ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 55, Св. II, Добив и преработка на минерални суровини, 2012
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 55, Part II, Mining and Mineral processing, 2012

РЕШАВАНЕ НА СТАТИЧНО НЕОПРЕДЕЛИМА РАМКА ПО СИЛОВИЯ МЕТОД В МАТРИЧНА ФОРМА

Асен Стоянов

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София; asen_dragomirov@mail.bg

РЕЗЮМЕ. За автоматизиране на инженерните изчисления, решението на статически неопределимата конструкция, се представя в матрична форма.

ANALYSIS OF STATICALLY INDETERMINATE FRAME BY FORCE METHOD IN MATRIX FORM

Asen Stoyanov
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia; asen_dragomirov@mail.bg

ABSTRACT. For automation of engineering estimation it is necessary the solution of statically indeterminate construction to be presented in matrix form.

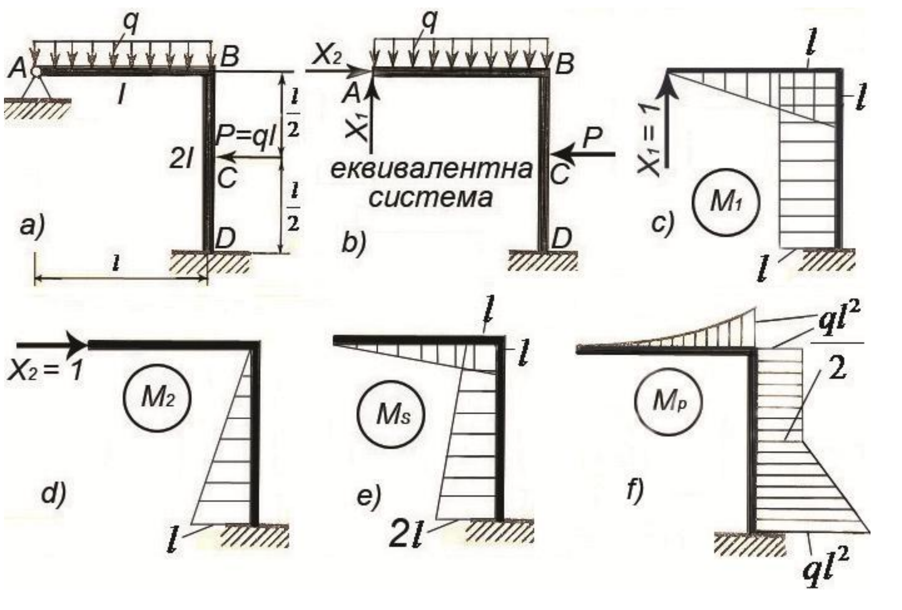
Въведение

Съвременните програмни продукти налагат нов поглед върху методите за решаване на статично неопределими конструкции, като се създават възможности за автоматизация на изчислителните процеси.

Нещо повече, разкриват се практически възможности за изследване на явления и важни свойства на твърдите деформируеми тела, подхода към които е немислим с ръчни методи за изчисляване (Симеонов, 1993).

Показаната на фиг.1.a. рамка е два пъти статически неопределима конструкция, с еквивалентна система (натоварена основна система), показана на фиг.1.b.

Диаграмите от единичните стойности на неизвестните са показани на фиг.1.c. и фиг.1.d. На фиг.1.e. е показана сумарната диаграма, а диаграмата от външния товар приложен върху основната система е построена на фиг.1.f.



Фиг. 1.

Последователност на решението в матрична форма

<u>*Система уравнения за непрекъснатост на деформациите, представена в матрична форма*</u>

$$\delta_{ik} \cdot \{X_i\} = -\{\Delta_{ip}\}, \qquad (1)$$

където:

- δ_{ik} - матрица от коефициентите на каноничните уравнения;
- $\{\Delta_{ip}\}$ - вектор на преместванията от външното натоварване;
- $\{X_i\}$ - вектор на търсените (хиперстатичните) неизвестни.

<u>*Определяне коефициентите на системата канонични уравнения*</u>

Коефициентите δ_{ik} могат да се изразят в съкратена форма -

$$\delta_{ik} = M_{ik}^T \cdot D \cdot M_{ik} \qquad (2)$$

където:

- M_{ik} - матрица-стълб от моментите на единичните сили;
- D - матрица на податливост за системата.

Умножението на диаграми по правилото на Верешчагин за участъка „n” (Карамански и Рангелов, 1976) , може да се представи в матрична форма -

$$\frac{\omega_{M_k} \cdot y_{M_i}}{EI_n} = \{M_{i_n}\}^T \cdot D_n \cdot \{M_{k_n}\} \qquad (3)$$

където:

- ω_{M_k} - площ на M_k диаграмата за участък „n”;
- y_{M_i} - ордината от единичната диаграма, отчетена под центъра на тежестта на M_k диаграмата за участък „n”;
  - $\{M_{i_n}\}$- матрица-стълб, от моментите в двата края на участък „n” с дължина „l_n” от диаграма M_i;
  - D_n - матрица на податливост за „n-тия” участък;
  - $\{M_{k_n}\}$ - матрица-стълб, от моментите в диаграма M_k за „n-тия” участък, с дължина „l_n”.

За примера от фиг.1., решението на матричното уравнение (2), има следния вид:

$$\delta_{ik} = \begin{Vmatrix} 0 & l & l \\ 0 & 0 & l \end{Vmatrix} \cdot \frac{l}{6EI} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ l & 0 \\ l & l \end{Vmatrix} = \frac{l^3}{EI} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1,5}{6} \\ \frac{1,5}{6} & \frac{1}{6} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Vmatrix};$$

<u>*Проверка на коефициентите*</u>

За целта е необходимо, да е изпълнено равенството –

$$\Sigma \int M_s^2 ds' = \Sigma EI.\delta_{ik}\ , \qquad (4)$$

или същото представено в съкратена матрична форма –

$$M_s.D.M_s^T = \Sigma\, \delta_{ik} \qquad (5)$$

където:

- M_s - е сумарна диаграма (виж фиг.1.f.).

Тъждеството (4) представено в матрична форма (5) е в сила:

$$M_s.D.M_s^T = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \frac{l^3}{6} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = 1{,}5.l^3;$$

$$\delta_{ik} = \frac{l^3}{6} \cdot (5 + 2.1{,}5 + 1) = 1{,}5.l^3\ ,$$

с което проверката е извършена.

<u>*Определяне на свободните членове за системата канонични уравнения*</u>

Векторът на товарните премествания, се представя в съкратена форма с матричното уравнение –

$$\{\Delta_{ip}\} = \{M_i\}^T \cdot D \cdot \{M_p^0\} \qquad (6)$$

където:

- $\{M_i\}$- матрица-стълб от моментите на единичните сили, приложени по направление на търсените премествания;
- D - матрица на податливост за системата;
- $\{M_p^0\}$ - матрица-стълб от моментите на товарната диаграма в основната система, предизвикани от външното натоварване.

Решението на (6) има вида:

$$\{\Delta_{ip}\} = \frac{q.l^4}{6EI} \begin{Bmatrix} -4{,}5 \\ -2{,}125 \end{Bmatrix} .$$

Проверка на свободните членове

Трябва да е в сила тъждеството -

$$\Sigma\int M_s . M_p \, ds' = \Sigma\, EI_c . \Delta_{ip} \,,. \tag{7}$$

като (7) може да се представи в матрична форма:

$$M_s . D . M_p = \sum \Delta_{ip} . \quad . \tag{8}$$

Тъждеството (8) е изпълнено:

$$M_s . D . M_p = \frac{q.l^4}{6} \cdot (-6{,}625) = -1{,}1042 . q . l^4 \,;$$

$$\sum \Delta_{ip} = \frac{q.l^4}{6} \cdot (-4{,}5 - 2{,}125) = -1{,}1042 . q . l^4 \,,$$

с което проверката приключва.

Решение на уравнение (1)

Решението на уравнение (1) се извършва по метода на обратната натрица –

$$\{X_i\} = -\delta_{ik}^{-1} \cdot \{\Delta_{ip}\}. \tag{9}$$

То е единствено, ако δ_{ik} не е изродена матрица, т.е.

$$Det\,\delta_{ik} \neq 0$$

и понеже

$$Det\,\delta_{ik} = 0{,}076388 \cdot \frac{l^6}{(EI)^2} \neq 0 \,,$$

то δ_{ik}^{-1} съществува и система (9) има единствено решение:

$$\{X_i\} = -\frac{EI}{l^3} \cdot \begin{Vmatrix} 2{,}182 & -3{,}273 \\ -3{,}273 & 10{,}91 \end{Vmatrix} \cdot \frac{q.l^4}{EI} \begin{Bmatrix} -0{,}75 \\ -0{,}354 \end{Bmatrix} ;$$

или

$$\{X_i\} = ql \cdot \begin{Bmatrix} 0{,}477 \\ 1{,}409 \end{Bmatrix} .$$

Проверка на получените резултати

Необходимо е резултатите да удовлетворяват равенството:

$$\delta_{ik} . \{X_i\} + \{\Delta_{ip}\} = 0 \,. \tag{10}$$

След заместване на съответните матрици в (10), се получава:

$$\delta_{ik} . \{X_i\} + \{\Delta_{ip}\} = \begin{Bmatrix} -2{,}659.10^{-4} \\ 1{,}303.10^{-4} \end{Bmatrix},$$

откъдето следва, че тъждеството (10) ев сила.

Заключение

Определянето на усилията и преместванията във всяка конструкция предшествува нейното оразмеряване и конструиране.

Решаването на задачи от строителната механика е съпроводено от голям обем изчислителна работа, като нейното бързо и висококачествено извършване, се реализира с компютър (Карамански и др., 1988).

Матричната форма на решение за статично неопределима рамка по силовия метод, е удобно за автоматизиране на изчислителния процес като цяло. Разгледаният подход, за определяне на хиперстатичните неизвестни в съчетание с достъпни приложения, не само улеснява работата, но и предоставя възможност за съпоставка на получените резултати с тези от „ръчното" решение.

Литература

Симеонов, С. 1993. Статика на строителните конструкции част II. С., Техника. 313 с.

Крамански, Т. Р. Рангелов, 1976. „Методично ръководство за решаване на задачи по строителна статика", С., Техника, ,527 с.

Карамански, Т., Т. Бобев, Н. Капитанов, Т. Ганев, А. Попов, И. Бойчев, 1988, Строителна механика, С., Техника, 490 с.