50 години Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски"
Годишник, том 46, свитък III, Механизация, електрификация и автоматизация на мините, София, 2003, стр.

НЕЛИНЕЙНИ ВЕРИГИ С ПОЛИНОМНИ РЕЗИСТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ

Васил Г. Ангелов
Минно-геоложки университет
"Св. Иван Рилски"
София,1700, България
E-mail: angelov@staff.mgu.bg

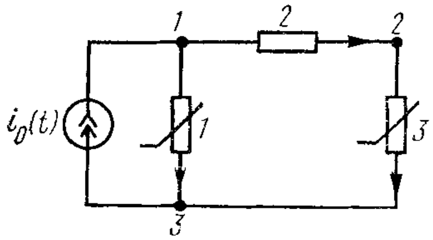
Дафинка Ц. Ангелова
Висше строително училище
"Л. Каравелов"
София 1373, България
E-mail: angelova@vsu.bg

Любомир П. Георгиев
Минно-геоложки университет
"Св. Иван Рилски"
София,1700, България
E-mail:lubotal@abv.bg

РЕЗЮМЕ:
Получени са условия, гарантиращи съществуване и единственост на решението на един клас функционални уравнения. Резултатът е приложен към уравненията на равновесие на паралелно-последователна електрическа верига, съдържаща резистивни елементи.

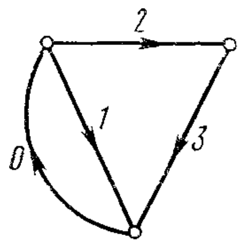
ВЪВЕДЕНИЕ

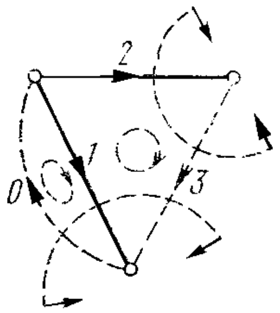
Нелинейните вериги и прибори намират широко приложение в електротехниката, радиотехниката, автоматиката и др. области. Работата на голям брой много важни устройства е основана на свойства и явления, присъщи само на нелинейните вериги. Явленията в нелинейните устройства са много сложни и за разлика от линейните за тях отсъстват общи методи за анализ. Дори за вериги, съдържащи само един вид елементи (резистивни, индуктивни и капацитивни), няма общи методи. Като правило, всяка конкретна задача на нелинейна верига, може да се решава с помощта на различни методи. Тук ще разгледаме нелинейни вериги с резистивни елементи, чиито $V-I$ характеристики са от полиномен тип [1], [2]. С принципа за неподвижна точка се показва съществуване и единственост на ограничено решение на полученото функционално уравнение.



Фигура 1

За най-простата паралелно-последователна верига, захранена от източник на ток $i_0(t)$, представена на фиг.1 (вж. [1]), е прието вторият клон да бъде линеен, а първият и третият – нелинейни. Графът на веригата (фиг.2) има 4 клона (ребра) и 3 възела (съединения), като броят на независимите съединения е 2 и броят на независимите контури е също 2. За получаване на независимите уравнения на съединенията, свързващи променливите клони на веригата, е избран дървовиден граф, представен на фиг. 3, за който е отчетен видът на елементите и формата на задаване на характеристиките на резистивните елементи (Източникът на ток и ребро 3, представени с прекъснати линии, са клони на съединение, ребро 2 – клон на дървото, а ребро 1, съответстващо на нелинеен елемент - недостигащ клон на дървото). Броят на променливите в уравненията на съединенията е равен на удвоения брой на ребрата, като една от тези величини (токът на източника) е дадена функция (на времето) $i_0(t)$.





Фигура 2Фигура 3

Уравненията на равновесие на токовете във възлите 1 и 2 (по номерата на клоните на дървото) са $-i_0+i_1+i_3=0,\ i_2-i_3=0$, уравненията на равновесие на напреженията в контурите 0 и 3 (по номерата на клоните на съединение) са $-u_0+u_1=0,$ $-u_1+u_2+u_3=0$. От уравненията на съединенията следва, че напрежението на източника е равно на напрежението на първия елемент, а токът на втория елемент е равен на тока на третия елемент, т.е. $u_0=u_1, i_2=i_3$. Така получаваме системата от уравнения

$$\left|\begin{array}{l} i_1 = A_1 u_1^{\frac{1}{3}} \\ u_2 = A_2 i_2 \\ u_3 = A_3 i_3 + A_4 i_3^3 \\ i_1 + i_3 = i_0 \\ i_2 = i_3 \\ u_1 = u_0 \\ u_1 = u_2 + u_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} u_1 = (A_2+A_3)i_3 + A_4 i_3^3 \\ A_1 u_1^{\frac{1}{3}} + i_3 = i_0 \\ -u_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3 + A_4 i_3^3 = 0 \\ -u_1 + A_2 i_3 + A_3 i_3 + A_4 i_3^3 = 0 \\ A_1[(A_2+A_3)i_3 + A_4 i_3^3]^{\frac{1}{3}} + i_3 = i_0 \end{array}\right. \quad (1)$$

Решаването на тази система може да се сведе до решаване на едно нелинейно функционално уравнение за някоя от неизвестните функции. След подходящи преобразования (вж.[1]) се получава уравнението

$$i_3(t) = i_0(t) - A_1[(A_2 + A_3)i_3(t) + A_4 i_3^3(t)]^{\frac{1}{3}}, \qquad (2)$$

където $i_0(t)$ е дадена функция, а $i_3(t)$ е неизвестната функция. Дясната страна на (2) поражда оператор Φ, който може да бъде дефиниран по следния начин:

$$(\Phi i)(t) := i_0(t) - A_1[(A_2 + A_3)i(t) + A_4 i^3(t)]^{\frac{1}{3}}.$$

Нека $C[0,\infty)$ е пространството на ограничените непрекъснати функции върху интервала $[0,\infty)$. То се превръща в метрично пространство, ако се въведе разстояние (метрика) между всеки два негови елемента (функции) по следния начин:

$$\rho(i,\bar{i}) = \sup_{t\in[0,\infty)} \left|i(t) - \bar{i}(t)\right|.$$

За да приложим теоремата за неподвижна точка на свиващи изображения [3], трябва да намерим частната производна по i на дясната страна на (2), т.е. на функцията

$$f(t,i) = i_0(t) - A_1[(A_2 + A_3)i + A_4 i^3]^{\frac{1}{3}}$$

и да я оценим отгоре. Тъй като

$$\frac{\partial f}{\partial i} = -\frac{A_1}{3}[(A_2 + A_3)i + A_4 i^3]^{-\frac{2}{3}}(A_2 + A_3 + 3A_4 i^2) =$$

$$= -\frac{A_1(A_2 + A_3 + 3A_4 i^2)}{[(A_2 + A_3)i + A_4 i^3]^{\frac{2}{3}}}, \qquad (3)$$

то трябва да намерим константа $M > 0$, такава че $\left|\frac{\partial f}{\partial i}\right| \le M$ за всяко $t \in [0,\infty)$ и всяка функция $i(t) \in C[0,\infty)$. Тъй като i фигурира в знаменателя на (3), то в случая на променлив ток знаменателят може да се анулира за някои стойности на t и тогава такава константа M не съществува. Тази трудност може да се преодолее най-лесно, като системата (1) се разреши спрямо някое друго неизвестно, например i_2. Това става по следния начин: от първото уравнение на (1) изразяваме $u_1 = \frac{i_1^3}{A_1^3}$.

Заместване с този израз и изразите за u_2 и u_3 (от второто и третото уравнение на (1)) в последното уравнение на (1) и получаваме

$$\frac{i_1^3}{A_1^3} = A_2 i_2 + A_3 i_3 + A_4 i_3^3.$$

От петото уравнение на (1) имаме $i_3 = i_2$, а от четвъртото получаваме $i_1 = i_0 - i_2$ и тогава

$$\frac{(i_0 - i_2)^3}{A_1^3} = A_2 i_2 + A_3 i_2 + A_4 i_2^3 \Rightarrow i_2 = \frac{(i_0 - i_2)^3 - A_1^3 A_4 i_2^3}{(A_2 + A_3)A_1^3}.$$

Последното уравнение може да се запише във вида

$$i(t) = \frac{1}{(A_2 + A_3)A_1^3}[i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i(t) + 3i_0(t)i^2(t) - \qquad (4)$$
$$- (1 + A_1^3 A_4)i^3(t)]$$

като вместо $i_2(t)$ пишем $i(t)$. Напомняме, че A_i (i =1,2,3,4) са известни константи, а $i_0(t)$ е дадена функция (на източника на ток). От физически съображения може да се предполага, че A_1>0, A_2>0 и $|i_0(t)| \le \bar{i}_0$, където $\bar{i}_0$ е една горна граница на $i_0(t)$ при $t \ge 0$.

ОСНОВЕН РЕЗУЛТАТ

Решението на уравнение (4) ще намерим с помощта на принципа на Банах за неподвижна точка в пространството $C[0,\infty)$. За целта разглеждаме множеството

$$M = \{i(t) \in C[0,\infty) : |i(t)| \le I_0\} \subset C[0,\infty),$$

където I_0>0 е някаква константа. Това е естествено ограничение, тъй като токовете в една верига не могат да бъдат безкрайно големи. Ще предполагаме, че $I_0 = \bar{i}_0$.

Дясната страна на (4) поражда оператор T, който може да бъде дефиниран по следния начин:

$$(Ti)(t) := \frac{1}{(A_2 + A_3)A_1^3}[i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i(t) + 3i_0(t)i^2(t) -$$
$$- (1 + A_1^3 A_4)i^3(t)].$$

Най-напред ще покажем, че операторът T изобразява множеството M в себе си. С други думи, ако функцията $i(.) \in M$, то и $(Ti)(.) \in M$, т.е. $T : M \to M$.

Наистина, от дефиницията на T е ясно,че $(Ti)(t) \in C[0,\infty)$. Лесно се вижда, че

$$|(Ti)(t)| \le \frac{1}{|A_2 + A_3|A_1^3}[\bar{i}_0^3 + 3\bar{i}_0^2 I_0 + 3\bar{i}_0 I_0^2 +$$
$$+ |1 + A_1^3 A_4| I_0^3] = \frac{(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^3}{|A_2 + A_3|A_1^3}$$

и ако

$$\frac{(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^3}{|A_2 + A_3|A_1^3} \le I_0, \qquad (5)$$

то $|(Ti)(t)| \le I_0$. Тъй като $|A_2 + A_3|A_1^3 > 0$, то неравенството (5) може да се преобразува във вида

$$(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^3 \le I_0|A_2 + A_3|A_1^3 \Rightarrow$$

$$I_0[(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^2 - |A_2 + A_3|A_1^3] \le 0 \Rightarrow$$

$$I_0\left(7 + |1 + A_1^3 A_4|\right)\left(I_0^2 - \frac{|A_2 + A_3|A_1^3}{7 + |1 + A_1^3 A_4|}\right) \le 0. \qquad (6)$$

Но $I_0\left(7 + |1 + A_1^3 A_4|\right) > 0$. Следователно неравенство (6) е в сила при

$$I_0 \le \sqrt{\frac{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3}{7 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|}}. \qquad (7)$$

И така, ако е изпълнено (7), операторът T удовлетворява условието $\left|(Ti)(t)\right| \le I_0$ за всяка функция $i(t) \in M$, т.е. операторът T изобразява множеството M в себе си.

Сега ще покажем, че операторът T е свиващ.

Наистина, нека $i(.), \bar{i}(.) \in M$ са две произволни функции. Тогава

$$\left|(Ti)(t) - (T\bar{i})(t)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3}[3I_0^2\left|i(t) - \bar{i}(t)\right| + 3I_0.2I_0\left|i(t) - \bar{i}(t)\right| + 3\left|1 + A_1^3 A_4\right|I_0^2\left|i(t) - \bar{i}(t)\right|] \le$$

$$\le \frac{9 + 3\left|1 + A_1^3 A_4\right|}{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3} I_0^2 \rho(i, \bar{i}).$$

Тъй като дясната страна на последното неравенство не зависи от t, то заключаваме, че

$$\rho(Ti, T\bar{i}) \le \frac{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3} I_0^2 \rho(i, \bar{i}).$$

Ако наложим условието

$$\frac{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3} I_0^2 < 1,$$

т.е. ако

$$I_0 < \sqrt{\frac{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3}{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}} \qquad (8)$$

то операторът T е свиващ при

$$k = \frac{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3} I_0^2.$$

Сравнявайки (7) и (8), веднага се вижда, че

$$\sqrt{\frac{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3}{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}} < \sqrt{\frac{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3}{7 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|}},$$

т.е. ако е изпълнено условие (8), то е в сила и условие (7).

И така условията на теоремата на Банах за неподвижна точка [3] са удовлетворени и съгласно нея съществува единствена функция $i^*(t) \in M$, за която $(Ti^*)(t) = i^*(t)$, т.е. съществува единствено решение на уравнението (4).

Всъщност доказахме следната

ТЕОРЕМА. Нека A_i (i =1,2,3,4) са известни константи, като $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ и функцията $i_0(t): [0, \infty) \to (-\infty, \infty)$ е ограничена, т.е. $\left|i_0(t)\right| \le I_0$, където I_0 е константа, която удовлетворява неравенствата

$$0 < I_0 < \sqrt{\frac{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3}{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}}.$$

Тогава уравнението (4) има единствено решение $i^*(t) \in C[0, \infty)$, за което $\left|i^*(t)\right| \le I_0$ при $t \ge 0$. Решението е равномерна граница на редицата от последователни приближения $\{i^{(n)}(t)\}$, като

$$\rho(i^*, i^{(n)}) \le \frac{1}{2^n k^{\frac{n}{2}}} \rho(i^{(1)}, i^{(0)}), \qquad (9)$$

където $i^{(0)}(t) \in C[0, \infty): \left|i^{(0)}(t)\right| \le I_0$ е произволно избрано начално приближение, а

$$k = \frac{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3} I_0^2.$$

*ПРИМЕР***.** Ако изберем $A_1 = 1, A_2 = 5, A_3 = -\frac{3}{2}, A_3 = \frac{1}{4}$, то

$$I_0 < \sqrt{\frac{\left|A_2 + A_3\right|A_1^3}{3(3 + \left|1 + A_1^3 A_4\right|)}} = \sqrt{\frac{\left|5 - \frac{3}{2}\right|}{3(3 + \left|1 + \frac{1}{4}\right|)}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{2}}{\frac{51}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{14}{51}} \approx \sqrt{2{,}7.10^{-1}} \approx 0{,}5 \qquad k = \frac{51}{56}$$

и уравнение (4) добива вида

$$i(t) = \frac{2}{7}[i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i(t) + 3i_0(t)i^2(t) - \frac{5}{4}i^3(t)], \qquad (10)$$

а връзката между $i^{(1)}(t)$ и $i^{(0)}(t)$ се дава с формулата

$$i^{(1)}(t) = \frac{2}{7}\{i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i^{(0)}(t) + 3i_0(t)[i^{(0)}(t)]^2 - \frac{5}{4}[i^{(0)}(t)]^3\}.$$

За начално приближение избираме $i^{(0)}(t) = 0$. Тогава $i^{(1)}(t) = \frac{2}{7}i_0^3(t)$. За второто приближение получаваме

$$i^{(2)}(t) = \frac{2}{7}\{i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i^{(1)}(t) + 3i_0(t)[i^{(1)}(t)]^2 - \frac{5}{4}[i^{(1)}(t)]^3\} =$$

$$= \frac{2}{7}i_0^3(t)[1 - \frac{6}{7}i_0^2(t) + \frac{12}{49}i_0^4(t) - \frac{10}{343}i_0^6(t)].$$

Разстоянието между $i^{(1)}(t)$ и $i^{(0)}(t)$ е

$$\rho(i^{(1)}, i^{(0)}) = \sup\left\{\left|\frac{2}{7}i_0^3(t) - 0\right| : t \in [0, \infty)\right\} = \frac{2}{7}I_0^3.$$

Оценката (9) добива вида

$$\rho(i^*, i^{(n)}) \le \frac{1}{2^n\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{n}{2}}} \rho(i^{(1)}, i^{(0)}).$$

Тогава

$$\rho(i^*, i^{(1)}) \le \frac{1}{2^1\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{7}I_0^3 < \frac{\left(\frac{14}{51}\right)^{\frac{3}{2}}}{7.\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\frac{1}{8}}{7.\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{51.56}} \approx 0{,}02 = 2.10^{-2},$$

$$\rho\,(i^*, i^{(2)}) \le \frac{1}{2^2 \frac{51}{56}} \frac{2}{7} I_0^3 < \frac{4}{51}.\left(\frac{14}{51}\right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{4}{51}.\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{102} \approx 0{,}01 = 10^{-2},$$

$$\rho\,(i^*, i^{(3)}) \le \frac{1}{2^3 \left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{2}{7} I_0^3 < \frac{1}{28.}\left(\frac{56}{51}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{14}{51}\right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{28}\left(\frac{56}{51}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{56}}{204\sqrt{51}} \approx 0{,}005 = 5.10^{-3}$$

и т.н.

И така, към уравнение (10) може да се приложи доказаната от нас теорема и решението (то е единствено!) да се намери по описания по-горе метод на последователните приближения. При това получихме, че още първото и второто приближение гарантират висока точност на намереното решение.

ЛИТЕРАТУРА

Матханов, П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. Москва, *“Высшая школа”*, 1977.

Бессонов Л.А. Нелинейние электрические цепи. *“Высшая школа”*, Москва, 1977.

Коллац Л. Функциональный анализ и вычислителная математика. *Мир, Москва,* 1969.

Препоръчана за публикуване от
катедра “ ”, МЕМФ

NONLINEAR CIRCUITS WITH POLYNOMIAL RESISTIVE ELEMENTS

Vasil Angelov

University of Mining and Geology
“St. Ivan Rilski ”
Sofia1700, Bulgaria
E-mail: angelov@staff.mgu.bg

Dafinka Angelova

“Lu.Karavelov”
Civil Engineering Higher School
Sofia 1373, Bulgaria
E-mail: angelova@vsu.bg

Ljubomir Georgiev

University of Mining and Geology
“St. Ivan Rilski ”
Sofia1700, Bulgaria
E-mail: lubotal@abv.bg

ABSTRACT

Sufficient conditions for existence and uniqueness of a bounded solution of a class of functional equations are obtained. The result is applied to the equilibrium equation of a parallel-consecutive nonlinear circuit with resistive elements.

INTRODUCTION

The nonlinear circuits and devices have many applications in the electric technique, radio technique, automatics and other fields of science and practice. The work of many important mechanisms is based on properties and phenomena inherent only to nonlinear circuits. The phenomena in the nonlinear devices are very complicated and different from the linear ones and not to be available usual methods for their analysis. Even for circuits, consisting of one type of elements (resistive, inductive and capacitive) usual methods can not found. As a rule, any concrete problem for a nonlinear circuit can be solved by different methods. Here we consider nonlinear circuits with resistive elements, whose $V-I$ characteristics are of polynomial type. Using the Banach fixed point principle for contraction mapping we prove an existence and uniqueness of a bounded solution of the obtained functional equation.

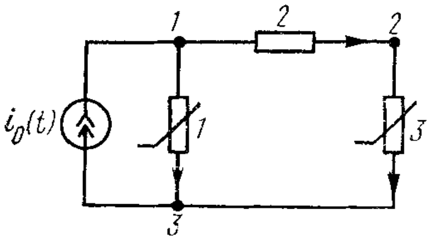
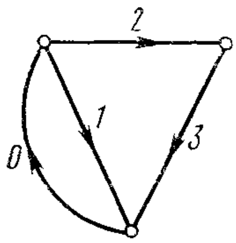
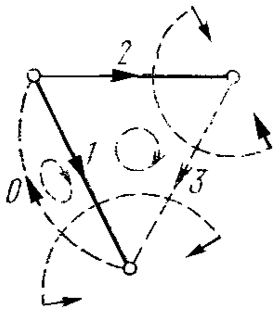


Figure 1

For the simplest parallel in series nonlinear circuit provided by current source $i_0(t)$, presented on fig.1 (see [1]), it is assumed the second branch to be linear and the first and the third ones- nonlinear. The graph of the circuit (fig.2) has 4 branches and 3 knots (junctions), so that the number of the independent junctions is 2 and the number of the independent contours is 2, too. To obtain independent equations for the junctions, connecting the variable branches of the circuit, it is used a graph in the form of a tree, presented on fig.3. It is reported the kind of the elements and the way of definition of the resistive elements characteristics. (The current spring and the third branch, presented by noncontinuos lines, are junction branches, the second branch - branch of the tree and the first branch, corresponding to the nonlinear element – the lacking branch of the tree. The number of the variables into the equations of the junctions is equal to the double number of the branches. One of these quantities (the current source) is a given function of (the time) $i_0(t)$.





Figure

2Figure 3

The equilibrium equations of the currents in the first and the second knots (on the number of tree branches) are $-i_0 + i_1 + i_3 = 0, i_2 - i_3 = 0$. The equilibrium equations of the voltages in the null and the third contours (on the number of the junction branches) are $-u_0 + u_1 = 0$, $-u_1 + u_2 + u_3 = 0$. From the equations of the junctions it follows the source voltage is equal to voltage of the first element and the current of the second element is equal to the current of the third element, i.e. $u_0 = u_1, i_2 = i_3$. So we obtain the system

$$\left|\begin{array}{l} i_1 = A_1 u_1^{\frac{1}{3}} \\ u_2 = A_2 i_2 \\ u_3 = A_3 i_3 + A_4 i_3^3 \\ i_1 + i_3 = i_0 \\ i_2 = i_3 \\ u_1 = u_0 \\ u_1 = u_2 + u_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} u_1 = (A_2 + A_3) i_3 + A_4 i_3^3 \\ A_1 u_1^{\frac{1}{3}} + i_3 = i_0 \\ -u_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3 + A_4 i_3^3 = 0 \\ -u_1 + A_2 i_3 + A_3 i_3 + A_4 i_3^3 = 0 \\ A_1[(A_2 + A_3) i_3 + A_4 i_3^3]^{\frac{1}{3}} + i_3 = i_0 \end{array}\right. \quad (1)$$

The solving of this system can be reduced to the solving of a single nonlinear functional equation for one of the unknown functions. After proper transformations (see.[1]) we get the equation

$$i_3(t) = i_0(t) - A_1[(A_2 + A_3) i_3(t) + A_4 i_3^3(t)]^{\frac{1}{3}}, \quad (2)$$

where $i_0(t)$ is a given function, and $i_3(t)$ is an unknown function. The right hand side of (2) generates an operator Φ, acting on some function space which can be defined as follows:

$$(\Phi i)(t) := i_0(t) - A_1[(A_2 + A_3) i(t) + A_4 i^3(t)]^{\frac{1}{3}}.$$

Let us denote by $C[0,\infty)$ the space of bounded continuous functions on the interval $[0,\infty)$. This space becomes a metric one, if we introduce a distance (a metric) between any two its elements (functions) in the following way:

$$\rho(i,\bar{i}) = \sup_{t\in[0,\infty)} \left|i(t) - \bar{i}(t)\right|.$$

To apply the fixed point theorem for contraction mappings [3], we must find the partial derivative in i of the right hand side of (2), i.e. of the function

$$f(t,i) = i_0(t) - A_1[(A_2 + A_3)i + A_4 i^3]^{\frac{1}{3}}$$

and to estimate it from above. Since

$$\frac{\partial f}{\partial i} = -\frac{A_1}{3}[(A_2 + A_3)i + A_4 i^3]^{-\frac{2}{3}}(A_2 + A_3 + 3A_4 i^2) =$$

$$= -\frac{A_1(A_2 + A_3 + 3A_4 i^2)}{[(A_2 + A_3)i + A_4 i^3]^{\frac{2}{3}}}, \tag{3}$$

we must find a constant $M > 0$, such that $\left|\frac{\partial f}{\partial i}\right| \le M$ for any $t\in[0,\infty)$ and any function $i(t)\in C[0,\infty)$. Since i is in the nominator of (3), and in the case of alternative current the nominator can nullify for some t then such constant M does not exist. This difficulty can overcome easily, when solve the system (1) in relation to another variable, for instance i_2 in the following way. From the first equation of (1) we express $u_1 = \frac{i_1^3}{A_1^3}$ and replace with this expression and the expressions for u_2 and u_3 (from the second and third equation of (1)) into the last equation of (1) and obtain

$$\frac{i_1^3}{A_1^3} = A_2 i_2 + A_3 i_3 + A_4 i_3^3.$$

From the fifth equation of (1) we have $i_3 = i_2$, and from the fourth one we get $i_1 = i_0 - i_2$. Then

$$\frac{(i_0 - i_2)^3}{A_1^3} = A_2 i_2 + A_3 i_2 + A_4 i_2^3 \Rightarrow i_2 = \frac{(i_0 - i_2)^3 - A_1^3 A_4 i_2^3}{(A_2 + A_3)A_1^3}.$$

We can write the last equation in the form

$$i(t) = \frac{1}{(A_2 + A_3)A_1^3}[i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i(t) + 3i_0(t)i^2(t) - (1 + A_1^3 A_4)i^3(t)]. \tag{4}$$

Here we wrote $i(t)$ instead of $i_2(t)$. We recall A_i (i =1,2,3,4) are known constants, and $i_0(t)$ is a given function (of the current source). From physical considerations we can assume $A_1 > 0, A_2 > 0$ and $|i_0(t)| \le \bar{i}_0$, where $\bar{i}_0$ is an upper bound of $i_0(t)$ and $t \ge 0$.

MAIN RESULT

By the Banach fixed point principle for contraction mapping we prove an existence and uniqueness of a bounded solution of the obtained functional equation.

For this purpose we consider the set

$$M = \{i(t)\in C[0,\infty) : |i(t)| \le I_0\} \subset C[0,\infty),$$

where $I_0>0$ is an arbitrary constant. This is a natural restriction since the currents in a circuit can not be the infinite. Further we suppose $I_0 = \bar{i}_0$.

The right hand side of (4) generates an operator T, that can be defined as follows:

$$(Ti)(t) := \frac{1}{(A_2 + A_3)A_1^3}[i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i(t) + 3i_0(t)i^2(t) - (1 + A_1^3 A_4)i^3(t)].$$

Firstly we prove the operator T maps the set M into itself, e.i. If the function $i(.)\in M$, then $(Ti)(.)\in M$ or $T: M \to M$.

Really by the definition of T it is clear $(Ti)(t)\in C[0,\infty)$.

It is easy to see that

$$|(Ti)(t)| \le \frac{1}{|A_2 + A_3|A_1^3}[\bar{i}_0^3 + 3\bar{i}_0^2 I_0 + 3\bar{i}_0 I_0^2 + |1 + A_1^3 A_4| I_0^3] = \frac{(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^3}{|A_2 + A_3|A_1^3}$$

and if

$$\frac{(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^3}{|A_2 + A_3|A_1^3} \le I_0, \tag{5}$$

then $|(Ti)(t)| \le I_0$. Since $|A_2 + A_3|A_1^3 > 0$, we can transform the inequality (5) in the form

$$(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^3 \le I_0|A_2 + A_3|A_1^3 \Rightarrow$$

$$I_0[(7 + |1 + A_1^3 A_4|)I_0^2 - |A_2 + A_3|A_1^3] \le 0 \Rightarrow$$

$$I_0\left(7 + |1 + A_1^3 A_4|\right)\left(I_0^2 - \frac{|A_2 + A_3|A_1^3}{7 + |1 + A_1^3 A_4|}\right) \le 0. \tag{6}$$

But $I_0\left(7 + |1 + A_1^3 A_4|\right) > 0$. Hence the inequality (6) is fulfilled for

$$I_0 \le \sqrt{\frac{|A_2 + A_3|A_1^3}{7 + |1 + A_1^3 A_4|}}. \tag{7}$$

So if the inequality (7) holds the operator T satisfies the condition $|(Ti)(t)| \le I_0$ for arbitrary function $i(t)\in M$, i.e. the operator T maps the set M into itself.

Now we prove the operator T is contractive.

In fact let us suppose $i(.), \bar{i}(.)\in M$ be arbitrary functions. Then

$$|(Ti)(t) - (T\bar{i})(t)| \le$$

$$\le \frac{1}{|A_2 + A_3|A_1^3}[3I_0^2|i(t) - \bar{i}(t)| + 3I_0.2I_0|i(t) - \bar{i}(t)| + 3|1 + A_1^3 A_4| I_0^2 |i(t) - \bar{i}(t)|] \le$$

$$\le \frac{9 + 3|1 + A_1^3 A_4|}{|A_2 + A_3|A_1^3} I_0^2 \rho(i,\bar{i}).$$

Since the right hand side of the last inequality does not depend on t, we conclude

$$\rho(Ti,T\bar{i}) \le \frac{3(3+|1+A_1^3A_4|)}{|A_2+A_3|A_1^3}I_0^2\rho(i,\bar{i}).$$

If we suppose

$$\frac{3(3+|1+A_1^3A_4|)}{|A_2+A_3|A_1^3}I_0^2 < 1,$$

i.e. if

$$I_0 < \sqrt{\frac{|A_2+A_3|A_1^3}{3(3+|1+A_1^3A_4|)}} \qquad (8)$$

then it follows the operator T is contractive with a constant

$$k = \frac{3(3+|1+A_1^3A_4|)}{|A_2+A_3|A_1^3}I_0^2.$$

Comparing (7) and (8), we immediately see

$$\sqrt{\frac{|A_2+A_3|A_1^3}{3(3+|1+A_1^3A_4|)}} < \sqrt{\frac{|A_2+A_3|A_1^3}{7+|1+A_1^3A_4|}},$$

i.e. condition (7) holds on condition that (8) is fulfilled.

So the conditions of the Banach fixed point theorem [3] are satisfied and according to it there exists a unique function $i^*(t)\in M$, such that $(Ti^*)(t)=i^*(t)$, i.e. there exists a unique solution of the equation (4).

As a matter of fact, we proved the following

THEOREM. Let A_i (i =1,2,3,4) be known constants and $A_1>0, A_2>0$. Let the function $i_0(t):[0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ be bounded, i.e. $|i_0(t)|\le I_0$, where I_0 is a constant satisfying the inequalities

$$0< I_0 < \sqrt{\frac{|A_2+A_3|A_1^3}{3(3+|1+A_1^3A_4|)}}.$$

Then there exists a unique solution $i^*(t)\in C[0,\infty)$ of equation (4) such that $|i^*(t)|\le I_0$ for $t\ge 0$.

The solution is a uniform limit of the sequence of consecutive approximations $\{i^{(n)}(t)\}$ and

$$\rho(i^*,i^{(n)}) \le \frac{1}{2^n k^{\frac{n}{2}}}\rho(i^{(1)},i^{(0)}), \qquad (9)$$

where $i^{(0)}(t)\in C[0,\infty):|i^{(0)}(t)|\le I_0$ is an arbitrary initial approximation and

$$k = \frac{3(3+|1+A_1^3A_4|)}{|A_2+A_3|A_1^3}I_0^2.$$

Example. Let us choose $A_1=1, A_2=5, A_3=-\frac{3}{2}, A_4=\frac{1}{4}$.

Then

$$I_0 < \sqrt{\frac{|A_2+A_3|A_1^3}{3(3+|1+A_1^3A_4|)}} = \sqrt{\frac{\left|5-\frac{3}{2}\right|}{3(3+\left|1+\frac{1}{4}\right|)}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{2}}{\frac{51}{4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{14}{51}} \approx \sqrt{2{,}7.10^{-1}} \approx 0{,}5,$$

$$k=\frac{51}{56}$$

and the equation (4) takes the form

$$i(t) = \frac{2}{7}[i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i(t) + 3i_0(t)i^2(t) - \frac{5}{4}i^3(t)]. \qquad (10)$$

The relation between $i^{(1)}(t)$ and $i^{(0)}(t)$ is given by the formula

$$i^{(1)}(t) = \frac{2}{7}\{i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i^{(0)}(t) + 3i_0(t)[i^{(0)}(t)]^2 - \frac{5}{4}[i^{(0)}(t)]^3\}.$$

For initial we take $i^{(0)}(t)=0$ and obtain

$$i^{(1)}(t) = \frac{2}{7}i_0^3(t).$$

Then the second approximation is

$$i^{(2)}(t) = \frac{2}{7}\{i_0^3(t) - 3i_0^2(t)i^{(1)}(t) + 3i_0(t)[i^{(1)}(t)]^2 - \frac{5}{4}[i^{(1)}(t)]^3\} =$$

$$= \frac{2}{7}i_0^3(t)[1-\frac{6}{7}i_0^2(t)+\frac{12}{49}i_0^4(t)-\frac{10}{343}i_0^6(t)].$$

The distance between $i^{(1)}(t)$ and $i^{(0)}(t)$ is

$$\rho(i^{(1)},i^{(0)}) = \sup\left\{\left|\frac{2}{7}i_0^3(t)-0\right| : t\in[0,\infty)\right\} = \frac{2}{7}I_0^3.$$

The estimate (9) takes the form

$$\rho(i^*,i^{(n)}) \le \frac{1}{2^n\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{n}{2}}}\rho(i^{(1)},i^{(0)}).$$

Then

$$\rho(i^*,i^{(1)}) \le \frac{1}{2^1\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{7}I_0^3 < \frac{\left(\frac{14}{51}\right)^{\frac{3}{2}}}{7.\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\frac{1}{8}}{7.\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{51.56}} \approx 0{,}02 = 2.10^{-2},$$

$$\rho(i^*,i^{(2)}) \le \frac{1}{2^2\frac{51}{56}}\frac{2}{7}I_0^3 < \frac{4}{51}\left(\frac{14}{51}\right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{4}{51}.\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{1}{102} \approx 0{,}01 = 10^{-2},$$

$$\rho(i^*, i^{(3)}) \le \frac{1}{2^3\left(\frac{51}{56}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{2}{7}I_0^3 < \frac{1}{28.}\left(\frac{56}{51}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{14}{51}\right)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{28}\left(\frac{56}{51}\right)^{\frac{3}{2}}.\frac{1}{8} =$$

$$= \frac{\sqrt{56}}{204\sqrt{51}} \approx 0{,}005 = 5.10^{-3}$$

and so on.

In such a way we can apply the above theorem to equation (10) and find the solution (it is only one!) by the step by step method. Some more we obtain a high exactitude of the solution with the first and the second approximations.

Recommended for publication by Department of Mine Automation, Faculty of Mining Electromechanics

REFERENCES

Mathanov P. N. Principles of the analysis of electrical circuits. Nonlinear circuits. *"Vishaia shkola"*, *Moscow*, 1977 (in Rusiian).

Bessonov L. A. Nonlinear electrical circuits Нелинейние электрические цепи. *"Vishaia shkola"*, *Moscow*, 1977 (in Rusiian).

Kollatz L. Functional analysis and numerical mathematics. *Mir, Moscow,* 1969 (in Rusiian).