ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 55, Св. II, Добив и преработка на минерални суровини, 2012
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 55, Part II, Mining and Mineral processing, 2012

ОПРЕДЕЛЯНЕ ПРЪТОВИТЕ УСИЛИЯ НА РАВНИННА, СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМА ФЕРМА В МАТРИЧНА ФОРМА

Асен Стоянов[1], Юлияна Яворова[2]

[1]Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София; asen_dragomirov@mail.bg
[2]Химикотехнологичен и металургичен университет, 1756 София; july@uctm.edu

РЕЗЮМЕ. Автоматизирането на инженерния труд изисква боравене с апарата на матричното смятане. В настоящата работа е представено числено решение на статично определима ставно-прътова система (ферма) в матрична форма.

DETRMINATION OF ROD FORCES IN A PLANE, STATICALLY DETERMINATED TRUSS

Asen Stoyanov[1], Juliana Javorova[2]

[1] University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia; asen_dragomirov@mail.bg
[2] University of Chemical Technology and Metallurgy, 1756 Sofia; july@uctm.edu

ABSTRACT. Automation of engineering solutions needs exploitation of the applied matrix calculation. In the present study is reported numerical solution of a plane statically determined truss in a matrix form.

Въведение

Широкото прилагане на съвременни изчислителни средства за решаване на конструкции, създаде възможност за използване на такива изчислителни схеми на съоръженията, които много по-точно отразяват тяхната действителна работата и много по-пълно отчитат едни или други особености на реалните конструкции (Симеонов, 1993).

При използване на компютър за пресмятане на съоръжение се използва матрична форма на запис за всички изходни данни при избраната изчислителна схема (Карамански 1976). Всъщност, пресмятането на съоръжението се свежда до изпълнение на ред операции от матричната алгебра.

Целта на настоящата работа е да:

- представи алгоритъма на работа при решаване на равнинна, статически определима ставнопрътова конструкция (ферма) в матрична форма;
- представи числено решение на ферма с конкретни размери и натоварване.

1) **Последователност и матричен запис на изчислителните операции**

При определяне прътовите усилия на ставно-прътова конструкция в матрична форма, обикновенно се започва с представяне на информация за геометрията на системата в матрична форма. Структурата на системата се описва с правоъгълна матрица наречена *структурна*.

Броят на редовете на структурната матрица е равен на броя на възлите, а броя на стълбовете е равен на броя на прътите на фермата. Предварително е необходимо да се извърши номерация на възлите и прътите, като номера на възела съответства на номера на реда в структурната матрица, а номера на пръта е необходимо да съответства на номера на стълба (Симеонов, 1993).

Значещи елементи на матрицата се явяват числата: "1" и "-1". Във всеки стълб отлични от нула са само два елемента:

- 1 се разполага в реда, чийто номер савпада с този на възела, определящ началото на пръта;
- -1 се намира в реда, номера на който съвпада с номера на възела определящ края на пръта.

Следваща стъпка от решението е определяне на квазиматрицата-стълб на координатите на възлите фиг.1.а:

$$\begin{aligned} \{C\} &= \{\{C_1\}\ \{C_2\} \cdots \{C_m\}\},\ \textit{където} \\ \{C_i\} &= \{x_i\ \ y_i\}\ \textit{е матрица} - \textit{стълб}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Използвайки матриците, S_C u $\{C\}$, може да се определят проекциите на прътите изграждащи системата, върху координатните оси фиг.1.а. Квазиматрицата-стълб на проекциите $\{\pi\}$, е съставен от елементи $\{\pi_i\}$, които представляват проекции на i -тия прът върху осите x и y фиг.1.а. Векторът $\{\pi\}$ се представя по следния начин:

$$\{\pi\} = -S_C^T . \{C\}, \tag{2}$$

където $\{\pi\} = \{\{\pi_1\}\ \{\pi_2\} \cdots \{\pi_m\}\}$.

Дължините на прътите на системата се определят от израза:

$$l_i = \sqrt{\{\pi_i\}^T . \{\pi_i\}}\,. \tag{3}$$

Косинус директорите се определят от зависимостта:

$$\{\alpha_i\} = \frac{1}{l_i} \cdot \{\pi_i\}. \tag{4}$$

Системата външни сили (натоварването) се задава, като квазиматрица-стълб натоварване:

$$\{P\} = \{P_1\ P_2 \cdots P_m\}, \tag{5}$$

чиито елементи се явяват матрици-стълбове $\{P_i\}$, определящи проекциите на външните сили, действащи във възелите фиг.1.б. Например в i-тия възел действа $\{P_i\} = \{P_{xi}\ P_{yi}\}$.

Уравнението за равновесие на i – тия възел (виж фиг.1.б.) в матричен вид има следният запис:

$$\{P_i\} = \sum \{Q_J\}, \tag{6}$$

където $\{Q_J\}$ е вектора на проекциите на усилията на краищата на прътите, влизащи в i – тия възел.

Векторите усилия, на краищата на прътите (виж фиг.1.в.), се представят с проекциите си върху осите:

$$\{Q_н\} = \begin{Bmatrix} X_н \\ Y_н \end{Bmatrix};\ \{Q_к\} = \begin{Bmatrix} X_к \\ Y_к \end{Bmatrix}. \tag{7}$$

Вместо с (7), $\{Q_н\}$ и $\{Q_к\}$ могат да се изразят с прътовото усилие N_J (виж фиг.1.в.), посредством матричните съотношения:

$$\{Q_н\} = -\{\alpha_J\} \cdot N_J;\ \{Q_к\} = \{\alpha_J\} \cdot N_J\,. \tag{8}$$

Уравненията за равновесие записани за всеки възел поотделно, могат да се обединят в единен матричен израз (Симеонов, 1993) с помощта на матрицата S_C

$$\{P\} = S_C \cdot \{Q\}\ , \tag{9}$$

или отчитайки съотношенията (8), матричното уравнение (9) придобива вида:

$$\{P\} = -S \cdot \{N\}\ , \tag{10}$$

където:

- $\{N\}$ - матрица-стълб, елементите на която са прътовите усилия;
- S - матрица, която се получава от структурната S_C, чрез замяна на елементите отлични от нула, с вектори $\{\alpha_J\}$, а нулевите елементи – с нулеви матрици стълбове чиито елементи са равни на нула.

2) **Числен пример**

За конкретният случай от фиг.1.г., създавайки структурната матрица и изпълнявайки последователно (1), (2), (3), (4), (5) и (10) се получава:

<u>структурна матрица за ферма от фиг.1.</u>

$$S_C = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{matrix} \right\|;$$

<u>квазиматрица-стълб от координати на възлите</u>

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} \{C_1\} \\ \{C_2\} \\ \{C_3\} \\ \{C_4\} \\ \{C_5\} \\ \{C_6\} \\ \{C_7\} \end{Bmatrix},$$

където: $\{C_1\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{C_2\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \end{Bmatrix}; \{C_3\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{C_4\} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 6 \end{Bmatrix};$

$\{C_5\} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 0 \end{Bmatrix}; \{C_6\} = \begin{Bmatrix} 15 \\ 6 \end{Bmatrix}; \{C_7\} = \begin{Bmatrix} 18 \\ 0 \end{Bmatrix};$

<u>квазиматрица-стълб от проекции на прътите</u>

$$\{\pi\} = \begin{Bmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_{11} \end{Bmatrix},$$

където:

$$\{\pi_1\}=\begin{Bmatrix}3\\6\end{Bmatrix};\{\pi_2\}=\begin{Bmatrix}6\\0\end{Bmatrix};\{\pi_3\}=\begin{Bmatrix}3\\-6\end{Bmatrix};\{\pi_4\}=\begin{Bmatrix}6\\0\end{Bmatrix};$$

$$\{\pi_5\}=\begin{Bmatrix}3\\6\end{Bmatrix};\{\pi_6\}=\begin{Bmatrix}6\\0\end{Bmatrix};\{\pi_7\}=\begin{Bmatrix}3\\-6\end{Bmatrix};\{\pi_8\}=\begin{Bmatrix}6\\0\end{Bmatrix};$$

$$\{\pi_9\}=\begin{Bmatrix}3\\6\end{Bmatrix};\{\pi_{10}\}=\begin{Bmatrix}6\\0\end{Bmatrix};\{\pi_{11}\}=\begin{Bmatrix}3\\-6\end{Bmatrix};$$

<u>държини на прътите</u>

l_i = 6,71 m; l_k = 6 m, където с "i" са отбелязани всички пръти с нечетни номера, а с "к" – всички с четни номера;

<u>косинус директори</u>

$$\{\alpha_i\}=\begin{Bmatrix}0,447\\0,894\end{Bmatrix};\ \{\alpha_j\}=\begin{Bmatrix}0,447\\-0,894\end{Bmatrix};\ \{\alpha_k\}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix},$$

където буквените означения, приемат номера, съответстващи на номерата на прътите, както следва – „i" = 1; 5; и 9; „j" = 3; 7; и 11; „к" = 2; 4; 6; 8; и 10;

<u>квазиматрица-стълб от натоварване и матрица-стълб на прътови усилия</u>

$$\{P\}=\begin{Bmatrix}H\\V_A\\8\\-50\\0\\0\\0\\-70\\0\\0\\0\\-90\\0\\V_B\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}-H\\-V_A\\-8\\50\\0\\0\\0\\70\\0\\0\\0\\90\\0\\-V_B\end{Bmatrix};\qquad \{N\}=\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\\N_5\\N_6\\N_7\\N_8\\N_9\\N_{10}\\N_{11}\end{Bmatrix},$$

където H, V_A и V_B са опорните реакции на системата, а N_i съответно прътовите ѝ усилия.

За да се определят неизвестните прътови усилия, е необходимо:

- да се изключат елементите съответстващи на опорните реакции на системата – вектора $\{P\}$ се заменя с нов вектор, който се означава например с „B";
- същата процедура се извършва с матрица S, като новата се означава например с „A".

Извършва се полагането X = $\{N\}$, а неизвестните усилия се определят от решението на матричното уравнение -

$$A.X = B\,, \tag{11}$$

където:

$$A := \begin{pmatrix}
-0.447 & 0 & 0.447 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.894 & 0 & -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & -0.447 & 0 & 0.447 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0.894 & 0 & 0.894 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -0.447 & 0 & 0.447 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.894 & 0 & -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.447 & 0 & 0.447 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.894 & 0 & 0.894 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.447 & 0 & 0.447\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.894 & 0 & -0.894\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -0.447
\end{pmatrix};$$

$$X := \begin{pmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\\N_5\\N_6\\N_7\\N_8\\N_9\\N_{10}\\N_{11}\end{pmatrix};\qquad B := \begin{pmatrix}-8\\50\\0\\0\\0\\70\\0\\0\\0\\90\\0\end{pmatrix}.$$

Решението на системата линейни уравнения (11), е извършено, като се прилага метода на обратната матрица. За да има (11) единствено решение, матрицата A не трябва да е изродена.

<u>проверка за изроденост на матрицата „A"</u>

Понеже определителят (детерминантата на матрицата) $|A| = 1{,}532 \neq 0$, т.е. матрицата е неизродена, то система (11) има единствено решение, което се получава от матричната зависимост:

$$X = A^{-1}.B\,, \tag{12}$$

където „A^{-1}" е обратната матрица на „A".

<u>определяне вектора решение от (12)</u>

X =

	0
0	-99.553
1	52.5
2	43.624
3	-72
4	-43.624
5	91.5
6	-34.676
7	-76
8	34.676
9	60.5
10	-135.347

.

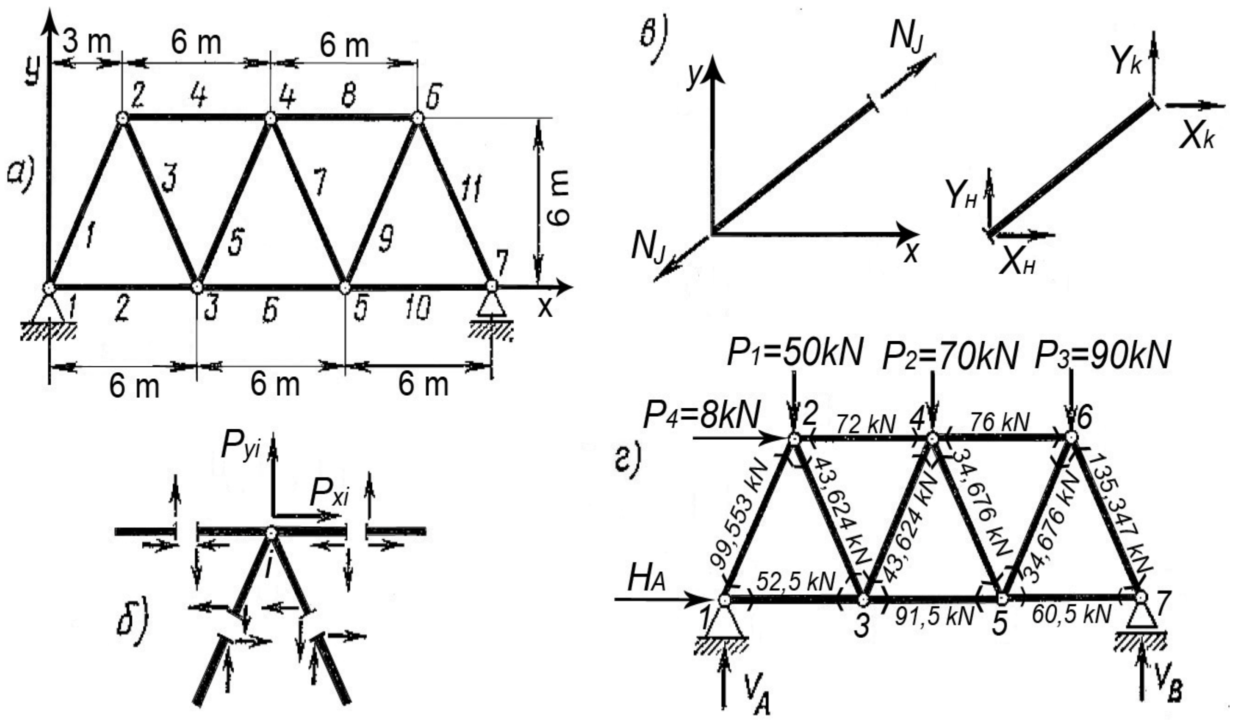
проверка за получените резултати

Елементите на вектора (12), удовлетворяват системата линейни уравнения:

$A \cdot X - B =$

	0
0	0
1	$1.421 \cdot 10^{-14}$
2	0
3	0
4	0
5	0
6	$-7.105 \cdot 10^{-15}$
7	$-1.066 \cdot 10^{-14}$
8	$1.421 \cdot 10^{-14}$
9	0
10	$-7.105 \cdot 10^{-15}$

На фиг.1.г. са показани елементите на вектор (12), като е съобразена и означена посоката на прътовите усилия.



Фиг. 1. **Равнинна ставнопрътова конструкция** – **ферм**а

Заключение

Представена е последователността на работа за решаване на равнинна ставнопрътова конструкция в матрична форма, като е илюстрирана с числен пример.

Използваният метод е различен от класическите, но прилагането му заедно с достъпни приложения, предоставя възможност за автоматизиране на изчислителния процес.

Литература

Крамански, Т. Р. Рангелов, 1976. „Методично ръководство за решаване на задачи по строителна статика", С., Техника, 527 с.

Симеонов, С. 1993. Статика на строителните конструкции част II. С., Техника, 313 с.