ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 55, Св. II, Добив и преработка на минерални суровини, 2012
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 55, Part II, Mining and Mineral processing, 2012

ЕДНО ПРИБЛИЖЕНИЕ НА ФУНКЦИЯТА НА ПРЕМЕСТВАНЕТО ОКОЛО КРЪГЛА ИЗРАБОТКА

В.Трифонова – Генова

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

РЕЗЮМЕ. Изследва се равнинното деформирано състояние около кръгла изработка, натоварена със съсредоточена сила. Приложен е вариационният метод на В. З. Власов в премествания. Последните се представят като сума от премествания в две подобласти с форма на концентрични ивици.
Пренебрегват се преместванията в трансверзално направление. За всяка ивица радиалните премествания са произведение на две функции. Първите функции на радиалната координата са приети, а вторите, на ъгловата координата, са получени.

AN APPROXIMATION OF THE DISPLACEMENT FUNCTION IN THE AREA OF A CIRCULAR MINING WORKING

Violeta Trifonova – Genova
University of Mining and Geology "St .Ivan Rilski", 1700 Sofia

ABSTRACT. A plane strain state in the area of a circular mining working under the action of a concentrated force is studied. Vlasov's variation method expressed in displacements is applied. The displacements are represented as a sum of the displacements of two concentrically circular layers.
The displacements in the transversal direction are negligee. For each of the layers the radial displacements are suggested as a product of two functions. The function of the radial coordinate is chosen. The expression for the function of the angular coordinate is obtained.

Увод

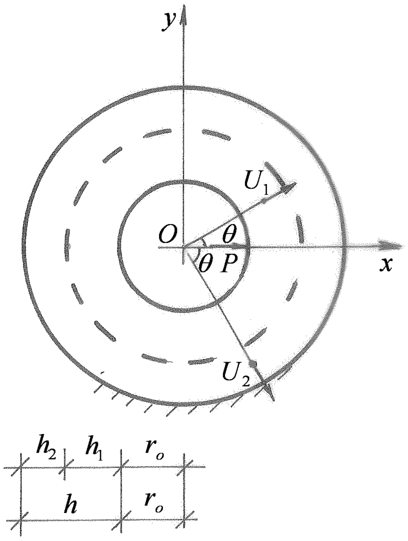
Върху изследването на деформираното състояние около кръгла незакрепена и закрепена изработка са посветени голям брой трудове. В голяма част от тях се използва комплексният анализ. Основните уравнения на равнинната задача се изразяват в най-общият случай като функции на комплексни променливи. Колосов (1928) пръв успява да изрази компоненетите на тензора на напреженията и преместванията в две аналитични функции. По късно редица автори, като Мусхелишвили (1949), Савин (1951) и др. разпространяват този резултати върху сложни (многосвързани) области.

Друг подходящ метод за определянето на преместванията около кръгла изработка е приблизителният метод на В.З.Власов. Според него търсените премествания са произведение на две функции на радиалната и ъгловата координата. Този метод е приложен при определянето на преместванията в околността на кръгла изработка, натоварена със съсредоточена сила (Косева, 1966). Прието е, че преместванията в трансверзално направление се пренебрегват. Получени са компонентите на радиалното преместване, функция на мощността на слоя, който се разглежда. За численото определяне на мощността е разработен алгоритъм (Трифонова, 2011).

В настоящата работа се предлага увеличение на точността на полученото решение чрез разделяне на областта на две подобласти. За тях ще се определят функциите на преместването.

Изложение

Във вертикална кръгова изработка с радиус r_o е приложена съсредоточена радиална сила P. Разглежда се елемент, заграден между две успоредни равнини на разстояние δ една от друга и перпендикулярни на оста на изработката. Положението на произволна точка от равнината е напълно определено, ако е известно разстоянието r от даден полюс О, който с център на кръглата изработка и полярния ъгъл θ, измерван от хоризонталната ос (фиг.1). Областта е с форма на кръгов пръстен с вътрешен радиус r_o и външен радиус $r_o + h$, който е кораво закраво закрепен. С оглед подобряване на точността на решението подобластите са две концентрични окръжности с различни дебелини h_1 и h_2, за които $h = h_1 + h_2$. За всяка ивица е валиден законът за равнините сечения.



Фиг. 1. **Обобщените премествания за двете подобласти**

Радиалните премествания се разпределят по линеен закон. Компонентите на вектора на преместването, според В. З. Власов (Косева, 1966), са:

$$U(r,\theta)=U_1(\theta)\varphi_1(r)+U_2(\theta)\varphi_2(r), \tag{1}$$

където $U_i(\theta)$ са обобщените премествания във всяка ивица. Функциите на радиалната координата се избират:

$$\varphi_1(r)=\frac{r_o+h_1-r}{h_1}; \qquad \varphi_2(r)=\frac{-r_o+r}{h_1};$$

$$\text{за } r_o \le r \le r_o+h_1; \tag{2}$$

$$\varphi_1(r)=0 \qquad \varphi_2(r)=\frac{r_o+h_1+h_2-r}{h_2}$$

$$\text{за } r_o+h_1 \le r \le r_o+h_1+h_2.$$

Тези уравнения се заместват в (1) и след това в системата диференциални уравнения на разглежданата среда от два слоя с различни физико-механични характеристики:

$$A_{11}U_1'' + A_{12}U_2'' - A_{13}U_1 - A_{14}U_2 = 0;$$
$$A_{21}U_1'' + A_{21}U_2'' - A_{23}U_1 - A_{24}U_2 = 0. \tag{3}$$

Коефициентите в тази система имат вида:

$$A_{ik} = b_{ij} + \mu_{oi}k_{ij}; \qquad A_{ij} = \frac{1-\mu_{oi}}{2}a_{ij}; \tag{4}$$

за $i, j = 1,2$; и за $k = j+2$, където

$$\mu_{oi} = \frac{\mu_i}{1-\mu_i}; \qquad \text{за } i = 1,2. \tag{5}$$

Константите в тези уравнения се получават от изразите, описани в приложение 1 и зависят както от коефициентите на Поасон μ_i за ($i = 1,2$), така и от вътрешните и външни радиуси на концентричните ивици.

Частни интеграли на системата (3) се приемат във вида (Канторович и Крилов, 1950):

$$U_1(\theta) = -A_{22}F^{II}(\theta) + A_{24}F(\theta);$$
$$U_2(\theta) = A_{21}F^{II}(\theta) - A_{23}F(\theta), \tag{6}$$

където $F(\theta)$ е функция на ъгловата координата.

Обобщените премествания от уравнения (6), както и производните им, се заместват в системата (3). Второто уравнение се превръща в тъждество, а първото уравнение приема следния вид:

$$F^{IV}(\theta) + B_1F^{II}(\theta) + B_2 = 0, \tag{7}$$

където

$$B_1 = \frac{A_{11}A_{24} - A_{12}A_{23} + A_{13}A_{22} - A_{14}A_{21}}{A_{12}A_{21} - A_{22}A_{11}};$$
$$B_2 = \frac{A_{14}A_{23} - A_{13}A_{24}}{A_{12}A_{21} - A_{22}A_{11}}. \tag{8}$$

Коефициентите в тези изрази се определят от (4) и (5). Когато физико-механичните характеристики на двата пласта са еднакви, тогава коефициентите от уравнение (7) приемат вида:

$$B_1 = \frac{a_{11}b_{222} - a_{22}b_{111} + 2a_{12}(b_{12} + \mu_o k_{12})}{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}};$$
$$B_2 = \frac{4\left[(b_{22} + \mu_o k_{21})^2 + b_{111}b_{222}\right]}{(1-\mu_o)^2(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})}, \tag{9}$$

където

$$b_{111} = b_{11} + \mu_o k_{11}; \; b_{222} = b_{22} + \mu_o k_{22}. \tag{10}$$

Константите в (9) и (10) са дадени в приложение 1.

Характеристичното уравнение на диференциално уравнение (7) е

$$\lambda^4 + B_1\lambda^2 + B_2 = 0. \tag{11}$$

Корените на това уравнение са:

$$\lambda_{1,3} = \sqrt{0,5(-B_1 \pm B_{12})}; \; \lambda_{2,4} = -\lambda_{1,3};$$
$$B_{12} = \sqrt{B_1^2 - 4B_2}. \tag{12}$$

Когато $B_1 > 0$ и $B_2 < 0$ то λ_1 и λ_2 са реални и спрегнати, а λ_3 и λ_4 са имагинерни корени:

$$\lambda_1 = \overline{\lambda}_1 ;\ \lambda_2 = -\lambda_1 ;\ \lambda_3 = \overline{\lambda}_2 i ;\ \lambda_4 = -\lambda_3 , \tag{13}$$

където

$$\overline{\lambda}_{1,2} = \sqrt{\left|0{,}5\left(-B_1 \pm B_{12}\right)\right|} . \tag{14}$$

Общото решение на уравнение (7) приема вида:

$$F(\theta) = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 c + C_4 s , \tag{15}$$

където

$$\begin{aligned} &e_1 = \exp\left(\overline{\lambda}_1 \theta\right);\ \ e_2 = \exp\left(-\overline{\lambda}_1 \theta\right); \\ &c = \cos\left(\overline{\lambda}_2 \theta\right);\ \ \ s = \sin\left(\overline{\lambda}_2 \theta\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Тази функция и нейните производни се заместват в (6), които приемат вида:

$$\begin{aligned} &U_1(\theta) = \left(I_1 + I_4\right) C_1 e_1 + \left(I_3 + I_5\right) C_3 c ; \\ &U_2(\theta) = \left(I_2 + I_5\right) C_2 e_2 + \left(I_3 + I_6\right) C_4 s , \end{aligned} \tag{17}$$

където

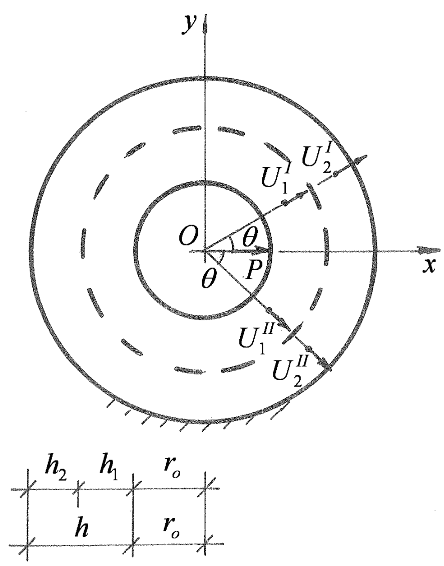
$$\begin{aligned} &I_1 = A_{24} - \overline{\lambda}_1^2 A_{22} ;\quad I_2 = A_{24} + \overline{\lambda}_1^2 A_{22} ; \\ &I_3 = A_{24} + A_{22} \overline{\lambda}_2^2 ;\quad I_4 = -A_{23} + A_{21} \overline{\lambda}_2^2 ; \\ &I_5 = -A_{233} - A_{21} \overline{\lambda}_2^2 ;\quad I_6 = A_{24} - A_{21} \overline{\lambda}_2^2 . \end{aligned} \tag{18}$$

Обобщените премествания за области I и II с граница направлението на силата (фиг.2) са:

$$\begin{aligned} &U_1^I(\theta) = I_1 C_1 e_1 + I_3 C_3 c ; \\ &U_2^I(\theta) = I_2 C_2 e_2 + I_3 C_4 s ; \qquad \text{за } 0 \le \theta \le \pi/2 ; \\ &U_1^{II}(\theta) = I_4 C_1 e_1 + I_5 C_3 c ; \\ &U_2^{Ii}(\theta) = I_5 C_2 e_2 + I_6 C_4 s ; \qquad \text{за } -\pi/2 \le \theta \le 0 . \end{aligned} \tag{19}$$

Интеграционните константи C_r ($r = 1,..,4$), участващи в преместванията, се определят от граничните условия.

$$\begin{aligned} &U_1^I(0) = U_2^I(0); \qquad U_1^{II}(0) = U_2^{II}(0); \\ &S_1^I(0) + S_1^{II}(0) = 0 ; \qquad S_2^I(0) + S_2^{II}(0) = P . \end{aligned} \tag{20}$$



Фиг. 2. **Обобщените премествания за области** I **и** II

Обобщените надлъжни сили в тези уравнения имат вида:

$$S_j^k(\theta) = \frac{E_o}{2\left(1 + \mu_o\right)} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} \left[U_j^k(\theta)\right]' ; \tag{21}$$

за $j = 1,2$ и за $k = I, II$, където

$$E_o = \frac{E}{\left(1 - \mu^2\right)} .$$

Тук E е модул на еластичността.

След заместване на (21) и (19) в (20) се получават интеграционните константи

$$\begin{aligned} &C_1 = \Delta_{\Delta 1} C_2 ;\quad C_2 = 2P\left(1 + \mu_o\right) g_{22} E_{\Delta} ; \\ &C_3 = \Delta_{\Delta 2} C_2 ;\quad C_4 = -2P\left(1 + \mu_o\right) g_{21} E_{\Delta} . \end{aligned} \tag{22}$$

Коефициентите в тези изрази имат вида:

$$\begin{aligned} &g_{111} = a_{12}\left(I_1 + I_4\right)\overline{\lambda}_1 \Delta_{\Delta 1} ;\ g_{112} = -a_{22}\left(I_2 + I_5\right)\overline{\lambda}_1 ; \\ &g_{11} = g_{111} + g_{112} ;\qquad g_{12} = a_{22}\left(I_3 + I_6\right)\overline{\lambda}_2 ; \\ &g_{211} = a_{11}\left(I_1 + I_4\right)\overline{\lambda}_1 \Delta_{\Delta 1} ;\ g_{212} = a_{21}\left(I_2 + I_5\right)\overline{\lambda}_2 ; \\ &g_{21} = g_{211} + g_{212} ;\qquad g_{22} = a_{21}\left(I_3 + I_6\right)\overline{\lambda}_2 ; \\ &\overline{\Delta} = g_{11} g_{22} - g_{21} g_{12} ;\quad \Delta = I_1 I_2 - I_3 I_4 ; \\ &\Delta_1' = I_2^2 - I_3 I_5 ;\ \Delta_2' = I_1 I_5 - I_2 I_4 ; \\ &\Delta_{\Delta 1} = \frac{\Delta_1'}{\Delta} ;\qquad \Delta_{\Delta 2} = \frac{\Delta_2'}{\Delta} ;\qquad E_{\Delta} = \frac{1}{E\overline{\Delta}} . \end{aligned} \tag{23}$$

Заключение

За предложения подобрен модел на двупластова среда около кръгла изработка, могат да се направят следните изводи:

1) Приети са функциите на радиалните координати на компонентите на преместването и са получени коефициентите в системата диференциални уравнения, описващи състоянието на средата.

2) Аналитично е решена системата диференциални уравнения и са получени компонентите на вектора на преместването в полярни координати.

Литература

Канторович Л.В., Крилов В.И. 1950. *Приближенные методы высшего анализа.*

Колосов Г.В. 1928. О некоторых приложениях комплексного преобразования уравнений математической теории упругости к отысканию общих типов решения этих уравнений, *Известия Ленинградского электр. института*.

Косева Ч. 1966. Върху приложението на вариационния метод на В.З.Власов към една задача от механика на скалите, *Годишник на ВТУЗ*, „Приложна механика", том I, книга 2.

Мусхелишвили Н. И. 1949. *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Издательство АН СССР.

Савин Г.Н. 1951. *Концентрация напряжений около отверстий*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва.

Трифонова В. 2011. Изследване на напрегнатото състояние в дебелостенна тръба по метода на Власов, *Международна научна конференция УНИТЕХ'11 – Габрово*, Сборник от доклади, том II, ноември 2011.

Приложение 1

Коефициентите от уравнения (4) имат вида:

$$a_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \frac{1}{r}\varphi_1^2(r)dr\,;$$

$$a_{11} = \frac{\delta}{h_1^2}\left[d^2 \ln f - h_1 r_o - \frac{3}{2}h_1^2\right]; \qquad (П1.1)$$

$$a_{12} = a_{21} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \frac{1}{r}\varphi_1(r)\varphi_2(r)dr\,;$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{\delta}{h_1^2}\left[dr_o \ln f - 1{,}5h_1(2r_o + h_1)\right]; \qquad (П1.2)$$

$$a_{22} = \int_{r_o}^{r_o+h_1} \frac{1}{r}\varphi_2^2(r)dr + \int_{r_0+h_1}^{r_o+h_1+h_2} \frac{1}{r}\varphi_2^2(r)dr\,;$$

$$a_{22} = \delta\left(\frac{a_{221}}{h_1^2} + \frac{a_{222}}{h_2^2}\right); \qquad (П1.3)$$

$$b_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h_1} r\left[\varphi_1'(r)\right]^2 dr\,;$$

$$b_{11} = \delta\left(\frac{r_o}{h_1} + \frac{1}{2}\right) \quad [m]; \qquad (П1.4)$$

$$b_{12} = b_{21} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h_1} r\varphi_1'(r)\varphi_2'(r)dr\,;$$

$$b_{12} = b_{21} = -\delta\left(\frac{r_o}{h_1} + \frac{1}{2}\right) \quad [m]; \qquad (П1.5)$$

$$b_{22} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h_1} r\Phi_2^2(r)dr + \delta \int_{r_o+h_1}^{r_o+h_1+h_2} r\Phi_2^2(r)dr\,; \qquad (П1.6)$$

$$b_{22} = \delta\left(\frac{r_o}{h_1} + \frac{r_o}{h_2} + \frac{h_1}{h_2} + 1\right) \quad [m]; \qquad (П1.7)$$

$$k_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_0+h_1} \varphi_1(r)\varphi_1'(r)dr = -\frac{\delta}{2} \quad [m]; \qquad (П1.8)$$

$$k_{12} = \delta \int_{r_o}^{r_0+h_1} \varphi_1(r)\varphi_2'(r)dr = \frac{\delta}{2} \quad [m]; \qquad (П1.9)$$

$$k_{21} = \delta \int_{r_o}^{r_0+h_1} \varphi_2(r)\varphi_1'(r)dr = -\frac{\delta}{2} \quad [m]; \qquad (П1.10)$$

$$k_{221} = \delta \int_{r_o}^{r_0+h_1} \varphi_2(r)\varphi_2'(r)dr\,; \quad k_{222} = \delta \int_{r_o+h_1}^{r_0+h_1+h_2} \varphi_2(r)\varphi_2'(r)dr\,;$$

$$k_{22} = k_{221} + k_{222} = 0\,, \qquad (П1.11)$$

където

$$d = r_o + h_1\,; \qquad f = \frac{r_o + h_1}{r_o}\,.$$

Константите в (П1.3) и в (П1.6) имат вида:

$$a_{221} = r_o^2 \ln f - r_o h_1 + 0{,}5h_1^2\,;$$
$$a_{222} = d_1^2 \ln f_1 - (r_o + h_1)h_2 - 1{,}5h_2^2\,; \qquad (П1.12)$$
$$\Phi_2^2(r) = \left[\varphi_2'(r)\right]^2,$$

където

$$f_1 = \frac{r_o + h_1 + h_2}{r_o + h_1}\,; \qquad d_1 = r_o + h_1 + h_2\,.$$