50 години Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски"
Годишник, том 46, свитък III, Механизация, електрификация и автоматизация на мините, София, 2003, стр.

СТАЦИОНАРНО ТЕЧЕНИЕ НА ВИЗКОЗЕН ФЛУИД В ТРЪБА С КРАЙНА ДЪЛЖИНА

Веселина Димова

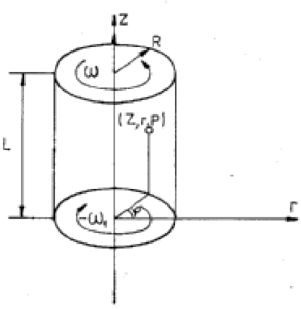
Университет Утрехт
Департамент по Приложна геофизика

Петко Лалов

Минно-Геоложки Университет "Св. Иван Рилски
1700, София, България

РЕЗЮМЕ
Разглежда се краен, запълнен с вискозен флуид цилиндър, чиито горна и долна основа се въртят с различни и противоположни посоки ъглови скорости. Прилагайки метода на Фурие върху основните уравнения на хидромеханиката е получено полето на скорости на флуида.

Разглеждаме краен цилиндър с радиус R и дължина l, който е напълнен с визкозен флуид и чиято горна и долна основа се въртят в противоположни посоки с ъглови скорости, съответно ω и –ω_1 (фиг.1). Поставяме си за цел да определим полето на скоростите.



Фигура 1

Основните уравнения на хидромеханиката на визкозните флуиди в този случай се свеждат до [1]

$$\rho\frac{v_\varphi^2}{r}=\frac{\partial}{\partial r}(p+\Omega)=0 \qquad (1a)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(p+\Omega)=0 \qquad (1c)$$

където p е налягане (скалар), Ω-потенциал на обемните сили, ρ-коефициент на визкозност на флуида, v_φ-тангираща скорост.

Основната задача се свежда до търсенето на решението на уравнението (1b) при следните гранични условия

$$\begin{aligned} &v_\varphi(0,z)=v_\varphi(R,z)=0 &&,0\le z\le l\\ &v_\varphi(r,0)=-\omega_1 r &&,0\le r\le R \qquad (2)\\ &v_\varphi(r,l)=\omega r &&,0\le r\le R \end{aligned}$$

където v_φ е тангиращата скорост.

Като приложим метода на Фурие, т.е. като положим

$$v_\varphi(r,z)=f(R).g(z) \qquad (3)$$

от (3) и (1b) получаваме

$$\frac{r^2\dfrac{d^2f}{dr^2}+r\dfrac{df}{dr}-f}{fr^2}=\frac{\dfrac{d^2g}{dz^2}}{g}=\lambda \quad ,\ (-\lambda=a^2) \quad (4)$$

или

$$\begin{aligned} &\frac{d^2g}{dz^2}+\lambda g=0\\ &\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\left(-\lambda-\frac{1}{r^2}\right)f=0 \qquad (5) \end{aligned}$$

откъдето

$$\begin{aligned} &g(z)=C_1 shaz+C_2 chaz\\ &f(r)=AJ_1(ar)+BY_1(ar) \qquad (6) \end{aligned}$$

където J_1 е цилиндрична функция (Bessel функция) от първи род и първи ред, Y_1- цилиндрична функция (Weber функция) от втори род и първи ред.

От (6) и от първото условие (2) следва, че функцията $v_\varphi(r,z)$ можем да търсим във вида

$$v_\varphi(r,z)=\sum_{i=1}^{\infty}(A_i sha_i z+B_i cha_i z)J_1(a_i z) \qquad (7)$$

където $a_i = \dfrac{\xi_i}{R}$, ξ_i – нулите на $J_1(r)$, i=1,2,3,….., а от последните две условия (2) получаваме системата

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i J_1(a_i r) = -\omega_1 r \qquad (8a)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (A_i sha_i l + B_i cha_i l) J_1(a_i r) = \omega r \qquad (8b)$$

Като положим $r = Rx\,(0 \le x \le l,\ 0 \le r \le R)$ (8а) приема вида

$$-\omega_1 Rx = \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_1(\xi_i x),$$

а след като умножим това равенство по $xJ_1(\xi_k x)$ и интегрираме в граници от 0 до 1 получаваме

$$\omega_1 R\int_0^1 x^2 J_1(\xi_k x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \int_0^1 xJ_1(\xi_k x)dx$$

и окончателно

$$B_k = -\frac{2\omega_1}{a_k J_2(\xi_k)}, \qquad k = 1,2,3,........$$

където J_2 е цилиндрична функция от първи род и втори ред.

Съвършено аналогично, като означим

$$\beta_i = A_i sha_i l + B_i cha_i l$$

получаваме

$$\beta_k = \frac{2\omega}{a_k J_2(\xi_k)}, \qquad k = 1,2,3,....$$

и така достигаме до системата

$$\left.\begin{aligned} A_k sha_k l + B_k cha_k l &= \frac{2\omega}{a_k J_2(\xi_k)} \\ B_k &= -\frac{2\omega_1}{a_k J_2(\xi_k)} \end{aligned}\right. \qquad (9)$$

чието решение води към

$$A_k = \frac{2(\omega_1 cha_k l + \omega}{a_k J_2(\xi_k) sha_k l}$$

$$B_k = -\frac{2\omega_1}{a_k J_2(\xi_k)}$$

и окончателно написваме

$$v_\varphi(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\omega_1 sha_k(z-l) + 2\omega\, sha_k z}{a_k J_2(\xi_k) sha_k l} J_1(a_k r) \qquad (10)$$

Равенството (10) е решение на поставената основна задача. Забелязва се, че при $|\omega| = |\omega_1|$ повърхнината z=l/2 остава неподвижна. Числените експерименти показват, че при $|\omega| \ne |\omega_1|$ полето на тангентиращите скорости $v_\varphi = v_\varphi(r,z)$ има турболентен вид.

Нека отбележим, че решената тук задача възниква и в глобалните науки за Земята.

ЛИТЕРАТУРА

Litwiniszyn J-A certain Problem of stationary laminary Flow of a Viscous Liquid , Bull. Polon.Sci. Letters , v.1 № 4, 1951

Препоръчана за публикуване от катедра “Автоматизация на минното производство” на МЕМФ

STATIONARY STREAM OF VISCOSE FLUID IN A PIPE WITH FINITE LENGTH

Veselina Dimova
Utrecht University
Department of Applied Geophysics

Petko Lalov
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski"
1700, Sofia, Bulgaria

ABSTRACT
A finite length pipe, filled with viscose fluid, with bases rotating in opposite directions with constant angle velocities, dragging the fluid, is looked over. The velocity field is defined.

Finite cylinder with radius R and length l, filled with viscose fluid which has up and down bases rotating in opposite directions with angle velocities of ω and $-\omega_1$ respectively (see Fig.1), is considered. Defining the velocity field is the target of the present paper.

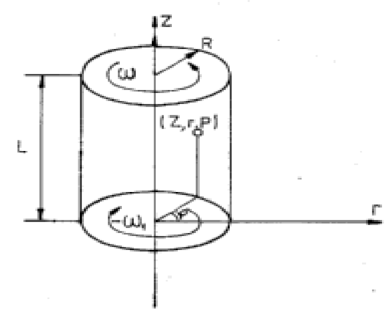


Figure 1

Basic equations of hydromechanics of viscose fluids in this case are set to [1]

$$\rho\frac{v_\varphi^2}{r}=\frac{\partial}{\partial r}(p+\Omega)=0 \qquad (1a)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(p+\Omega)=0 \qquad (1c)$$

where p is the pressure (scalar), Ω is the potential of volume powers, ρ is the coefficient of viscosity of the fluid and v_φ is the tangent velocity.

The basic problem is brought to finding the solution of the equation (1b) with the following limit conditions:

$$\begin{aligned} &v_\varphi(0,z)=v_\varphi(R,z)=0 && ,0\le z\le l \\ &v_\varphi(r,0)=-\omega_1 r && ,0\le r\le R \qquad (2)\\ &v_\varphi(r,l)=\omega r && ,0\le r\le R \end{aligned}$$

where v_φ is the tangent velocity.

Applying the method of Fourier, i.e putting

$$v_\varphi(r,z)=f(R).g(z) \qquad (3)$$

from (3) and (1b) is obtained

$$\frac{r^2\frac{d^2f}{dr^2}+r\frac{df}{dr}-f}{fr^2}=\frac{\frac{d^2g}{dz^2}}{g}=\lambda \;,\; (-\lambda=a^2) \qquad (4)$$

or

$$\frac{d^2g}{dz^2}+\lambda g=0$$

$$\frac{d^2f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}+\left(-\lambda-\frac{1}{r^2}\right)f=0 \qquad (5)$$

where

$$g(z)=C_1 shaz+C_2 chaz$$

$$f(r)=AJ_1(ar)+BY_1(ar) \qquad (6)$$

where J_1 is a cylindric function (Bessel функция) of first type and first row, Y_1- cylindric function (Weber function) of second type and first row.

From (6) and from the first condition (2) it comes that the function $v_\varphi(r,z)$ can be sought in the following appearance

$$v_\varphi(r,z)=\sum_{i=1}^{\infty}(A_i sha_i z+B_i cha_i z)J_1(a_i z) \qquad (7)$$

where $a_i=\dfrac{\xi_i}{R}$, ξ_i – zeros of $J_1(r)$, i=1,2,3,….., and from the last two conditions (2) is obtained the following system

$$\sum_{i=1}^{\infty}B_i J_1(a_i r)=-\omega_1 r \qquad (8a)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}(A_i sha_i l+B_i cha_i l)J_1(a_i r)=\omega r \qquad (8b)$$

Putting $r=Rx(0\le x\le l,\ 0\le r\le R)$ (8a) takes the appearance

$$-\omega_1 Rx = \sum_{i=1}^{\infty} B_i J_1(\xi_i x) \,,$$

then multiplying this equation to $xJ_1(\xi_k x)$ and integrating it in the limits from 0 to 1 is obtained

$$\omega_1 R\int_0^1 x^2 J_1(\xi_k x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \int_0^1 xJ_1(\xi_k x)dx$$

and in finite

$$B_k = -\frac{2\omega_1}{a_k J_2(\xi_k)}, \qquad k = 1,2,3,........$$

where J_2 is a cylindric function of first type and second row.

In absolutely the same way, designating

$$\beta_i = A_i sha_i l + B_i cha_i l$$

is obtained

$$\beta_k = \frac{2\omega}{a_k J_2(\xi_k)}, \qquad k = 1,2,3,....$$

so getting to the system

$$A_k sha_k l + B_k cha_k l = \frac{2\omega}{a_k J_2(\xi_k)}$$

$$B_k = -\frac{2\omega_1}{a_k J_2(\xi_k)} \qquad (9)$$

which has the solution leading to

$$A_k = \frac{2(\omega_1 cha_k l + \omega}{a_k J_2(\xi_k) sha_k l}$$

$$B_k = -\frac{2\omega_1}{a_k J_2(\xi_k)}$$

and finally is written

$$v_\varphi(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\omega_1 sha_k(z-l) + 2\omega\, sha_k z}{a_k J_2(\xi_k) sha_k l} J_1(a_k r) \quad (10)$$

Equation (10) is a solution of the basic problem just defined. It becomes evident that if $|\omega| = |\omega_1|$ area z=l/2 remains unmovable. The numeric experiments show that if $|\omega| \neq |\omega_1|$ the field of the tangent velocities $v_\varphi = v_\varphi(r,z)$ has the appearance turbulence.

It should be stressed that the problem just solved arises in global Earth sciences too.

REFERENCES

Litwiniszyn J-A certain Problem of stationary laminary Flow of a Viscous Liquid , Bull. Polon.Sci. Letters , v.1 № 4, 1951

Recommended for publication by Department of Mine Automation, Faculty of Mining Electromechanics