ъгъл α с вертикалата (фиг. 1). В този случай уравненията на движение на материалната точка ще имат вида:

$$\begin{aligned}
 0 &= T_1 - mg \cos \alpha \sin \varphi; \\
 mR\omega^2 &= N - mg \cos \alpha \cos \varphi; \\
 0 &= mg \sin \alpha - T_2,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$



Фиг. 1.

Нормалната реакция N в (2) се различава с един множител ($\cos \alpha$) от нормалната реакция N при хоризонтален барабан, но ще запазим същото означение. Тогава положението на относително равновесие, разглеждано в равнината Oxy , ще се определи от уравнението

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi_0} = \mu \left(\cos \alpha \cos \varphi_0 + \frac{R\omega^2}{g} \right).
 \tag{3}$$

Като въведем променливата $\cos \bar{\varphi}_0 = \cos \alpha \cos \varphi_0$, уравнение (3) ще добие вида

$$\sin \bar{\varphi}_0 = \mu \left(\cos \bar{\varphi}_0 + \frac{R\omega^2}{g} \right).$$

Вижда се, че тази нова

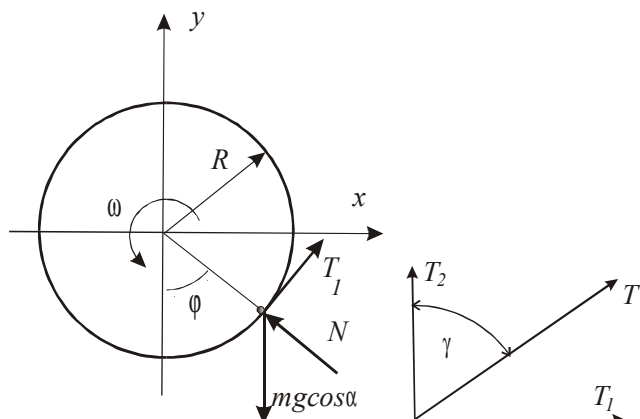
променлива $\bar{\varphi}_0$ се получава от същото уравнение (3) [8]. Оттук следва, че условията за съществуване на това относително равновесно положение остават непроменени, като само стойността на ъгъла φ_0 ще се промени по съответен начин. Но има и нещо различно. При уравнението (3) [8] за съществуване на равновесното положение няма долна граница на ъгловата скорост. Изследването на (3) сега показва, че ако $\operatorname{tg} \alpha \leq \mu$, няма долна граница на ъгловата скорост, но ако $\operatorname{tg} \alpha > \mu$, долната граница на ъгловата скорост е

$$\omega_{LB} = \sqrt{\left(\sin \alpha - \mu \cos \alpha \right) \frac{g}{\mu R}}.
 \tag{4}$$

Това означава, че при $0 < \omega < \omega_{LB}$, разглежданата точка само ще се спуска по наклонения барабан, без да се завърта в равнината Oxy .

където T_1 лежи във вертикалната равнина, а T_2 е успоредна на оста Oz , и още

$$\bar{T} = \mu N, \quad \bar{T} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}.
 \tag{2}$$



Фиг. 1а.

Уравненията на движение сега имат вида:

$$\begin{aligned}
 mR\ddot{\varphi} &= T_1 - mg \cos \alpha \sin \varphi; \\
 mR\dot{\varphi}^2 &= N - mg \cos \alpha \cos \varphi; \\
 m\ddot{z} &= mg \sin \alpha - T_2,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

където $\bar{T} = \mu N$, $\bar{T} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$. Тъй като силата на триене е насочена противно на относителната скорост v , то следва

$$\vec{T} = -\mu N \frac{v}{v},
 \tag{6}$$

при което

$$v = \sqrt{R^2(\dot{\varphi} - \omega)^2 + \dot{z}^2}, \quad T_1 = -\mu N \frac{R(\dot{\varphi} - \omega)}{v}, \quad T_2 = -\mu N \frac{\dot{z}}{v}
 \tag{7}$$

Тогава уравненията (5) добиват вида:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi} &= \mu \operatorname{sgn}(\omega - \dot{\varphi}) \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \cos \alpha \cos \varphi \right) \frac{R(\omega - \dot{\varphi})}{v} - \frac{g}{R} \cos \alpha \sin \varphi, \\
 \ddot{z} &= g \sin \alpha - \mu \operatorname{sgn}(\dot{z}) \left(R\dot{\varphi}^2 + g \cos \alpha \cos \varphi \right) \frac{\dot{z}}{v},
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

при началните условия:

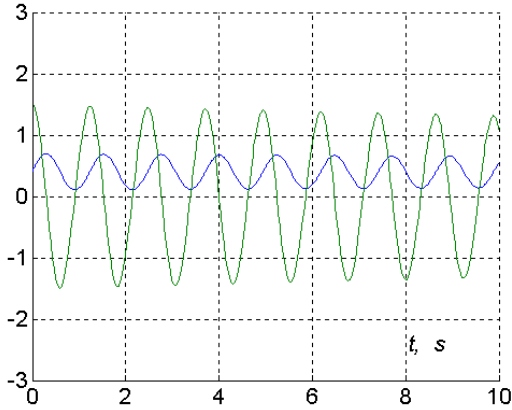
$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \omega, \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.
 \tag{9}$$

Като се отчете, че при разглежданите движения е изпълнено винаги $\omega - \dot{\varphi} \geq 0$, което означава, че множителят $\operatorname{sgn}(\omega - \dot{\varphi})$ винаги има стойност +1, системата (8) може да се запише като

(10)

$$\ddot{\varphi} = \mu \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \cos \alpha \cos \varphi \right) \frac{R(\omega - \dot{\varphi})}{v} - \frac{g}{R} \cos \alpha \sin \varphi,$$

$$\ddot{z} = g \sin \alpha - \mu \operatorname{sgn}(\dot{z}) \left(R\dot{\varphi}^2 + g \cos \alpha \cos \varphi \right) \frac{\dot{z}}{v}.$$



Фиг. 2.

Вижда се, че движението е непериодично, но има някакъв елемент на периодичност. За определянето на този условно наречен период T_{P1} ще използваме следния подход. Системата (10) и системата (8) могат да се запишат като:

(11)

$$\ddot{\varphi} = \mu \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \cos \alpha \cos \varphi \right) \sin \gamma - \frac{g}{R} \cos \alpha \sin \varphi,$$

$$\ddot{z} = g \sin \alpha - \mu \operatorname{sgn}(\dot{z}) \left(R\dot{\varphi}^2 + g \cos \alpha \cos \varphi \right) \cos \gamma,$$

където γ е ъгълът, който се сключва между силите на триене T и T_2 (фиг. 1а):

$$\gamma = \arctg \frac{R(\omega - \dot{\varphi})}{\dot{z}}.$$

Графиката на изменението на този ъгъл е показана на фиг.4.

В тази графика се появява отново споменатият елемент на периодичност. Нека да вземем средната стойност на този ъгъл - $\tilde{\gamma}$ за относително дълъг интервал от време. Тогава системата (11) ще се запише като:

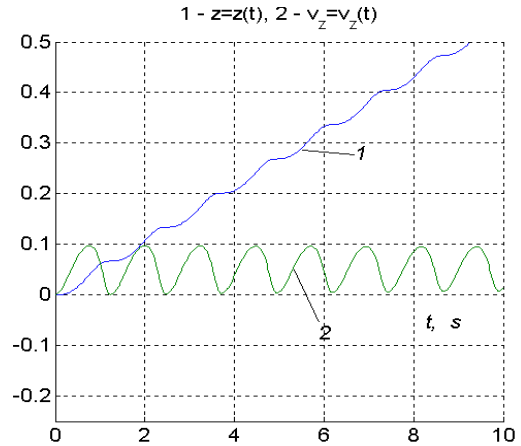
(12)

$$\ddot{\varphi} = \mu \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{R} \cos \alpha \cos \varphi \right) \sin \tilde{\gamma} - \frac{g}{R} \cos \alpha \sin \varphi,$$

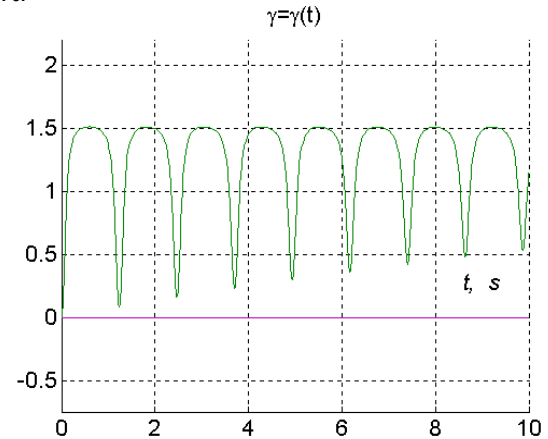
$$\ddot{z} = g \sin \alpha - \mu \operatorname{sgn}(\dot{z}) \left(R\dot{\varphi}^2 + g \cos \alpha \cos \varphi \right) \cos \tilde{\gamma}.$$

$$(15) C = e^{-2\mu\varphi_0} \left\{ \frac{g}{R\mu} (\sin \bar{\varphi}_0 - \mu \cos \bar{\varphi}_0) - \frac{2g \cos \alpha}{R(1+4\mu^2)} \left[\mu (2 + \sin \tilde{\gamma}) \sin \varphi_0 + (1 - 2\mu^2 \sin \tilde{\gamma}) \cos \varphi_0 \right] \right\}.$$

Решения на системата (8) за $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ са показани на фиг. 2, а за $z(t)$ и $\dot{z}(t)$ - на фиг. 3, където за параметрите в системата (8) са приети стойностите $\mu = 0,4$; $R = 0,4$ m; $\omega = 1,5$ rad/s и $\alpha = 0,055$ rad.



Фиг. 3.



Фиг. 4

Вижда се, че първото уравнение е независимо от второто. Тук съществува пръв интеграл, който е:

(13)

$$\dot{\varphi}^2 = C e^{2\mu\varphi} + \frac{2g \cos \alpha}{R(1+4\mu^2)} \left[\mu (2 + \sin \tilde{\gamma}) \sin \varphi + (1 - 2\mu^2 \sin \tilde{\gamma}) \cos \varphi \right]$$

Интеграционната константа C ще бъде

(14)

$$C = e^{-2\mu\varphi_0} \left\{ \omega^2 - \frac{2g \cos \alpha}{R(1+4\mu^2)} \left[\mu (2 + \sin \tilde{\gamma}) \sin \varphi_0 + (1 - 2\mu^2 \sin \tilde{\gamma}) \cos \varphi_0 \right] \right\}$$

При съвместно решаване на уравнения (14) и (3) получаваме:

Очевидно е, че условният период T_{P1} се определя напълно аналогично на опростения равнинен случай. Нека въведем функцията

$$(16) \quad \Phi_1(\varphi_0, \varphi, \tilde{\gamma}) = Ce^{2\mu\varphi} + \frac{2g \cos \alpha}{R(1 + 4\mu^2)} \left[\mu (2 + \sin \tilde{\gamma}) \sin \varphi \right]$$

където C се определя от (15) (трябва да се отбележи, че в зависимостите (15) и (16) $\tilde{\gamma}$ зависи от φ_0 , т.е. това означава, че сме проинтегрирали системата (10) при данни, които отговарят на фиксирано φ_0 и сме намерили средната стойност на ъгъла $\gamma - \tilde{\gamma}$). От уравнението

$$(17) \quad \Phi_1(\varphi_0, \varphi, \tilde{\gamma}) = 0$$

се получават стойностите φ_{\min} и φ_{\max} . "Периодът" T_{P1} на изменението на φ може да се определя от:

$$(18) \quad T_{P1} = 2 \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi_1(\varphi_0, \varphi, \tilde{\gamma})}}.$$

Проведените числени експерименти показват много добро съвпадение на пресметнатия по този начин "период" T_{P1} и неговата действителна стойност, която се получава при интегрирането на уравненията (10) (фиг. 2 и фиг. 3).

Граничната стойност на $\varphi_0 - \bar{\varphi}_{0UB}$, която съответства на максималната стойност $\varphi_{\max} = \pi/2$, може да се получи след итерационна процедура (което означава при някаква стойност $\tilde{\gamma}$ да се получи приближена стойност на $\bar{\varphi}_{0UB}$, след което $\tilde{\gamma}$ да се коригира и т.н.) от уравнението

$$(19) \quad \Phi_1(\bar{\varphi}_{0UB}, \pi/2, \tilde{\gamma}) = 0.$$

По-нататък, като се използва уравнението (3), може да се получи и граничната стойност на ъгловата скорост ω_{UB} .

Възможност за избягване на тази итерационна процедура е следният приближен подход. Тъй като амплитудите на изменението на ъгъла φ намаляват, от значение ще бъде да постигнем ограничаване на първата такава амплитуда. Някои съображения по отношение на максималната стойност на ъгъла γ дават основание да приемем за ъгъла $\tilde{\gamma}$ израза

$$tg \tilde{\gamma} = \frac{\sin \varphi_0}{tg \alpha},$$

$$(20) \quad \Phi_1(\varphi_{0UB}, \pi/2, \tilde{\gamma}) = \Phi_1(\varphi_{0UB}, \pi/2) = Ce^{\mu\pi} + \frac{2g\mu \cos\alpha}{R(1+4\mu^2)} \left(2 + \frac{\sin\varphi_{0UB}}{\sqrt{tg^2\alpha + \sin^2\varphi_{0UB}}} \right),$$

където C ще се определя от

$$C = e^{-2\mu\varphi_{0UB}} \left\{ \frac{g}{R\mu} \left(\sqrt{1 - \cos^2\alpha \cos^2\varphi_{0UB}} - \mu \cos\alpha \cos\varphi_{0UB} \right) - \frac{2g \cos\alpha}{R(1+4\mu^2)} \left[\mu \left(2 + \frac{\sin\varphi_{0UB}}{\sqrt{tg^2\alpha + \sin^2\varphi_{0UB}}} \right) \sin\varphi_{0UB} + \left(1 - 2\mu^2 \frac{\sin\varphi_{0UB}}{\sqrt{tg^2\alpha + \sin^2\varphi_{0UB}}} \right) \cos\varphi_{0UB} \right] \right\}.$$

Проведените числени експерименти показват, че уравнението (19) се влияе съвсем несъществено от малки изменения на $\tilde{\gamma}$. Затова предложеното приближено определяне на граничната стойност на $\bar{\varphi}_{0UB}$ (и на ω_{UB}) е съвсем приемливо.

III. АНАЛИЗ НА ТЕОРЕТИЧНИТЕ ИЗСЛЕДВАНИЯ

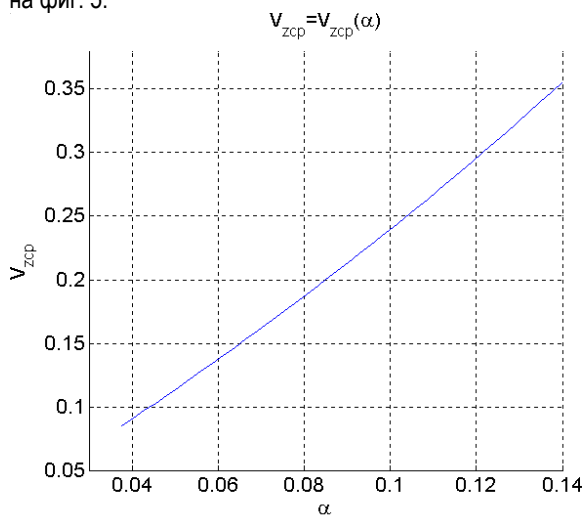
На фиг. 2 са показани ъгловата скорост $\dot{\varphi}(t)$ и ъгловото преместване $\varphi(t)$ на материалната частичка в равнина, перпендикулярна на оста на барабана. Величината на тези параметри определя големината и интензивността на преместването на частичката по вътрешната повърхнина на барабанната машина. Характерът и големината на параметрите $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ са от значение за осъществяване на технологичните процеси пресяване, смесване, гранулиране и др. в съответните барабанни машини. Колкото динамичността в изменението на $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ е по-голяма, толкова по-добре се реализира съответния технологичен процес. Очевидно е, почти синусоидалното изменение на величините $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$, представени на фиг. 2, както и строгата им периодичност, определена от формула (18).

Наклоненото монтиране на барабана под ъгъл α и въртеливото движение спрямо оста му с ъглова скорост ω осигуряват осевото преместване на материалната частичка. Графиките на осевата скорост $v_z = \dot{z}(t)$ и изминатия път $z(t)$ от частичката по оста на барабана са представени на фиг. 3. Преместването на частичката по оста на барабана се осъществява на периодични тласъци, при което скоростта v_z се мени от 0 до v_z^{max} с период T_{p1} , определен от формула (18). Скоростта v_z осигурява непрекъснат технологичен процес на барабанната машина и е основна компонента при формирането на производителността ѝ.

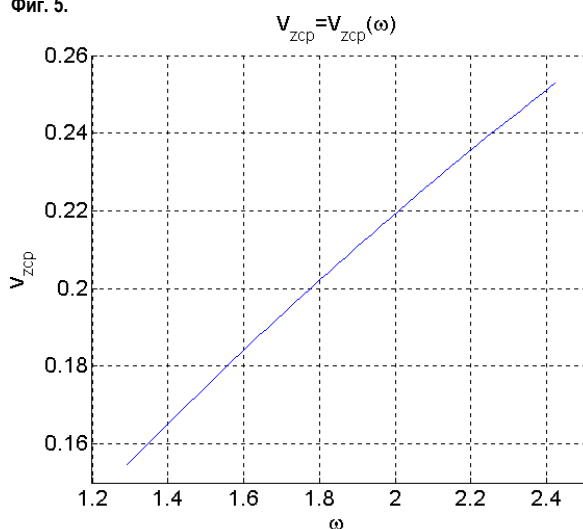
Най-важният технологичен показател на различните видове барабанни машини е производителността им. Чрез съгласуване на производителностите си отделните машини формират общата технологична линия на даден производствен процес. Този факт определя особеното значение на осевата скорост v_z за барабанната машина, още повече, че чрез изменението на v_z може да се регулира, както производителността, така и други технологични показатели на машината. Поради тази причина представлява интерес изследването на влиянието на отделните параметри върху осевата скорост v_z .

Основните параметри, определящи скоростта v_z , са радиусът на барабана R , ъгловата му скорост ω , ъгълът на

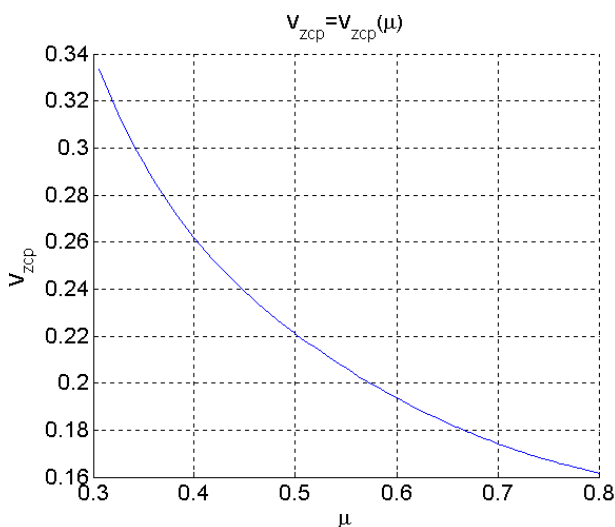
наклона α и коефициентът на триене μ . Функционалната връзка между $v_z = \dot{z}(t)$ и тези параметри се дава от системата (8), а графиката на $v_z = \dot{z}(t)$ е представена на фиг. 5.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

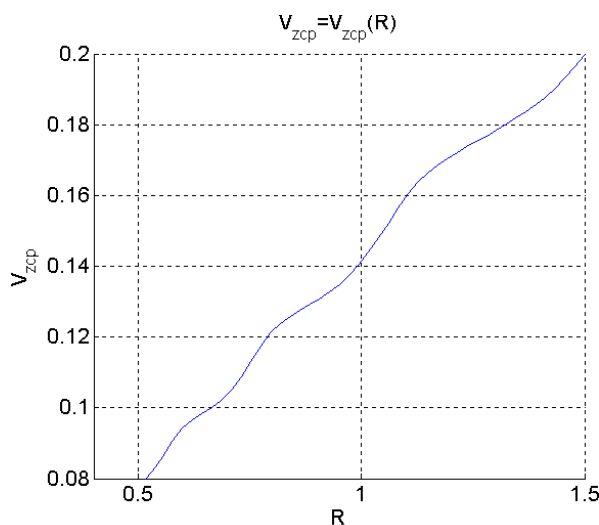
Както се вижда от фиг. 3, скоростта v_z се мени около някаква средна стойност v_{zcp} . Интерес представлява изменението на v_{zcp} във функция от отделните параметри. Това изменение е показано на фиг. 5, 6, 7 и 8 по ординатната ос на графиката е нанесена скоростта v_{zcp} , m/s. На фиг. 5 променлив параметър е ъгълът на наклона на барабана α , на фиг. 6 – ъгловата скорост на барабана ω , на фиг. 7 – коефициентът на триене μ и на фиг. 8 – радиусът на барабана – R . В съответните графики параметрите, които не са променливи величини, имат следните стойности: $\alpha = 0,055$ rad; $\omega = 1,85$ rad/s; $\mu = 0,55$ и $R = 0,75$ m.

От фиг. 5 се вижда, че средната скорост v_{zcp} зависи почти линейно от ъгъла на наклона α и расте с увеличаването на този ъгъл. Този параметър влияе и най-съществено върху големината на осевата скорост v_{zcp} .

Изменението на ъгловата скорост ω влияе също така почти линейно върху изменението на v_{zcp} , като с увеличаването на ω , расте и v_{zcp} (фиг. 6). Увеличаването на ω води до по-висока интензивност на процеса на относително движение между частичката и барабана, а в резултат на това – и до по-голяма осева скорост.

Графиката на изменението на v_{zcp} от коефициента на триене μ наподобява хипербола (фиг. 7). С увеличаването на μ осевата скорост v_{zcp} намалява. По-големите стойности на μ водят до намаляване на относителното движение между частичката и барабана, а от там – и до намаляване на v_{zcp} .

С увеличаването на радиуса на барабана R расте и скоростта v_{zcp} (фиг. 8). По-големите стойности на R водят до по-голяма интензивност на относителното движение между частичката и барабана, а в резултат на това – и до увеличаване на осевата скорост v_{zcp} .



Фиг. 8.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Извършените теоретични изследвания се отнасят до взаимодействието на отделна материална частичка и въртящ се цилиндричен барабан в условията на триене при плъзгане. Подобен работен процес се среща в изпълнителните органи на различни технологични машини в обогатяването, миннодобивната, химическата, хранително-вкусовата, селскостопанската и др. промишлености. Такива машини са различните барабанни пресеватели, смесители, гранулятори, зърночистачни и сортиращи машини (триори) и др.

Аналитичните изрази и графичната интерпретация на функционалната връзка между кинематичните, геометричните и физическите параметри на процеса на относително движение между материалната частичка и барабанния изпълнителен орган потвърждават качествено явленията, наблюдавани при реалните технологични машини. Провеждането на разширен обем изчисления с вариране на отделните параметри в широки граници, както и наблюдения на технологичните показатели на реални производствени машини при различни работни режими ще позволи да се прецизират получените аналитични резултати.

Литература

Препоръчана за публикуване
Рецензент: доц. д-р В. Пожидаева

1. Андреев, С.Е., В.В. Зверевич, В.А. Перов. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. Недра, М., 1980.
2. Барабанные вращающиеся грохоты. Справочник по обогащению руд, т.1, с. 33-35, Недра, М. 1982.
3. Цветков, Х.К. Барабанны пресевни уредби. Учебник по обогатителни машини, с. 44-53. Техника, 1988.
4. Гришаев, И.Г. Переработка пульп фосфатов аммония различной влажности в промышленных барабанных грануляторах-сушилках. Химическая промышленность, 2002, 5, 34-36, ISSN 0023-110X. УДК 661, МСНТИ: 61.13.
5. Селиванов, Ю.Т. К вопросу повышения эффективности работы барабанных смесителей сыпучих материалов. Химическая промышленность, 2002, 7, 52-54, ISSN 0023-110X. УДК 661, МСНТИ: 61.13.
6. Семенов, Д.В. Влияние вида обкатки помольных барабанов планетарных мельниц на основные динамические характеристики. Химическая промышленность, 2004, LXXXI, 3, 126-130, ISSN 0023-110X. УДК 661, МСНТИ: 61.13.
7. Цветков, Х.К., А.И. Янева. Основни силиви и технологични показатели на барабанен пресевател. Сп. Геология и минерални ресурси, с. 16-20, кн. 5, 2006.
8. Цветков, Х.К. Движение на материална частичка във въртящ се цилиндричен барабан.