ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 55, Св. II, Добив и преработка на минерални суровини, 2012
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 55, Part II, Mining and Mineral processing, 2012

ДЕФОРМИРАНО СЪСТОЯНИЕ ОКОЛО КРЪГЛА ИЗРАБОТКА ПОД ДЕЙСТВИЕ НА СЪСРЕДОТОЧЕНА СИЛА

В.Трифонова – Генова

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София; violeta.trifonova@yahoo.com

РЕЗЮМЕ. За определяне на деформираното състояние в околността на кръгла изработка натоварена със съсредоточена сила е приложен вариационният метод на В.З.Власов. Решена е равнинната задача в премествания. Те са представени като произведение на две функции.
Избрани са функциите на радиалната координата. Получени са изразите на функциите на ъгловата координата на компонентите на преместването.

STRAIN STATE IN THE AREA OF A CIRCULAR MINING WORKING UNDER THE ACTION OF A CONCENTRATED FORCE

Violeta Trifonova – Genova
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia; violeta.trifonova@yahoo.com

ABSTRACT. Vlasov's variation method is applied to determine the strain state in the area of a circular mining working under the action of a concentrated force. The plane problem expressed in displacements is solved. The displacements are suggested as a product of two functions.
The function of the radial coordinate is chosen. The expression for the function of the angular coordinate is obtained.

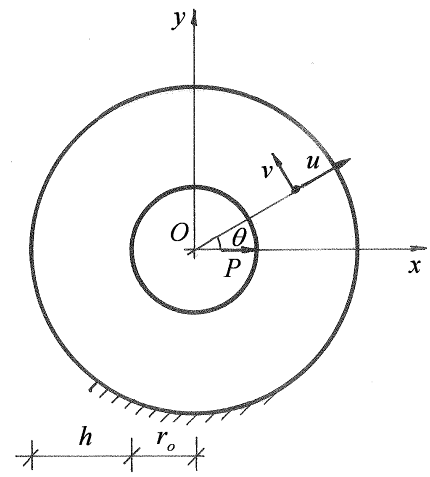
Увод

Задачата за определяне на деформираното състояние около кръгла изработка натоварена със съсредоточена сила е решена числено с метода на крайните елементи от Трифонова (1991). Известно е решението на Косева (1966) на същата задача по вариационния метод на В.З.Власов. Тук се отчитат само радиалните премествания и се пренебрегват тези в трансверзално направление.

Цел на настоящата работа е да се определи деформираното състояние около кръгла изработка под действие на съсредоточена сила при отчитане както на радиалните така и на тангиращите премествания.

Изложение

Разглежда се област около кръгла изработка с дебелината h. Натоварването по дължината на изработката е постоянно. Радиусът на кръглата изработка е r_o. Всички напречни сечения се намират при еднакви условия. Изследва се елемент между две равнинни успоредни напречни сечения на разстояние δ едно от друго (фиг.1). Материалът на масива се приема за изотропен.



Фиг.1. **Премествания в областта**

Преместванията остават в средната равнина на елемента и са функции на две независими променливи, т.е. имаме равнинно деформирано състояние. Преместванията в полярни координати съгласно избрания метод имат вида:

$$u(r,\theta)=U(\theta)\varphi(r);$$
$$v(r,\theta)=V(\theta)\psi(r). \quad (1)$$

Функциите на радиалната координата r в тези изрази са приети във вида:

$$\varphi(r)=\frac{r_o+h-r}{h};\quad \text{за } r=r_o \quad \varphi=1$$
$$\text{и за } r=r_o+h \quad \varphi=0;$$
$$\psi(r)=\frac{r-r_o}{h};\quad \text{за } r=r_o \quad \psi=0$$
$$\text{и за } r=r_o+h \quad \psi=1. \qquad (2)$$

Функциите зависещи от ъгловата координата θ се получават от система диференциални уравнения, която може да се види в работата на Косева (1966):

$$A_{11}u'' - A_{12}u + \overline{A}_{13}v' = 0;$$
$$A_{21}u' + \overline{A}_{22}v'' - \overline{A}_{23}v = 0. \qquad (3)$$

Тук константите на системата са равни на :

$$A_{11} = 0{,}5\mu_1 a_{11};\ A_{12} = b_{11} + \mu_o k_{11};$$
$$\overline{A}_{13} = 0{,}5\mu_1\overline{z} - \mu_o\overline{d}_{11};$$
$$A_{21} = 0{,}5(3-\mu_o)c_{11} + \mu_o d_{11} - 0{,}5\mu_1 t_{11};$$
$$\overline{A}_{22} = \overline{a}_{11}; \qquad (4)$$
$$\overline{A}_{23} = 0{,}5\mu_1\left(\overline{b}_{11} - \overline{s}_{11} - \overline{f}_{11} + \overline{a}_{11}\right),$$

където

$$\mu_1 = 1-\mu_o;\qquad \mu_o = \frac{\mu}{1-\mu};\qquad \overline{z} = \overline{t}_{11} - \overline{c}_{11}. \qquad (5)$$

Тук μ е коефициент на Поасон. Коефициентите в тези уравнения, изразени чрез дебелината на разглежданата област, радиуса на кръглата изработка и дебелината на изследвания елемент, са описани в приложение 1.

От съвременните методи на интегриране на системата обикновени диференциални уравнения с постоянни коефициенти най-ефективен е методът описан от Канторович и Крилов (1950). Според него системата (3) се свежда до еквивалентно диференциално уравнение. Частно решение на системата се търси във вида:

$$U(\theta) = \overline{A}_{23}F(\theta) - \overline{A}_{22}F^{II}(\theta);$$
$$V(\theta) = A_{21}F^{I}(\theta), \qquad (6)$$

където $F(\theta)$ е функция на ъгъла θ.

Тези изрази, както и техните производни, се заместват в системата (3). Второто уравнение на системата се превръща в тъждество, а първото уравнение на системата се трансформира в диференциално уравнение от четвърти ред:

$$F^{IV}(\theta) + B_1F^{II}(\theta) + B_2 = 0, \qquad (7)$$

където

$$B_1 = \frac{-1}{A_{11}\overline{A}_{22}}\left(A_{12}\overline{A}_{22} + A_{11}\overline{A}_{23} + \overline{A}_{13}\overline{A}_{23}\right);$$
$$B_2 = \frac{A_{12}\overline{A}_{23}}{A_{11}\overline{A}_{22}}. \qquad (8)$$

Уравнение (7) напълно описва напрегнатото и деформирано състояние на средата.

Характеристичното уравнение на диференциално уравнение (6) е

$$\lambda^4 + B_1\lambda^2 + B_2 = 0. \qquad (9)$$

Всичките четири корена на това уравнение са:

$$\lambda_{1,3} = \sqrt{0{,}5\left(-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4B_2}\right)};\ \lambda_{2,4} = -\lambda_{1,3}. \qquad (10)$$

Ако $B_1 > 0$ и $B_2 < 0$ се оказва се, че $B_{12} = \sqrt{B_1^2 - 4B_2} > B_1$, поради което λ_1 и λ_2 са реални и спрегнати, а λ_3 и λ_4 са имагинерни корени и могат да се запишат във вида:

$$\lambda_1 = \overline{\lambda}_1;\ \lambda_2 = -\lambda_1;\ \lambda_3 = \overline{\lambda}_2 i;\ \lambda_4 = -\lambda_3, \qquad (11)$$

където

$$\overline{\lambda}_{1,2} = \sqrt{\left|0{,}5\left(-B_1 \pm B_{12}\right)\right|}. \qquad (12)$$

Общото решение на уравнение (7) приема вида:

$$F(\theta) = C_1e_1 + C_2e_2 + C_3c + C_4s, \qquad (13)$$

където

$$e_1 = \exp\left(\overline{\lambda}_1\theta\right);\ e_2 = \exp\left(-\overline{\lambda}_1\theta\right);$$
$$c = \cos\left(\overline{\lambda}_2\theta\right);\ s = \sin\left(\overline{\lambda}_2\theta\right). \qquad (14)$$

Тази функция заедно с производните и се заместват в уравнение (6) и за функциите, зависещи от ъгловата коодината, се получават:

$$U(\theta) = G_{12}I_1 + I_2G_{34};$$
$$V(\theta) = A_{21}\left(\overline{\lambda}_1G_{21} + \overline{\lambda}_2G_{43}\right), \qquad (15)$$

където

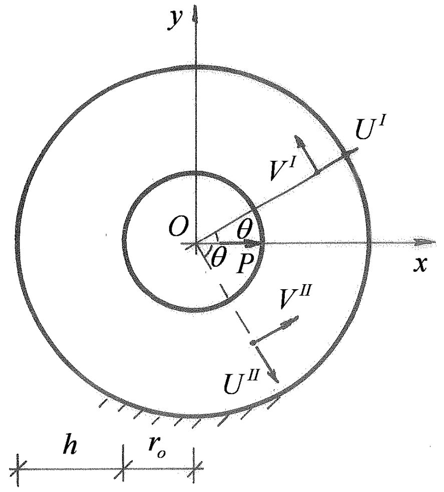
$$G_{12} = C_1e_1 + C_2e_2;\qquad G_{34} = C_3c - C_4s;$$
$$G_{21} = C_1e_1 - C_2e_2;\qquad G_{43} = -C_3s + C_4c; \qquad (16)$$

$$I_1 = A_{23} - \overline{\lambda}_1^2 A_{22}\,; \qquad I_2 = A_{23} + A_{22}\overline{\lambda}_2^2\,.$$

Компонентите на вектора на преместването нагоре и надолу от мястото на прилагане на силата с точност до константа са:

$$\begin{aligned} &U^I(\theta) = I_1C_1e_1 + I_2C_3c\,; && \text{за } 0 \le \theta \le \pi/2\,;\\ &V^I(\theta) = A_{21}\left(\overline{\lambda}_1C_1e_1 - \overline{\lambda}_2C_3s\right);\\ &U^{II}(\theta) = I_1C_2e_2 + I_2C_4s\,; && \text{за } -\pi/2 \le \theta \le 0\,;\\ &V^{II}(\theta) = A_{21}\left(-\overline{\lambda}_1C_2e_2 + \overline{\lambda}_2C_4s\right). && (17)\end{aligned}$$

Горните индекси отговарят на двете разглеждани подобласти (фиг2).



Фиг. 2. **Обобщените премествания за области** I **и** II

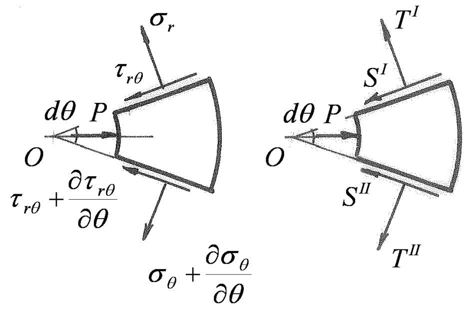
За определяне на неизвестните константи в тези изрази е необходимо да се разгледат граничните условия, които се представят в обобщени премествания и усилия. Ако се разгледа физическата страна на поставената задача се забелязва, че радиалните премествания затихват в местата отдалечени от натоварването, т. е.

$$U^I(\pi/2) = 0\,;\quad U^{II}(\pi/2) = 0\,. \qquad (18)$$

Другите две уравнения за определяне на константите се получават от геометричните гранични условия (фиг.3):

$$\begin{aligned} &V^I(0) = V^{II}(0)\,; \qquad (19)\\ &S^I(0) + S^{II}(0) = P\,, \end{aligned}$$

където $S^I(\theta)$ и $S^{II}(\theta)$ са обобщените надлъжни сили в двете подобласти.



Фиг. 3. **Напрежения и обобщени сили**

Тези сили се разглеждат като вътрешни и характеризират работата на всички сили в сечение $x = 0$, вследствие съответното виртуално преместване. За тангенциалното напрежение $\tau_{r\theta}$ това преместване е $\overline{u} = 1.\varphi$. Обобщената сила се определя от следния израз:

$$S(r,\theta) = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \tau_{r\theta}\varphi(r)dr\,. \qquad (20)$$

След заместване на изразите за преместването (14) в уравненията на Коши и обобщения закон на Хук, се определя тангенциалното напрежение, изразено чрез избраните функции на радиуса и полярния ъгъл:

$$\tau_{r\theta} = E_1\begin{bmatrix} \dfrac{U'(\theta)}{r}\varphi(r) + V(\theta)\psi'(r) \\ -\dfrac{V(\theta)}{r}\varphi(r) \end{bmatrix}. \qquad (21)$$

Коефициентът пред скобите има вида:

$$E_1 = \frac{E}{2(1-\mu^2)(1+\mu_o)}\,, \qquad (22)$$

където E е модул на еластичността.

Функциите на радиалната координата $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ от уравнение (2) и производните им се заместват последователно в (21) и (20) и се определя изразът за обобщената надлъжна сила. От него се изразяват обобщените надлъжни сили в разглежданите подобласти:

$$S^k(\theta) = \frac{E_o}{2\mu_1}\left\{a_{11}\left[U^k(\theta)\right]' + zV^k(\theta)\right\} \qquad (23)$$

за $k = I, II$, където

$$E_o = \frac{E}{\left(1-\mu^2\right)};\; z = t_{11} - c_{11}. \tag{24}$$

Тези функции на обобщените сили, както и преместванията от уравнение (17) се заместват в уравнения (18) и (19). Получава се система уравнения, от които се намират константите в изразите за компонентите на вектора на преместването:

$$C_1 = D_1; \qquad C_2 = D_1 D_2;$$
$$C_3 = -D_1 D_3; \quad C_4 = -D_1 D_4, \tag{25}$$

където

$$D_1 = \frac{2\left(1-\mu_o\right)P}{E_o \bar{\lambda}_1 I_1 D_5};$$
$$D_2 = -\frac{\bar{\lambda}_1 I_2}{\bar{\lambda}_1 I_2 K_1 + \bar{\lambda}_2 I_1 E_2}; \tag{26}$$
$$D_3 = \frac{I_1 E_1}{I_2 K_2}; \quad D_4 = \frac{I_1 E_2}{I_2 K_1};$$
$$D_5 = l_{12} I_1 a_{11} K_1 + A_{21} z\left(t_{11} - c_{11}\right)\bar{\lambda}_2 k;$$
$$l_{12} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2; \quad k = E_2 - K_1;$$
$$E_1 = \exp\left(\bar{\lambda}_1 \pi / 2\right); \qquad E_2 = \exp\left(-\bar{\lambda}_1 \pi / 2\right);$$
$$K_1 = \sin\left(\bar{\lambda}_2 \pi / 2\right); \qquad K_2 = \cos\left(\bar{\lambda}_2 \pi / 2\right),$$

а коефициентите I_1 и I_2 се определят от (16).

След заместване на (25) в уравнения (17) компонентите на преместването в разглежданата област приемат вида:

за $0 \le \theta \le \pi/2$;

$$U^I(\theta) = D_1\left(I_1 e_1 - I_2 D_3 c\right);$$
$$V^I(\theta) = A_{21} D_1\left[\bar{\lambda}_1 e_1 - \bar{\lambda}_2 D_3 s\right]; \tag{27}$$

за $-\pi/2 \le \theta \le 0$;

$$U^{II}(\theta) = D_2\left[I_1 e_2 - I_2 D_4 s\right];$$
$$V^{II}(\theta) = A_{21} D_2 D_1\left[\bar{\lambda}_1 e_2 - \bar{\lambda}_2 D_4 c\right].$$

Следващата работа е да се определят деформациите. Тук трябва да се използват уравненията на Коши при равнинна деформация (Трифонова, 2011).

Заключение

По метода на В. Власов е получено деформираното състояние около кръгла изработка, натоварена с радиално съсредоточена сила. То е пълно, защото се отчитат двете компоненти на вектора на преместването. Поради това описания модел на средата е по-съвършен и прилагането му подобрява точността на решението.

Литература

Канторович Л.В., Крилов В.И. 1950. *Приближенные методы высшего анализа*.

Косева Ч. 1966. Върху приложението на вариационния метод на В.З.Власов към една задача от механика на скалите, *Годишник на ВТУЗ*, „Приложна механика”, том I, книга 2.

Трифонова В. 1991. Изчисляване на многолоен крепеж на вертикална щахта в напластен масив чрез МКЕ, *Годишник на МГУ*, т.XXXVII, св.II.

Трифонова В. 2011. Изследване на напрегнатото състояние в дебелостенна тръба по метода на Власов, *Международна научна конференция УНИТЕХ’11 – Габрово*, Сборник от доклади, том II, ноември 2011.

Приложение №1

Коефициентите от уравнения (4) и (5) имат вида:

$$a_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \frac{1}{r}\varphi^2(r)dr;$$

$$a_{11} = \frac{\delta}{h^2}\left[d^2 \ln f - h r_o - \frac{3}{2}h^2\right]; \tag{П1.1}$$

$$b_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} r\varphi'(r)dr = \delta\left(-\frac{r_o}{h} + \frac{1}{2}\right) \quad [m]; \tag{П1.2}$$

$$k_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_0+h} \varphi(r)\varphi'(r)dr = -\frac{\delta}{2} \quad [m]; \tag{П1.3}$$

$$c_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \frac{1}{r}\varphi(r)\psi(r)dr;$$

$$c_{11} = \frac{\delta}{h^2}\left[r_o d \ln f + h r_o + 0{,}5h^2\right]; \tag{П1.4}$$

$$t_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \varphi(r)\psi'(r)dr = \frac{\delta}{2} \quad [m]; \tag{П1.5}$$

$$d_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \varphi'(r)\psi(r)dr = \frac{\delta}{2} \quad [m]; \tag{П1.6}$$

$$\bar{a}_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} \frac{1}{r}\psi^2(r)dr;$$

$$\bar{a}_{11} = \frac{\delta}{h^2}\left[r_o^2 \ln f - r_o h - 0{,}5h^2\right]; \tag{П1.7}$$

$$\bar{b}_{11} = \delta \int_{r_o}^{r_o+h} r\left[\psi'(r)\right]^2 dr;$$

$$\bar{b}_{11} = \delta\left(\frac{r_o}{h} + \frac{1}{h}\right) \quad [m]; \qquad (П1.8)$$

$$\bar{t}_{11} = t_{11};\ \bar{c}_{11} = c_{11};\ \bar{d}_{11} = d_{11}; \qquad (П1.9)$$

$$\bar{s}_{11} = \delta\int_{r_o}^{r_o+h}\psi(r)\psi'(r)dr = \frac{\delta}{2} \quad [m]; \qquad (П1.10)$$

$$\bar{f}_{11} = \delta\int_{r_o}^{r_o+h}\psi(r)\psi'(r)dr = \frac{\delta}{2} \quad [m], \qquad (П1.11)$$

където

$$d = r_o + h; \qquad f = \frac{r_o + h}{r}. \qquad (П1.12)$$