ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 49, Св. II, Добив и преработка на минерални суровини, 2006
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 49, Part II, Mining and Mineral processing, 2006

МЕТОДЪТ НА ПРАВИТЕ В ЕДНА ЗАДАЧА ОТ КИНЕМАТИКА НА МИННАТА МУЛДА

Михаил Вълков

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

РЕЗЮМЕ. Разгледани са възможностите на метода на правите за решаване на геомеханични задачи и по-конкретно на такива от механика на минната мулда. При разглеждане на геометрична ивица, съдържаща зоната на влияние на подемните минни работи, като линейна среда на Й. Литвинишин, диференциалното уравнение с частни производни от параболичен тип е заменено по две схеми със системи обикновени диференциални уравнения. Представени са и основните предимства на метода на правите при разглеждане на геомеханични задачи от решавания тип, а именно: възможност да се решават проблеми при най-обща постановка на граничните условия; възможност да се решават задачи в нелинейни постановки; възможност да се решават уравнения от трите основни типа – параболичен, елиптичен и хиперболичен, както и такива с прекъсване в коефициентите.

THE STRAIT LINE METHOD IN A PROBLEM OF MINING SUBSIDENCE KINEMATICS

Mihail Vulkov

[1]University of Mining and Geology "St. Iv. Rilski", 1700 Sofia

ABSTRACT. The possible applications of the strait line method in geomechanics, and especially in mining subsidence mechanics, problems are discussed. When considering the geometric strip of land which contains the affected area of underground mining, as the linear medium of Lytwiniszyn, the deferential equation, with partial derivatives of parabolic type, is substituted with two systems of ordinary deferential equations. The main advantages of the of the line method, when applied to geomechanical problems are displayed. They include: The possibility to solve problems with the widest settings of the boundary conditions; The possibility to solve problems in nonlinear setting;The possibility to solve equations from the three basic types: parabolic elliptic, hyperbolic, and such with discontinuance in the coefficients

Разглежда се една задача от минната геомеханика, свързана с определяне на премествания в скалния масив и на земната повърхност, получени при подземно изземване на полезни изкопаеми.

Формирането на минна мулда в зависимост от минно - геоложките и минно - технологичните особености може да бъде описвано с уравнения от параболичен, елиптичен или хиперболичен тип Вълков (1997) при разнообразни начални и гранични условия Димова (1987).

Подходящ за решаване на задачи от кинематика на мулдата е методът на правите, който дава възможност да се получават приближени аналитични решения на уравненията с частни производни, описващи мулдообразуването при приемане на различни модели на средата скален масив.

При този метод се провежда апроксимация на операцията диференциране по дадено направление, което позволява да се намали размерността на задачата и да се замени изходното уравнение от кинематика на мулдата с апроксимираща го система диференциални уравнения с по-малък брой независими променливи.

Същността на метода се състои в замяната на производните спрямо една от независимите променливи с приблизителни изрази посредством крайни разлики. Производните спрямо останалите независими променливи остават непроменени. Така изходното уравнение се замества със система диференциални уравнения, имащи по-малък брой независими променливи.

Като илюстрация може да бъде разгледана задачата на Коши за уравнението на Фурие според модел I на Й. Литвинишин (1974).

Параболичното уравнение, описващо мулдообразуването, според този модел

$$B(z)W_{xx} - W_z = 0 \tag{1}$$

чрез субституцията [5]

$$z = \lambda(\xi) \tag{2}$$

се трансформира в

$$W_{xx} - A(z)\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0, \tag{3}$$

където $\xi = \psi(z)$.

За получаването на (3) се приема, че $\lambda(\xi)$ е обратима. Ако функцията ξ се подбере така, че

$$A(z)\frac{\partial \psi}{\partial z} = 1, \text{ където } A(z) = \frac{1}{B(z)};$$

и при $z = 0$, $\psi(0) = 0$, то (3) приема вида

$$W_{xx} - W_z = 0. \tag{4}$$

Един възможен алгоритъм за решаване на начално - гранична задача от механика на мулдата по метода на правите може да се реализира по следния начин.

Разглежда се геометрична ивица $-\infty < x < \infty$, $0 < z < H$, както е показано на фиг.1.

Уравнение (4)се решава при следните начално – гранични условия

$$W(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < L, \qquad \xi = 0; \tag{5}$$

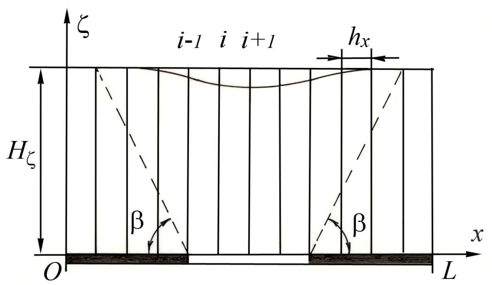
$$W(0,\xi) = \psi_1(\xi), \quad x = 0, \quad 0 < \xi < \psi(H); \tag{6}$$

$$W(L,\xi) = \psi_2(\xi), \quad x = 0, \quad 0 < \xi < \psi(H). \tag{7}$$

Избира се множество от прави успоредни на оста 0ξ (фиг.1), които имат уравнения

$$x = x_i = ih_x; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n+1, \tag{8}$$

където $h_x = \dfrac{L - 0}{n+1}$ е стъпката на дискретизация по ос *0x* на разглежданата област.



Фиг. 1

По тези прави вторите производни спрямо x в уравнение (4) се заместват със следната схема от крайни разлики:

$$W_{xx}(x_i,\xi) \approx \frac{W(x_{i+1},\xi) - 2W(x_i,\xi) + W(x_{i-1},\xi)}{2h_x}. \tag{9}$$

По този начин изходното уравнение с частни производни се замества със система обикновени диференциални уравнения, която има вида:

$$W_\xi - \frac{1}{h_x^2}\left[W_{i+1}(\xi) - 2W_i(\xi) + W_{i-1}(\xi)\right] = 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{10}$$

Системата се решава при следните начално - гранични условия:

$$W(x_i,0) = \varphi(x_i); \qquad \left(i = \overline{1,n}\right); \tag{11}$$

$$W_0(0,\xi) = \psi_1(\xi); \tag{12}$$

$$W_{i+1}(L,\xi) = \psi_2(\xi). \tag{13}$$

За минната практика е удобно границите да се изберат така, че $\psi_1(\xi) = \psi_2(\xi) = 0$ т.е. по тях да няма слягания. С други думи границите *x* = 0 и *x* = *L* се избират така, че зоната на влияние на подземните минни работи да се вмества в тях, както е показано на фиг.1.

Равенството (9) апроксимира втората производна по *x* с точност h_x^2.

Ако е необходима по-голяма точност при пресмятане, могат да се ползват някои от схемите, предложени от А.А. Самарский (1983).

За решаване на получените системи обикновени диференциални уравнения се прилага някой от известните числени методи:

- на Рунге-Кута;
- на Адамс;
- на Ойлер-Коши и др.

Съвременните софтуерни продукти за математически пресмятания имат опции за решаване на системи обикновени диференциални уравнения, което съществено облекчава решаването на геомеханични задачи по метода на правите.

Методът на правите има и още едно съществено предимство. Той позволява разглежданата задача от минната геомеханика да бъде решавана както при гранични условия от най – общ вид:

$$f_0(\xi)W + f_1(\xi)W_x + f_2(\xi) = 0, \; x = 0; \tag{14}$$

$$f_3(\xi)W + f_4(\xi)W_x + f_5(\xi) = 0, \; x = L, \tag{15}$$

така и ако се наблюдава прекъсване в коефициентите на изходното уравнение (1) [1].

В този случай разглежданата геометрична ивица се разделя с прави, успоредни на ос Ох.

Уравнение (4) се замества със следната система от обикновени диференциални уравнения

$$W_{\zeta\zeta} - \frac{W_i - W_{i-1}}{h_\xi} = 0, \quad 1 < i < n \tag{16}$$

където $W_i = W(x, ih_\xi)$;

$$h_\xi = \frac{\psi(H)}{n}; \qquad \zeta = \frac{x}{\sqrt{Bh_\xi}}.$$

Решението на уравнение (16) се дава със зависимостта

$$W_i = \int_0^\zeta W_{i-1}(s)\,sh(\zeta - s)\,ds + C_1 \exp\zeta + C_2 \exp(-\zeta) \tag{17}$$

В горната система от равенства W_0 се получава от началните условия на задачата т.е. при $i = 0$. За минната практика, в границите на отработеното пространство, най-често се приема $W_0 = m\eta = const$, където m е изземаната мощност, $0 < \eta < 1$ е коефициент на слягане, който зависи от начина на управление на горнището.

При реализиране на решение (17) в съответствие с Омельченко (1975), се отчита, че

$$W_{i-1} = \sum_{0}^{i-1} \left[a_{k,i-1}\zeta^{k} \exp\zeta + b_{k,i-1}\zeta^{k} \exp(-\zeta) \right]$$

$$W_{i} = \sum_{0}^{i} \left[a_{k,i}\zeta^{k} \exp\zeta + b_{k,i}\zeta^{k} \exp(-\zeta) \right]. \qquad (18)$$

Стойностите на влизащите в (18) коефициенти $a_{k,i}$ и $b_{k,i}$ се намират от рекурентните формули

$$a_{k,i} = -\frac{1}{2k} a_{k-i,i-1} - \frac{k+1}{2} a_{k+1,i};$$

$$b_{k,i} = -\frac{1}{2k} b_{k-i,i-1} + \frac{k+1}{2} b_{k+1,i}; \qquad (19)$$

където $1 \leq k \leq i$.

Стойностите на $a_{0,i}$ и $b_{0,i}$ се намират от граничните условия на задачата.

Препоръчана за публикуване от катедра
"Техническа механика", МТФ

В заключение трябва да се отбележи, че методът на правите дава много добри резултати и при решаване на нелинейни уравнения с частни производни Вълков (2006), което прави възможно и неговото прилагане към задачата от нелинейната стохастична геомеханика.

Литература

Вълков М., 2006, *Стохастични модели в кинематиката на минната мулда,* С. , Издателска къща „Св. Иван Рилски", под печат.

Омельченко К. Г., Шипарев В. А., 1975, *Применение метода прямых для получения приближенных аналитических решений задач теплопроводности.* ИФЖ, стр. 743. Анотации депонираваных статей.

Самарскийй А. А., 1983г ,*Теория разностных схем*. М., Наука.

Dimova V.I. 1987, *Direct and Inverse Problems in Land Subsidence mechanics*, S., University of Mining and Geology, University Press.

Litwiniszyn J., 1974., *Stochastic Methods in Mechanics of granular bodies*. Wien, Heidelberg, New York, Springer Verlag.

Vulkov M., 1997, *A new model of stochastic medium with application in mechanics of mining subsidence*. Геомеханично осигуряване на минното производство, Несебър, 278-285.