ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 52, Св. I, Геология и геофизика, 2009
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 52, Part I, Geology and Geophysics, 2009

ГЕОСТАТИСТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА ЕДНОРОДНИТЕ ЗОНИ (ДОМЕЙНИ) В РУДНИТЕ НАХОДИЩА

Светлозар Бакърджиев

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София; zarcobak@mgu.bg

РЕЗЮМЕ. Геостатистическите модели на запас-съдържание на рудни находища се основават на оценката на техните запаси. Съдържанията се дефинират като отношение на масата извлекаемият компонент към масата на рудата. Развитието на този проблем може да се търси в глобален или регионален порядък. Този проблем са за пръв път решени от Ласки (1950). Той предлага, че се поучава линейна зависимост между логаритъма от запасите в тонове и съдържанието на полезен компонент. Този модел има ограничено приложение в практиката. В тази статия се предлага модел, в който първоначалната концентрация не се ограничава от най-високите концентрации измерени в рудата. Вероятностното разпределение на получените еднородни зони (домейни) се апроксимира с т.нар. Устойчивото разпределение. Допълнителните оценки на параметрите на Устойчивото разпределение дава коректността на оценките на запасите на полезни изкопаеми. Геостатистическите експерименти са реализирани в практиката на едно реално златно-медно находище. Практическите аспекти на тази методология се дискутират.

GEOSTATISTICAL MODELS OF DOMAINS ZONES IN AN ECONOMIC ORE DEPOSITS

Svetlozar Bakurjiev
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia; zarcobak@mgu.bg

ABSTRACT. Geostatistical models of ore grade and tonnage for economic ore deposits has provided a basis for ore reserve estimation. The grade is defined as the ratio of mass of mineral extracted to the mass of the ore. Evolution can be made either on a global or a regional basic. This problem was carried out of Lasky (1950). He proposed that a linear relation is obtained if the logarithm of tonnage of ore with grade above a specified value plotted against grade. This model have limited appliance into practice. In this article proposed a model but with the further concentration limited to the highest-grade ores. The probability distribution of obtained tonnage versus grade (domains zones) approximated to Stable distribution. The additionally estimated parameters of the Stable distribution give correctness of ore reserve estimation. Geostatistical experiments putting into practice in a real gold-copper ore deposit. The practical aspects of this methodology are discussed.

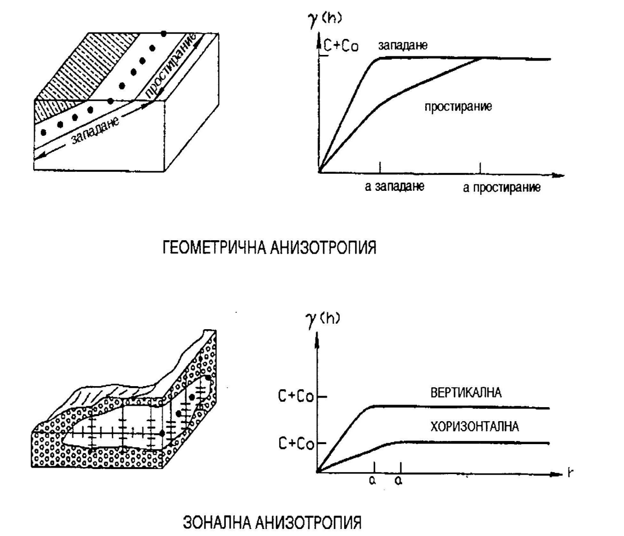
Въведение

Рудните тела притежават вътрешна нееднородност в състава, строежа и свойствата си. Детайлността на изучаването на тази нееднородност зависи от геометрията и гъстотата на проучвателната мрежа. Като част от геоложките системи, рудните системи се разглеждат като едни от най-сложните, които са изградени от множество условно еднородни елементи. В този аспект, под структура на обекта се разбира начина на организация на съставящите го елементи, чрез който се определя закона на вътрешния строеж на изследваната система. Задачата при геологопроучвателния процес се свежда до изучаване нееднородността на рудните тела, анизотропията и структурата им, които са основните характеристики на природната променливост на находищата. Това е необходимо при избора на оптимална методика на проучване.

В геологопроучвателната практика са известни две основни проучвателни стратегии:

- Обектът на проучвателните работи (обектът на оценка) – фактическата или предполагаемата зона на разпространение на полезното изкопаемо, се характеризира с относителна еднородност основните показатели, което предполага еднаква ефективност на геологопроучвателните работи в различните части на обекта;
- Методът на еднородните обекти, известен в англоезичната литература като "Exploration play method" се основава на хипотезата, че обектът може да се разделя на редица относително еднородни части (домейни) и глобалната оценка е сума от оценката на отделните части или домейни.

Очевидно е, че първият метод е близък с т.нар. "класически" метод на проучване, а втория метод е продукт и дължи своето развитие от прилагането на геостатистическите методи в геологопроучвателната практика. Типична връзка между геостатистическата методология, представена чрез вариограмите и основните видове анизотропия е представена на фиг. 1.



Фиг. 1. **Връзка между анизотропия на находищата е поведението на вариограмите**

1. Освен чрез вариограмният анализ, геостатистическата методология включва и формализма наречен “Кригинг”, който трябва да се “нагоди” към:
2. Създаването на гореспоменатите еднородни обекти – домейни;
3. Най-добра оценка на параметрите на домейните, в контекста на геологопроучвателната задача.

В тази статия се дават сведения за базовите методи и тяхното развитие в контекста на клъстеризацията и геостатистическата оценка на домейните.

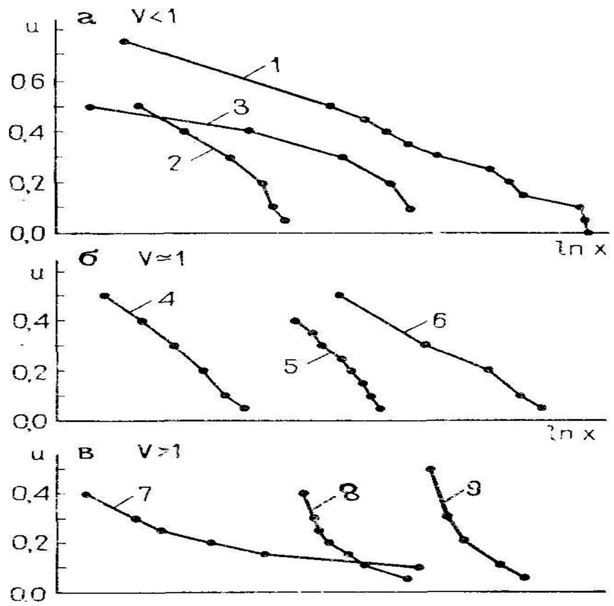
Закон на Ласки

Една от най-често анализираните зависимости е между съдържанието на полезна компонента и теглото на ресурса – в посока от по-богатите към по-бедните на полезен компонент минерален ресурс. Американският геолог С. Ласки е един от първите учени, успял да изведе математически закон, с който прогнозира запасите от рудните находища. Анализирайки производствените отчети на няколко медно-порфирни находища, Ласки извежда следното уравнение:

$$U/G=K_1 - K_2 \log \text{cumulative } (X), \qquad (1)$$

където X е натрупаното количество добита руда плюс оставащите запаси; U/G е средното съдържание на метал; K_1 и K_2 са константни величини, специфични за всяко находище. K_2 винаги е с отрицателен знак, заради отрицателната зависимост между теглото и полезното съдържание. Обикновено тази зависимост графично се представя на полулогаритмична графика, (съдържанието се отчита по логаритмичната абциса, а теглото по алгебричната ордината) като намаляваща права линия.

По-късно Томас Ловин (Agtherberg, 1982) доказва, че законът на Ласки е валиден само за определен тип находища и минни региони, и не може да се използва като коректен инструмент за оценка на по-големи находища с различно разпределение на полезната компонента. Ловин предлага още няколко алтернативни типа на зависимостта съдържание/тегло: нормалнологаритмични за находища с високо съдържание на полезна компонента, близо до Кларковото съдържание (желязна, алуминиева, титанова руда); бимодална и мултимодална за по-рядко разпространените елементи (злато; сребро; живак). Четирите алтернативни разпределения съдържание/тегло са показани на фиг. 2.



Фиг. 2. **Основни зависимости между запас-съдържание в зависимост от коефициента на корелация** (V) (**Марголин**, 1974)

В много практически ситуации, пробите с които се разполага за оценка на блок не са разположени по равномерна мрежа. Размера на пробите и ориентацията не са константа, и броят и относителната позиция на пробите използвани за изчисляване на всеки блок се изменят от блок към блок. Пресмятането на блок W, може да бъде много сложно и отнемащо време ако всяка проба в околностите на блока е разглеждана индивидуално. Практическото решение се заключава в групиране на пробите в блокове $W_i (i = 1, 2, ...n)$ в съседство на W и пресмятане μ_W като средно тегло на средното x_i на всички проби в W_i.

За изчисляване кригинг оценката на μ_W трябва да сме в състояние да изчислим дисперсията на x_i и μ_W. По-долу в текста ще бъде показано как тези величини могат да бъдат изчислени когато е игнорирана позицията на пробите в блока W_i. Считаме, че пробите са случайно разпределени в W_i; кригинг с такова предположение се нарича случаен кригинг (Journel, 2002).

Изчисляване на $\bar{\gamma}$ и $\bar{\sigma}$.

Използват се следните означения:

W - блок който ще бъде оценяван

n - брой блокове използвани за оценка на W.

W_i - i-ят блок използван за изчисляване на W(i=1,2,…n).

w - размер на единична проба (приема се, че всички проби имат еднакъв размер w).

q_i - брой проби с размер w в блок W_i.

x_{ij} - стойност на j-та проба с размер w в блок W_i (j=1,2,… q_i).

x_i - средна стойност на x_i в W_i

$$x_i = \frac{1}{q_i}\sum_{i=1\, j=1}^{q_i} x_{ij}$$

w_{ij} - support на x_{ij}

w_i - support на x_i (w_i е обединение на всички w_{ij})

$$w_i = \left| w_{i1}; w_{i2}; ...w_{iq_i} \right|$$

μ_W - неизвестна стойност на блока W

μ_K - кригинг оценка на μ_W

Кригинг оценката е:

$$\mu_K = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

където b_i членовете удовлетворяват кригинг системата от уравнения. Тази система е функция на:

$\bar{\gamma}(w_i; w_i)$ за i=1,2….n

$\bar{\gamma}(w_i; w_j)$ за i=1,2,….n ; j=1,2,….n ; $i \neq j$

$\bar{\gamma}(w_i; W)$ за i=1,2….n

Ако позицията на пробите q_i с размер w в W_i е неизвестна, не могат да се пресметнат тези стойности на $\bar{\gamma}$. Обаче, могат да бъдат изчислени очакваните стойности на $\bar{\gamma}$ когато пробите q_i заемат всички възможни позиции в W_i случайно. Тези очаквани стойности ще бъдат използвани в кригинг системата от уравнения. От дефиницията на $\bar{\gamma}$, очакваната стойност на $\bar{\gamma}(w_i; W)$, когато пробите w_{ij} са случайно разпределени в W_i, е:

$$E[\bar{\gamma}(w_i; W)] = \bar{\gamma}(W; W) \qquad \text{за i=1,2….n.}$$

Също, очакваната стойност на $\bar{\gamma}(w_i; w_j)$ когато пробите w_{ik} са случайно разпределени в W_i и w_{ik} са случайно разпределени в W_j, е за $i \neq j$:

$$E[\bar{\gamma}(w_i; w_j)] = \bar{\gamma}(W_i; W_j) \qquad \text{за } i \neq j.$$

Освен това:

$$\bar{\gamma}(w_i; w_j) = \frac{1}{q_i^2}\left(\sum_{j=1}^{q_i} \bar{\gamma}(w_{ij}; w_{ij}) + 2\sum_{k=j+1}^{q_i} \sum_{j=1}^{q_{i-1}} \bar{\gamma}(w_{ij}; w_{ik}) \right)$$

След като всички проби w_{ij} имат еднакъв размер w, имаме:

$$\bar{\gamma}(w_{ij}; w_{ij}) = \bar{\gamma}(w; w) \qquad \text{за всички i,j}$$

Очакваната стойност на $\bar{\gamma}(w_{ij}; w_{ij})$ за $i \neq k$ където w_{ij} и w_{ik} вземат всички възможни позиции в W_i е:

$$E[\bar{\gamma}(w_{ij}; w_{ik})] = \frac{W_i \bar{\gamma}(W_i; W_i) - w\bar{\gamma}(w; w)}{W_i - w}$$

за $i \neq k$

Използването на случайният кригинг е оправдано само ако размера на блоковете W_i е много по голям от размера на пробата w (Chiles et al., 1999). Тогава горното уравнение може да бъде записано:

$$E[\bar{\gamma}(w_{ij}; w_{ik}) \cong \bar{\gamma}(W_i; W_i) \qquad \text{за } i \neq k$$

$$E[\bar{\gamma}(w_i; w_i)] = \frac{1}{q_i}\bar{\gamma}(w; w) + \frac{q_i - 1}{q_i}\bar{\gamma}(W_i; W_i).$$

Последното уравнение ще е валидно, ако заместим $\bar{\gamma}$ с $\bar{\sigma}$.

Очакваната стойност на $\bar{\gamma}(w_i; w_i)$ може да бъде записана така:

$$E[\bar{\gamma}(w_i; w_i)] = \bar{\gamma}(W_i; W_i) + \frac{1}{q_i}[\bar{\gamma}(w; w) - \bar{\gamma}(W_i; W_i)].$$

Знае се, че дисперсията на проба w в блок W_i е :

$$\sigma^2(w \text{ в } \mathrm{W_i}) = \bar{\gamma}(W_i; W_i) - \bar{\gamma}(w; w) \ .$$

Освен това, ако разгледаме пробите q_i с размер w случайно разпределени в W_i, грешката направена при изчисляване стойността на W_i, посредством средната стойност x_i на q_i проби, е:

$$\sigma_E^2(w_i \text{ в } \mathrm{W_i}) = \sigma^2(w_i \text{ в } \mathrm{W_i}) = \frac{1}{\mathrm{q_i}}(w \text{ в } \mathrm{W_i}).$$

Може да запишем:

$$E[\bar{\gamma}(w_i; w_i)] = \bar{\gamma}(W_i; W_i) - (err.\ \mathrm{W_i}).$$

Ако използваме ковариограма:

$$E[\bar{\sigma}(w_i; w_i)] = \bar{\sigma}(W_i; W_i) + \sigma^2(w_i \text{ в } \mathrm{W_i}).$$

Това уравнение може да бъде прочетено по следния начин:

Дисперсията на w_i в Ω е равна на дисперсията на W_i в Ω плюс дисперсията на w_i в W_i.

Регуляризираната полувариограма от проби с поддръжка w_i е:

$$\gamma_{w_i}(h) = \bar{\gamma}(w_i; w_{i+h}) - \bar{\gamma}(w_i; w_i).$$

Очакваната стойност на полувариограмата, където пробите q_i от w_i са разположени случайно в W_i, е:

$$E[\gamma_{w_i}(h)] = \bar{\gamma}(W_i; W_{i+h}) - \bar{\gamma}(W_i; W_i) + error\mathrm{W_i}).$$

Пресмятане на домейна $x(z_0)$ по заръчани точка z_0

На всяка точка $z_i(i=1,...n)$ знаем стойността на $x(z_i)$ и може да изчислим стойността на $m(z_i)$. Стойностите на определяните drift и residual на точковите данни са изчислени с използването на следните уравнения:

$$\hat{M} = P\hat{A}$$

$$\hat{R} = X - \hat{M}$$

Очакваната стойност на остатъка $r(z_0)$ може да е 0. Авто-ковариационната матрица на остатъка R на всички точкови данни е S. Вектора на ковариация между остатъка $r(z_0)$ и остатъка R **е** $\mathrm{S}(z_0)$. За пресмятане остатъка на z_0, е използвана линейна комбинация от очакваните остатъци $\hat{R}$, теглата са получени от кригинг уравненията със известно средно:

$$\hat{r}(z_0) = S'(z_0)S^{-1}\hat{R}$$

Стойността на x(z) на $z = z_0$ е получена с универсалната оценка:

$$\hat{x}(z_0) = \hat{m}(z_0) + \hat{r}(z_0)$$

Пресмятане на блоковете

Разглеждаме блок W чиято средна стойност μ_W искаме да изчислим. Ако $\hat{m}(W)$ е пресметната средна стойност на m(z) в W, а $\hat{r}(W)$ изчислената средна стойност на r(z), използваме следните оценки:

$$\hat{\mu}_W = \hat{m}(W) + \hat{r}(W).$$

$\hat{m}(W)$ е получено чрез интегриране на $\hat{m}(z)$ в W:

$$\hat{m}(W) = \frac{1}{W}\int_{z \text{ in W}} \hat{\mathrm{m}}(z)dz.$$

Знаем, че :

$$\hat{m}(z) = P(z)\hat{A}$$

$\hat{A}$ е независима от z, оттук:

$$\hat{m}(W) = \frac{1}{W}\left(\int_{z \text{ in W}} \mathrm{P}(z)dz.\right)\hat{A}.$$

$\hat{r}(W)$ е пресметната чрез кригинга. Ако S(W) е вектор на ковариация между точковите проби z_i и блок W, може да запишем:

$$S(W) = \frac{1}{W}\int_{z \text{ in W}} \mathrm{S}(z)dz.$$

$$оттук:$$

$$\hat{r}(W) = S'(W)S^{-1}\hat{R}$$

Случаен кригинг на медно-златно находище

Медната мина (Бакърджиев и др., 2004) е масивен пластов сулфиден залеж. Рудното тяло може да бъде разделено на блокове (домейни) със сравнително постоянна посока и наклон, и вътре в тези участъци изчислителният проблем може да бъде като дву-дименсионен. Сондажите разположени по неравномерна мрежа, пресичат цялата ширина на рудното тяло. За всеки сондаж е дадена стойност, която е равна на средната стойност на рудата на сечението между долната и висящата стени. Средната плътност на опробване е около 6 сондажа на 1000 m². За целите на планирането се изисква средната стойност да бъде изчислена за всеки блок с размери 15x15 m вътре в пределите на рудното тяло. Този изчислителен проблем най-добре е разрешен с използването на случаен кригинг. По-долу е описана използваната процедура.

Първо, рудното тяло е разделено на участъци със сравнително постоянни посока и наклон. Нека Ω е такъв участък. Тогава Ω се разделя на блокове с размер 15x15 m, и за всеки блок W_i, средната стойност x_i от всички сондажи които блока съдържа е изчислена. Нека w_i е тегло на x_i в W_i. Стойностите x_i са разположени по равномерна но непълна мрежа: някои блокове не съдържат сондажи.

Регуляризираната полувариограма $\gamma^*(h)$ на стойностите x_i може лесно да бъде изчислена. Математическият модел е :

$$\gamma^*(h) = 0,05 + 0,009(1 - e^{-h/8})$$

където h е премерено в единици от 15 метра. Този модел допуска ефект на включенията N=0,05.

Зависимостите между дисперсиите в площите, може да бъде изчислена използвайки стойностите x_i. Две стойности са особено важни: очакваната дисперсия на w_i

в Ω, която е $E[\sigma^2(w_i \text{ в } \Omega)]=0{,}14$, и очакваната дисперсия на w_i в $\mathrm{W_i}$. Последната дисперсия е грешката на пресмятането на блокове с размер 15x15 метра когато те са пресметнати по средната стойност на пробите които съдържат. Би трябвало да е равна на ефекта на включенията на полувариограмата. Посредством линейни екстраполации получаваме $E[\sigma^2(w_i \text{ в } \mathrm{W_i})]=0{,}05$.

За пресмятане на блок W, може да вземем предвид средните стойности на сондажите вътре в W (ако ги има) и средните стойности на сондажите в блоковете обкръжаващи W. Ако n е броя сондажи които са ангажирани за стойност W, кригинг оценката на W е:

$$\mu_K = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

с дисперсия:

$$\sigma_K^2 = \bar{\sigma}(W;W) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j\, \sigma(w_i;w_j) - 2\sum_{i=1}^{\bar{n}} b_i\, \bar{\sigma}(w_i;W).$$

$\bar{\sigma}(W;W)$ е дисперсията на W в Ω. Тя може да бъде пресметната използвайки зависимостите между дисперсиите:

$$\bar{\sigma}(W;W) = E[\sigma^2(w_i \text{ в } \Omega)] - E[\sigma^2(w_i \text{ в } \mathrm{W_i})]=0{,}09$$

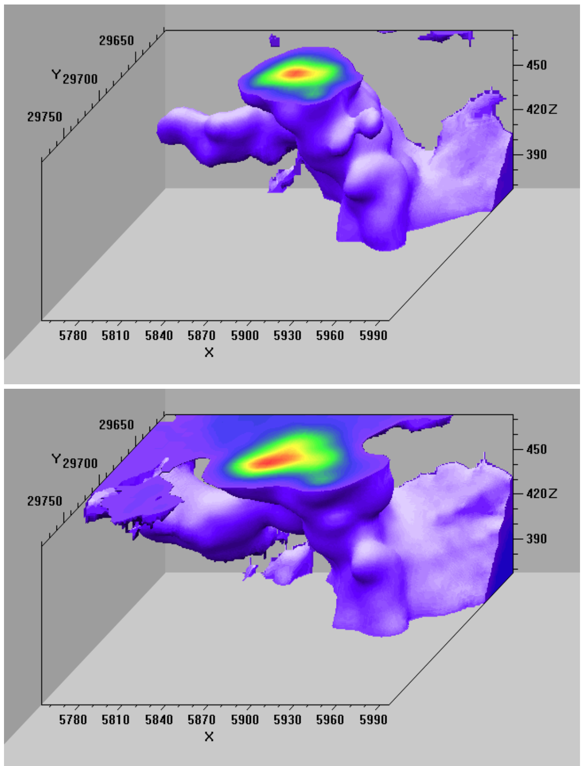
$\bar{\sigma}(w_i;w_i)$ дисперсията на w_i в Ω:

$$E[\bar{\sigma}(w_i;w_i)] = E[\sigma^2(w_i \text{ в } \Omega)]=0{,}14.$$

Ако $i \neq j$, $\bar{\sigma}(w_i;w_i)$ е ковариацията между w_i и w_j. Тя може да бъде пресметната от полувариограмата $\gamma(h)$ (Lantuejoul, 2002) и съответния модел, който е представен на фиг. 3.

Интерпретация на резултатите

Показаните на фиг. 3 резултати показват, че има известно "разширяване" на геостатистическия модел, в зависимост от избора на размера на домейните. Разликата в тоталните запаси, пресметнати по двата размера на домейните, е повече от 25%, което е твърде съществено при планирането на добива, след проведеното експлоатационно проучване. В по-голямата си част проблемът при геостатистическата обработка се свежда до избора на начина на опробване – взема се проба на всеки линеен метър от прокараните подземни сондажи. Това довежда до изключително силна "клъстеризация" по протежение на сондажите. В тази връзка, в рудника са правени опити за съставяне на т.нар. "композити", като за удачен се е смятало обединение между 3-5 m, но не е известно да е получен устойчив резултат. Във всички случаи е очевидно, че промени в общата конфигурация на модела не се наблюдават. Това се дължи на устойчивия характер на вариограмните модели.



Фиг. 3 **Тримерни "домейн"-модели на находището; моделът в горната част на фигурата е построен по домейни с размери** 10**x**10**x**10, **а моделът отдолу е по домейни** 15**x**15**x**15; **за двата модела са ползвани общо** 4 **клъстера**

Заключение

Има две практически трудности в прилагането на кригинг формализма за обработка на неравномерно разположени в пространството огромно количество проби – над 5000. Първо, избор на математическа функция за представяне на тренда. Това е проблем срещан във всички анализи на тренд повърхнина. Второ и по важно, ковариограмата на остатъка трябва да бъде максимално точно пресметната. Има редица трудности в изпълняването на това пресмятане, някой от които са посочени в тази статия. От различните методи които са предложени, най-ефикасният е базиран на представата за обща ковариация и коректната й оценка, която е най-добре представена в Goovaerts (1997) и Journel & Huijbregts (1978).

Предлаганата методика има устойчив характер и практически е инвариантна спрямо начина и пространственото разположение на пробите – сравни двете геометризации, които са показани на фиг. 3. Ползването на методиката, заедно с ползването на формализма на обединяването на пробите в т.нар. "композити", е също перспективно направление, въпреки очакванията за по-силен изглаждащ ефект върху геостатическите модели.

Литература

Бакърджиев, С., К. Русков, А. Аризанов. 2004. Устойчив, негаусов геостатистически модел на масивно медно-златно находище. – *Год. МГУ "Св. Иван Рилски", 47, св. 1*, 15-19.

Марголин, А. 1974. *Оценка запасов минерального сырья – математические методы*. М., Недра.

Agterberg, F. P. 1982. Recent developments in geomathematics. – *Geo-Processing*, 2, 1-32.

Chiles, J.-P., P. Delfiner. 1999. *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty.* Wiley & Sons.

Goovaerts, P. 1997. *Geostatistics for Natural Resources Estimation.* Oxford University Press.

Journel, A. 2002. Combining knowledge from diverse sources: an alternative to traditional data independence hypotheses. – *Math. Geol., 34*, 5.

Journel, A. G., C. Huijbregts. 1978. *Mining Geostatistics.* Academic Press.

Lantuejoul, C. 2002 *Geostatistical Simulation: Models and Algorithms*. Springer-Verlag

Препоръчана за публикуване от
Катедра “Геология и проучване на полезни изкопаеми”, ГПФ