Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски"
Годишник, том 47, свитък I, Геология и геофизика, София, 2004, стр. 15-19

УСТОЙЧИВ, НЕГАУСОВ ГЕОСТАТИСТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА МАСИВНО МЕДНО - ЗЛАТНО НАХОДИЩЕ

С. Бакърджиев [1], К. Русков [2], А. Аризанов [3]
[1, 2] Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София
[3] "Челопеч майнинг" АД, 2087 Челопеч

РЕЗЮМЕ. Адаптацията на устойчивото разпределение при моделиране в геостатистиката е безспорно една от най-интересните и обещаващи идеи, които са се появили в тази изследователска област. Класическите геостатистически модели за описание на характеристиките на геостатистическите променливи допускат основни структурни несъответствия с геоложката среда, което пречи да се покажат важни черти на емпиричните данни. По тази причина, търсенето на нови и по-мощни модели е фундаментална и увлекателна тема за търсене в тази работа.Сред широко представените в литературата алтернативни вероятностни модели, които се базират на други, не- Гаусови разпределения, допускането за съществуване на Устойчиво разпределение, имащо уникални отличаващи се характеристики, го прави един идеален кандидат.
Модифицираният вероятностно геостатистически модел е апробиран на повече от 26 000 данни. Получените резултати показват, че приложения вероятностен модел е сложно обвързан с степента на погрешност на изходните данни. Очевидно е противопоставянето на оригиналните данни и техните оценки. Те се сравняват с теста на Колмогоров. Финалният модел много по-реалистичен от този получен въз основа на традиционната геостатистика. Някой междинни резултати като вариограмен анализ, оценката на параметрите на Устойчивото разпределение са също представени в статията.

STABLE NON-GAUSIAN GEOSTATISTICAL MODEL IN MASSIVE COPPER - GOLD DEPOSIT

S. Bakardjiev [1], K. Ruskov [2], A. Arizanov [3]
[1, 2] University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia
[3] "Chelopech Maining" AD, 2087 Chelopech

ABSTRACT. The adoption of stable modeling in geostatistics is undoubtedly one of the most interesting and promising ideas which has arisen in this field. The classical geostatistical models for the description of the characteristics of the geostatistical variables suffer from major structural weaknesses, as they fail to explain important features of the empirical data. Therefore, the search for new more powerful models is a fundamental and fascinating topic of research in this work. While alternative models based on other non-Gaussian distribution are to be found in literature, the stable assumption has unique distinctive characteristics that make it an ideal candidate.
The tendered update of geostatistical model was approbation on more than 26 000 data. The outcomes demonstrate that the tendered model of probability data definition is compounded with the trial-and-error performances of data. It is visible by confrontation between master data and them by estimations. They are well compounded about Kolmogorov criteria. The final model is more realistic, than model obtained on the basis of a traditional geostatistics. In operation the outcomes of variogram analysis, estimation of arguments of stable distribution and other attendant studies outcomes are presenting also.

Увод

За определяне геостатистическите характеристики на находищата на полезни изкопаеми (ПИ) обичайната практика е вземане на проби, статистическото им анализиране и направа на изводи за характеристиката на находището. Анализите може да бъдат извършени като се използват различни по методология и базови допускания статистически методи, част от които са различните видове статистически приближения, които са различни например за класическа статистика и пространствена статистика.

При класическата статистика (Matheron G., 1963, 1971, David M, 1977) се допуска, че изследваните стойности са изпълнени като случайни променливи. Позицията на пробите е игнорирана, като се допуска, че за всички стойности вероятността да бъдат избрани е еднаква. Вероятността от тренд, зони на обогатяване, или бедни участъци в минерализацията, е пренебрегната. Не се взема под внимание фактът, че две проби взети на близко разстояние една от друга е по- вероятно да имат подобни стойности, отколкото, ако са взети от далечни части на находището – виж Ренду (Rendu, J., 1978) и Исаак и др. (Issaks, E.H. and R. M. Srivastava, 1989).

Обратно, пространствената статистика разглежда стойностите на променливите като получени от функции от пространственото положение на пробите – виж формулировката на Говартс (Govaerts, P., 1997). В случая, сходството между стойностите на пробите е определено като функция от разстоянието между пробите и тези взаимовръзки представляват основата на пространствената геостатистика.

Класическата статистика може да бъде използвана в няколко случая. Допускането, че всички стойности на пробите в находището на ПИ имат равни вероятности да бъдат представени, ще бъде изпълнено единствено, ако стойностите на пробите са произволно разпределени или, ако местоположението на пробите е произволно. В теорията на планирането на експеримента се смята, че пробите разположени по равномерна мрежа дават повече информация от произволно взетите проби. В практиката класическата статистика може да бъде използвана единствено в ранните стадии на експлоатация, когато числото на пробите е относително малко и разстоянието между пробите е голямо. При тези обстоятелства, когато наличната информация не е достатъчна за използването на пространствена статистика, прилагането на по-долу споменатите методи е оправдано.

Нека разглеждаме находище на ПИ, като чрез символа Ω ще се представя област (обем или повърхност), която представлява някаква част от това находище. Нека точката z е разположена вътре в Ω, а пробата w е разположена в центъра на точка z. Основното допускате в пространствената статистика е, че стойността x(z) е свързана с координатите на пробата. В случая x(z), се разглежда като функция от своето положение z и същевременно може да представя определена категория на ПИ, съдържание за единица площ или всякаква друга количествена характеристика, която е измерена в пробата. По тази причина x(z) се нарича в геостатистиката - ***регуляризирана променлива,*** като този термин е въведен от Матерон (Matheron, G., 1963). Стойността x(z) е функция от размера и ориентацията на пробата w, която е определена като опорна на регуляризираната променлива. Ако се вземат всички възможни проби w на всички възможни точки z, вътре в рудното тяло Ω, може да се изчисли средната стойност μ от всички x(z) стойности в рудното тяло, като тази стойност не зависи от опорното w. Тогава $\mu=E_{\Omega}[x(z)]$ – очакваната стойност на x(z) в Ω.

В ранните стадии на експлоатацията основният проблем на анализа е определянето на μ. За тази цел, n проби от същия опорен w са взети от точки z_i , i=1,2…n. Стойността на i-та проба е $x(z_i)$. Стойностите от пробите се използва за изчисляване оценката $\overset{щ}{\mu}$ на средното μ и доверителните интервали за средното (символа ^ ще бъде използван навсякъде в тази работа да посочва конкретна изчислителна процедура). Оценката ще варира според вероятностното разпределение на x(z). Приемайки, че стойностите на всички проби са независими, местоположението z_i на i-та проба може да бъде пренебрегнато и тогава може да използваме означението x = x(z) и:

$x_i = x\ (z_i)$.

$\mu = E\ [x]$.

Нормално и устойчиво разпределение

Изборът на вероятностен модел за описание на природните данни е много сложна задача. Преди появата на геостатистиката обработката на пространствените данни следваше рецептите на традиционната статистика, свързани с ползването в общогеоложката практика на статистически разпределения като нормално, гама, логнормално и др. Удачният избор на някое от тези разпределения, в контекста на приемливо за практиката адекватно описание на природния обект, се нарича избор на вероятностен модел за описание на данните.

Паралелно с това се натрупваха факти, че в изследваните природни обекти като находища на полезни изкопаеми се наблюдават едновременно или независимо бедни и богати участъци, т.е. наличието на множество наблюдения с изключително високи стойности, наречени в практиката **ураганни проби** или екстремни стойности. Наличието на последните в извадката, неизбежно водеше до трудно преодолими проблеми при извеждането на необходимите оценки със средствата на традиционната статистика. Както се спомена, основният феномен се свързва с въпроса - крайна или безкрайна е дисперсията в природните данни. Интуитивно е ясно, че крайността на дисперсията идва от чувствителността на апаратурата, с която се измерват например съдържанията на метали в находищата на полезни изкопаеми. Естествено, няма апаратура, която да измерва съдържания от няколко атома до десетки проценти, но впечатляват разликите при спектрален анализ на геохимични данни от $10^{-7}-10^{0}$, т. е. налице са експериментални факти за цитирания обхват на дисперсията. Естествено, логаритмуването на такъв род данни потиска максимално дисперсията. Не случайно, бащите на геостатистиката Д. Криге (Krige, D., 1961) и Ж. Матерон (Matheron, G., 1963, 1971) определят централна роля на логнормалното разпределение при геостатистическо описание на повечето геоложки данни. След 1973 двама от учениците на Матерон, Ренду (Rendu, J., 1978) и Давид, (David, M., 1977) въз основа на натрупан опит препоръчват логнормалния закон за базов в геостатистиката. С това се прави опит за въвеждането на задължителното логаритмуване на всички данни, които съдържат екстремни стойност. Паралелно с това се въвежда и понятието и формализма на т.нар. логнормален Крайгинг – виж Роил (Royle, A., 1971). Самото название определя изискването – разпределението на данните (нарастванията) да съответствува на Логнормалния закон. Обаче в последно време се натрупват факти, че логнормалната хипотеза не се потвърждава, особено при голямо количество данни.

През 1960 г. Бенуа Манделброт (Mandelbrot B., 1960) показва, че повечето от природните данни, свързани например с рудните находища (съдържания на главни и попътни съставки), не покриват тестовете на Колмогоров - Смирнов за съгласуваност с логнормалната хипотеза. Алтернативното предложение е, че данните са разпределени по т.нар. Устойчив закон. Този клас разпределения са всъщност едно широко обобщение на нормалния закон. Доказана от Леви (Levi, P., 1925) и Хинчин (khinchin, A., 1938) теорема гласи, че показателят α , който стои в степента на u над експонентата на характеристичната функция и който при нормалното разпределение е равен на 2, при $\alpha < 2$ дефинира безкрайна дисперсия. Както се спомена, практиката не може да осигури напълно този факт, тъй като това предполага безкрайна чувствителност и точност на измерванията.

Сведения за устойчивите разпределения

Както се спомена, устойчивите разпределения са теоретично обосновани от Пол Леви (Levi, P., 1925) и обобщенията, извършени от Хинчин(khinchin, A., 1938). До публикацията на Манделброт (Mandelbrot B., 1960) устойчивите разпределения не са имали широко практическо приложение, тъй като, с няколко изключения, нямат явни изрази за плътността или функцията на разпределение. Едно обобщение на теорията на устойчивите разпределения се дава през 1983 от Золоторьов.

В тази монография се дават различни подходи и решения за описание на реални обекти и процеси чрез устойчивите разпределения. В най-общ вид, характеристичната функция от случайната величина X се дефинира като:

$$g(u) = E(e^{iuX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)dx$$

Това е всъщност комплексната трансформация на Фурие $f(x)$. За моментите на разпределението се използва израза: $\mu_r = E(X^r) = i^{-r} g^{(r)}(0)$. За устойчивите разпределения е важно да се пресметнат поне параметрите α и γ на характеристичната функция:

$$\chi(u) = e^{\gamma|u|^{\alpha}}$$

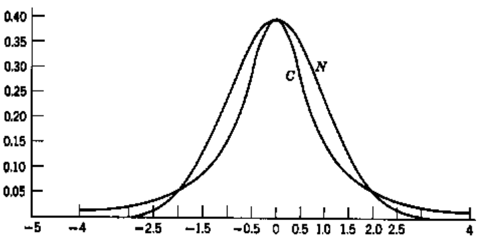
Параметърът α може да варира от 0 до 2. При $\alpha = 1$ се смята, че е налице разпределението на Коши, което се характеризира с това, че математическото очакване μ и дисперсията σ са равни на безкрайност.

Обяснението за безкрайността на математическото очакване μ е следното: Нека разполагаме $n-$ на брой средни $\bar{x}$ получени от $n-$ на брой извадки от дадена Генерална съвкупност от данни. При нормалното разпределение получените $n-$ на брой средни $\bar{x}$ са сходими към математическото очакване μ.

При разпределението на Коши плътността има формата:

$$f(x) = C/(1+x^2).$$

Извадъчните средни $\bar{x}$ са разпределени също по разпределение на Коши, т.е. имат също безкрайна дисперсия.



Фиг. 1. Сравнение между нормалното (N) и Коши (C). Разпределения

На фиг. 1 е показано разпределението на Коши в сравнение с нормалното разпределение. От фигурата се вижда, че плътността при нормалното разпределение е практически ограничена в интервала $[-3\sigma, 3\sigma]$, докато за разпределението на Коши плътността умира полиномно в $[-\infty, \infty]$. При $\alpha = 2$ е налице нормалното разпределение. В известната теорема на Леви-Хинчин е доказано, че единствено при тази стойност дисперсията е крайна. В останалите случаи тя е безкрайна.

Общо взето има обширна литература, в която се показва, че това важи и за природните системи от данни. При появата на екстремни стойности, т.е. с утежняване на опашката на разпределението, параметърът α намалява пропорционално своята стойност. Параметърът γ е мащабен, но не в пълния смисъл на това понятие. Повече сведения за Устойчивите разпределения могат да се намерят в цитираната литература виж .

Логнормално разпределение

Практически, основното ядро на геостатистическата теория е построено на генералното допускане за разпределението на данните по съдържания на полезни елементи по т. нар. логнормален закон на разпределение - виж. Сишел (Sishel, H., 1966), Джорнел (Jornel, A., 2002) и др. Действително, особено при в случаите на ниска степен на минерализация, разпределението на стойностите на пробите не е симетрично и е положително наклонено. Това отклонено разпределение спрямо "нормалното" може в повечето случаи да бъде добре представено чрез две или три параметрично логнормално разпределение. Нека x се изменя със несиметричното разпределение. Ако $\log_e(x+\beta)$ е нормално разпределено, където β е константа, тогава x е три параметрична логнормална променлива. Ефекта на добавъчната константа x се свежда до позитивен наклон, а при $\log_e(x)$ е налице отрицателно изкривяване, докато $\log_e(x+\beta)$ има симетрично разпределение. Ако изменението е три-параметрично логнормално, кривата на нарастване ще показва излишък от ниски стойности.

Вероятностното разпределение на три параметричната логнормална променлива x е напълно определена чрез добавъчната константа β, логаритмичното изменение на (x+β), и логаритмичното средно на (x+β). Ако имаме n проби със стойности x_i(i =1,2…n), могат да се изчислят тези три параметъра от които може да изчислим: оценката $\hat{\mu}$ на средната стойност μ на находището; доверителния интервал за средната стойност на находището.

Изчисляване добавъчната константа β

При достатъчно голямо количество от проби, може да се използва следното уравнение:

$$\beta = \frac{m^2 - f_1 f_2}{f_1 + f_2 - 2m},$$

където m е стойността на пробата, съответстваща на 50% нарастване (това е, средата на наблюдаваното разпределение), f_1 и f_2 са стойностите на пробата съответстващи на p и 1-p нарастваща честота. На теория всяка стойност на p може да бъде използвана, но стойностите между 5% и 20% дават най-добри резултати. Ако количеството проби n е малко, не е възможно определянето на β графично. Тогава се взима β=0, или се изчислява от стойности които този параметър дава в подобни находища.

Доказателство на уравнението

Ако $\log_e(f_1+\beta)$ е нормално разпределено, поради симетрията спрямо средата, може да запишем:

$$\log_e(f_1+\beta) + \log_e(f_2+\beta) = 2\log_e(m+\beta)$$

$$(m+\beta)^2 = (f_1+\beta)(f_2+\beta)$$

$$\beta = (m^2 - f_1 f_2)/(f_1 + f_2 - 2m)$$

Изчисляване на логаритмичното средно и геометричното средно:

Вече приемаме, че β е известно. Нека:

$y_i = \log_e(x_i + \beta)$

Естественото логаритмично средно x + β се изчислява от:

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Геометричното средно m на x + β е изчислено от:

$$\hat{m} = \exp(\bar{y})$$

В случая, геометричното средно на логнормалното разпределение ще е равно на медианата на това разпределение, което е едно от условията за неизместеност на оценката. Оценката на дисперсията използвана за определяне логнормалното разпределение е максимално правдоподобна оценка, която се различава от оценките използвани за обяснение на нормалното разпределение. Отчитайки нормалното изменение: $y=\log_e(x+\beta)$.

Логаритмичната дисперсия σ_e^2 от y се изчислява посредством:

$$V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

или

$$V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\bar{y})^2$$

Съществуват таблици за изчисляване доверителния интервал на средата на логнормалното разпределение. Тези таблици са преизчислени и разширени за n<20.

Ние искаме да изчислим граничната стойност μ_p така че вероятността μ да е по малко от μ_p да е p. Чрез таблиците може да получим фактора $\psi_p(V;n)$, който зависи от много променливи. Получава се:

$$\mu_p = (\hat{\mu} + \beta)\Psi_p(V;n) - \beta .$$

За n>1000 се използва следната формула:

$$\Psi_p(V;n) = \exp(\sigma_t^2/2 + t_p\sigma_t),$$

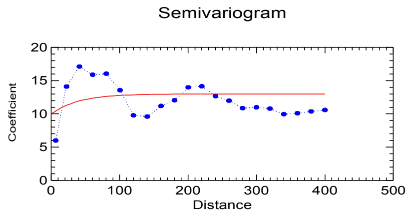
където $\sigma_t^2/2 = \frac{V}{n}(1+\frac{V}{2})$ и t_p са получени от таблици.

Резултати и обсъждане[1]

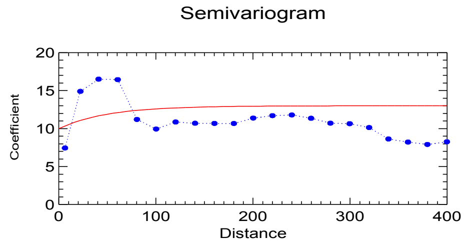
Резултатите от геостатическата обработка на данни (вариограмен анализ) в две взаимно перпендикулярни посоки са показани последователно на фиг. 2 и фиг. 3.

На фиг. 2 е показана типичната за находището вариограма по Au. Геометричният анализ на вариограмната крива показва, че е налице рязък (стръмен) тренд на нарастване на дисперсията, след което следва известен спад в стойностите на дисперсията.

[1] Поради предварително зададени ограничения в обема на статията, резултатите и коментарите към тях имат пилотен характер. Резултатите от негаусовия кригинг ще бъдат представени и коментирани в отделна статия.



Фиг. 2. Типична вариограма за нах. Челопеч в суб ширинна посока



Фиг. 3. Вариограма суб меридионална посока

В същото време, след стойностите на прага, се наблюдава циклично поведение на стойностите на дисперсията, което е указание за наличие на т. нар. "ефект на дупката". Геоложкото тълкуване на "ефектът на дупката" се свежда до хипотезата за наличие на прекъсвания в орудяването, при възможни причини като специфична дорудна структурно-тектонска матрица или съществуването на формационни или геохимични бариери по време на рудообразувателния процес. Амплитудата на "пиковете" се колебае от 80 – 140 м, което е указание за вероятната доминираща роля на структурния контрол. На фиг. 3 е показана вариограмата в посока, която перпендикулярна на тази от първата вариограма. Вижда се, че "ефектът на дупката" липсва, което е указание за издържаност на минерализацията в съответната посока.

На фиг. 4 и фиг. 5 са показани резултатите от тримерната реализация по Кригинг методи, като в първият случай (фиг. 3) е показана реализация по стандартния Кригинг, а във втория случай е показана реализация по негаусовият тип Кригинг. Резултатите от пресмятането на експонента алфа (α) на устойчивото разпределение по две методики е съответно

1.645508 2.967263E-01 1.514682
LSQ estimate

----

alpha = 1.572259

----

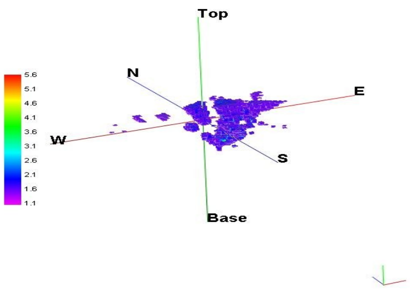
gamma = 4,7763[2]

Expexted value = 7,5734[3]

Значимата разлика между стойностите на мащабния параметър Gamma и съответната стойност по логнормалния Кригинг е съществена. Тестът на Колмогоров Смирнов за близост на данните с Логнормалното разпределение отхвърля хипотезата за вероятностно описание по

[2]/ [2] Данните са променени. Тази промяна не пречи на анализа, тъй като се анализират само разликите между двете стойности
[3]

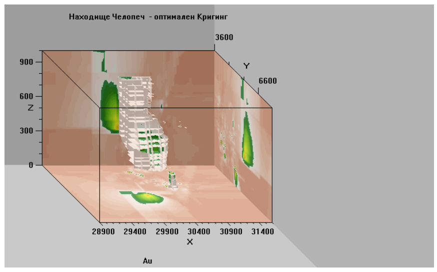
Логнормалния закон и се приема алтернативната хипотеза за вероятностно описание по Устойчивото разпределение. Стойността на параметъра алфа – 1.572259 е значително отличаваща се от стойността 2.0, която е характерна за нормалното (Гаусовото) разпределение. Както вече се спомена, пресметнатите извадъчни средни по стандартния кригинг ще дивергират от истинските стойности, поради засилване на ефектът на разпределението на Коши. Известно подобрение може да се очаква при описаният три параметричен логнормален Кригинг, доколкото е възможно точното пресмятане на добавъчната константа β.



Фиг. 4. Реализация на стандартен Кригинг

Показаната на фиг. 4 реализация на стандартния логнормален Кригинг е силно "привързана" към хоризонталната посока. Освен това се наблюдават и значими "откъснати" от основното рудно тяло малки обеми, които са извън концепцията на общия модел. Практически липсва необходимата свързаност между блоковете, което е пречка за правилното планиране на добивните работи.

На фиг. 5 е показана една от първите реализации на негаусовия кригинг. В три проекции са показани контурите на промишленото орудяване по възприети в момента експлоатационни кондиции. Калибрирането на модела чрез стандартната процедура на кригинга Cross-Validation показва значително по-добра сходимост, отколкото при логнормалния кригинг. В предлагания модел се наблюдава значително по-висока "свързаност" между отделните блокове, което е предпоставка за по-добро планиране на добивните работи.



Фиг. 5. Реализация на негаусов Кригинг

Литература

David, M. 1977.Geostatistical Ore Reserve Estimation, Elsevier.

Goovaerts, P. 1997 Geostatistics for Natural Resources Evaluation. Oxford University Press, New York.

Isaaks, E.H. and R.M. Srivastava. 1989. An Introduction to Applied Geostatistics. Oxford University Press, New York.

Journel, A. G. and Huijbregts, C. 1978. Mining Geostatistics, Academic Press.

Khinchin. A. 1938. Limited laws for sums independed random variables. O.N.T.I., Moscow - St. Petersburg.

Krige, D. G. 1961.`A statistical approach to some basic minevaluation problems on the Witwatersrand', *J. Chem. Metall and Min. Soc. South Africa*, 1951, vol. 52, No. 6, pp. 119-39.

Levy, P. 1925. Calcul des probabilities. - Paris: Gauthier-Villars et Cie, 350.

Mandelbrot., B. 1960. The Pareto-Levy random function and the multiplicative variation of income: Yorktown Height, N. Y.,IBM Research Center Rept.

Matheron, G. 1971. The Theory of Regionalised Variables and its Applications, Cahier No. 5, Centre de Morphologie Math\' e matique de Fontainebleau.

Matheron, G. 1963. `Principles of geostatistics', *Economic Geology* , vol. 58, pp. 1246-66.

Rendu, J-M. 1978. An Introduction to Geostatistical Methods of Mineral Evaluation, Monograph of the South African Inst. Min. Metall.

Sichel, H. S. 1966. The estimation of means and associated confidence limits for small samples from lognormal populations, Symposium on mathematical statistics computer applications in ore valuation, S. Afr. Inst. Min. Metall, 106-23.

Royle, A. G. 1971. A Practical Introduction to Geostatistics. *Course Notes of the University of Leeds*, Dept. of Mining and Mineral Sciences, Leeds, 1971.

Journel, A 2002: Combining knowledge from diverse sources: an alternative to traditional data independence hypotheses, *Math. Geol.*, 34, no 5.

Препоръчана за публикуване от
катедра "Геология и проучване на полезни изкопаеми", ГПФ