ИНФОРМАЦИОННО – ТЕХНОЛОГИЧЕН ПОДХОД КЪМ ЕДНА ЗАДАЧА ОТ КИНЕМАТИКА НА МИННАТА МУЛДА

Михаил Вълков

[1]Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

РЕЗЮМЕ: Разгледани са възможностите за прилагане на софтуерния продукт "Mathematica 4.0" към един проблем от механика на минната мулда.
Показано е, че след поставяне на конкретната задача и нейното математическо формализиране намирането на решение чрез разглеждания софтуер (въпреки, че постановката е усложнена чрез задаването на уточнени гранични условия) не предизвиква затруднение.
Полученото решение е удобно за практическо прилагане и използването му е по силите на широк кръг специалисти.
Предлаганият информационно – технологичен подход е в съответствие с цялостното преориентиране на дейността в маркшайдерските отдели на минните предприятия към електронно (цифрово) набиране, съхранение, обработка и интерпретиране на информацията за дадено находище и прилаганите в него минни технологии.

THE ET APPROACH TOWARDS A MINING SUBSIDENCE PROBLEM

Mihail Vulkov
[1]University of Mining and Geology "St. Iv. Rilski", 1700 Sofia

ABSTRACT: The application possibilities of the software product "Mathematica 4.0" in solving a problem of the mining subsidence mechanics are studied.
It is shown that after formulating of a concrete problem and its mathematical formalization, the solution can be obtained without any mathematical complications.
This solution is highly applicable for practical purposes and it can be used by mining engineers with various qualifications.
The discussed ET approach is also connected to the global reorientation of the mining surveying department's work fields in the mining companies towards electronic (numerical) input, conservation, refining, and interpreting of the data concerning a specific mining field and the application of the mining technologies in it.

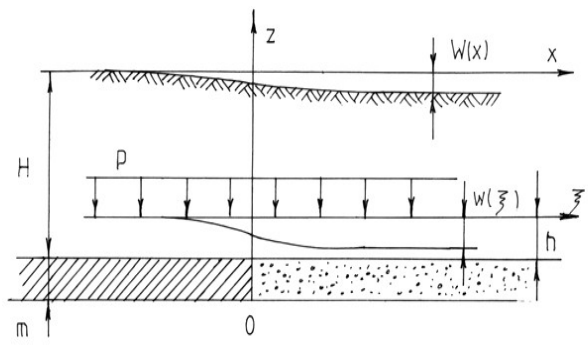
В статията се изследва проблем от механика на минната мулда.

Един от пътищата за усъвършенстване на теоретичните модели, които са базирани на задачи за диференциални уравнения с частни производни, води към уточнено задаване на граничните условия при решаване на съответната задача.

Разглежда се следният значим за практиката проблем. При подземно изземане на полезни изкопаеми в скалния масив се формира празно пространство, което нарушава равновесното състояние на масива. Започва движение на геоматериал към отработеното пространство, което обхваща всички точки от зоната на влияние на подземните минни работи и достига до земната повърхност. Там се формира падина т.нар. минна мулда, вследствие на което могат да бъдат нанесени щети на сгради, съоръжения, комуникации, природни обекти и др.

От гледна точка на една оптимална профилактика на минните щети, е необходимо още при планирането на подземните работи да се прибегне до достоверни предположения за очакваните движения на скалния масив и земната повърхност.

Формулираната по този начин от практическите нужди задача, се свързва с предварително пресмятане на преместванията, които биха възникнали в извадения от равновесие скален масив и на земната повърхност.



Фиг.1

При приемане на скалния масив за стохастична среда според I-ви модел на Й. Литвинишин (1974) и разглеждане на непосредственото горнище на иззетото пространство като тънка плоча, лежаща на еластична основа (фиг.1) според модела на А. Салустович (1956), след решаването на равнинната задача на Коши за уравнението на Фурие от Вълков (2005) са определени вертикалните премествания $W(x,z)$ със следните зависимости:

$$\overline{W_1}(x,\xi) = \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}}\left\{\int_0^{\infty}\left\{1 - \frac{\beta^2}{\beta^2+\alpha^2}\exp[-\alpha(x-\xi)]\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\sin[\beta(x-\xi)] + \cos[\beta(x-\xi)]\right)\right\}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\xi}\right]d\xi\right\},\quad x \geq 0$$

$$\overline{W_2}(x,\xi) = \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}}\frac{\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2}\int_{-\infty}^{0}\exp[\beta(x-\xi)]\left\{\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\sin[\beta(x-\xi)] + \cos[\beta(x-\xi)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\xi}\right]d\xi,\quad x < 0. \tag{1}$$

където $\overline{W_1}(x,\xi)$ е вертикалното преместване над неиззетия пласт; $\overline{W_2}(x,\xi)$ е вертикалното преместване над отработеното пространство.

След като зависимости (1) са представени във вида:

$$\overline{W_1}(x,\xi) = \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}}\left[I_1 - \frac{\beta^2}{\beta^2+\alpha^2}\left(\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}I_2 + I_3\right)\right]$$

$$\overline{W_2}(x,\xi) = \frac{W_{\max}}{2\sqrt{\pi\xi}}\frac{\alpha^2}{\beta^2+\alpha^2}\left[\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}I_4 + I_5\right], \tag{2}$$

където $I_1 = \left[\theta\left(\frac{r-x}{\sqrt{2\xi}}\right) - \theta\left(\frac{-x}{\sqrt{2\xi}}\right)\right]$

От Вълков (2005) за решаване на влизащите в (2) интеграли е използвана формулата на Боне.

Така за интегралите I_2 и I_3 се намира:

$$I_2 = \frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{x^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\sin[-\alpha(x-\eta_1)] - \cos[-\alpha(x-\eta_1)]}{2}\cdot\exp[-\alpha(x-\eta_1)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin(-\alpha x) - \cos(-\alpha x)}{2}\cdot\exp(-\alpha x)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{(x-r)^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\sin[-\alpha(x-r)] - \cos[-\alpha(x-r)]}{2}\cdot\exp[-\alpha(x-r)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin[-\alpha(x-\eta_1)] - \cos[-\alpha(x-\eta_1)]}{2}\cdot\exp[-\alpha(x-\eta_1)]\right\}$$

$$I_3 = \frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{x^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\cos[-\alpha(x-\eta_2)] + \sin[-\alpha(x-\eta_2)]}{2}\cdot\exp[-\alpha(x-\eta_2)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(-\alpha x) + \sin(-\alpha x)}{2}\cdot\exp(-\alpha x)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\exp\left[-\frac{(x-r)^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\cos[-\alpha(x-r)] + \sin[-\alpha(x-r)]}{2}\cdot\exp[-\alpha(x-r)] - \right. \tag{3}$$

$$\left. - \frac{\cos[-\alpha(x-\eta_2)] + \sin[-\alpha(x-\eta_2)]}{2}\cdot\exp[-\alpha(x-\eta_2)]\right\},$$

където $0 < \eta_i < r \quad (i = 1,2)$,

а за I_4 и I_5 - съответно:

$$I_4 = \frac{1}{\beta}\exp\left[-\frac{(x+r)^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\sin[\beta(x+r)]-\cos[\beta(x+r)]}{2}\cdot\exp[\beta(x+r)]-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin[\beta(x-\eta_3)]-\cos[\beta(x-\eta_3)]}{2}\cdot\exp[\beta(x-\eta_3)]\right\}+$$
$$+\frac{1}{\beta}\exp\left[-\frac{x^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\sin[\beta(x-\eta_3)]-\cos[\beta(x-\eta_3)]}{2}\cdot\exp[\beta(x-\eta_3)]-\right.$$
$$\left.-\frac{\sin(\beta x)-\cos(\beta x)}{2}\cdot\exp(\beta x)\right\};$$
$$I_5 = \frac{1}{\beta}\exp\left[-\frac{(x+r)^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\cos[\beta(x+r)]+\sin[\beta(x+r)]}{2}\cdot\exp[\beta(x+r)]-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos[\beta(x-\eta_4)]+\sin[\beta(x-\eta_4)]}{2}\cdot\exp[\beta(x-\eta_4)]\right\}+$$
$$+\frac{1}{\beta}\exp\left[-\frac{x^2}{4\xi}\right]\cdot\left\{\frac{\cos[\beta(x-\eta_4)]+\sin[\beta(x-\eta_4)]}{2}\cdot\exp[\beta(x-\eta_4)]-\right. \tag{4}$$
$$\left.-\frac{\cos(\beta x)+\sin(\beta x)}{2}\cdot\exp(\beta x)\right\},$$

където; $-r<\eta_j<0 \quad (j=3,4)$.

Решението на I_1 не представлява проблем, тъй като влизащата в него функция е табулирана $\theta(r)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^r \exp(-0{,}5t^2)\,dt$ (Borecki, 1980).

Както е известно, формулата на Боне се базира на теоремите за средна стойност на определен интеграл. Сериозно затруднение за прилагането на релации (3) и (4) представлява определянето на стойностите η_i (i = 1, 2) и η_j (j = 3, 4). То е свързано с провеждането на редица числени експерименти.

Тук за определяне на вертикалните премествания в зоната на влияние на подземните минни работи се използва подход, който може да бъде определен като информационно-технологичен. За пресмятане на интегралите, влизащи в релации (2), е използван програмен продукт “Mathematica 4.0”. Избраният софтуер се ползва при провеждане на сложни изчисления. Има приложение при научни изследвания, в инженерни анализи и при моделиране на сложни задачи, там където се прилагат количествени методи.

Интегралът I_2 се записва във вида:

$$I_2=\int_0^r \sin[\beta(x-s)]\exp\left[-\alpha(x-s)-c(x-s)^2\right]ds,$$

където $c=\frac{1}{4\xi}$; $a=\alpha$; $b=\beta$.

За I_2 използваната програма дава следното решение:

$$I_2=-\frac{e^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha+i\beta+2cx}{2\sqrt{c}}\right]+Erfi\left[\frac{i\alpha+\beta+2icx}{2\sqrt{c}}\right]\right)}{4\sqrt{c}}+\frac{1}{4\sqrt{c}},$$
$$\left(e^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha+i\beta+2c(-r+x)}{2\sqrt{c}}\right]+Erfi\left[\frac{i\alpha+\beta+2ic(-r+x)}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right)$$

където $Erf(z_0,z_1)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{z_0}^{z_1}e^{-t^2}dt$;

$Erfi(z)=erf(iz)/i$; i е имагинерната единица.

Зависимостта за I_2 може да бъде опростена чрез опцията Simplify на програмния продукт.

Опростената зависимост за I_2 има вида:

$$I_2^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}}\left(e^{\frac{(\alpha - i\beta)^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha + i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{i}e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha + i\beta - 2cr + 2cx}{2\sqrt{c}}\right] - Erfi\left[\frac{i\alpha + \beta + 2icx}{2\sqrt{c}}\right] + Erfi\left[\frac{i\alpha + \beta + 2ic(-r + x)}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right).$$

За интеграла I_3 се намира:

$$I_3 = \int_0^r cos[\beta(x - s)]exp\left[-\alpha(x - s) - c(x - s)^2\right]ds =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{c}}\left(ie^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-iErf\left[\frac{\alpha + i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}}\right] + e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erfi\left[\frac{-i\alpha + \beta - 2icx}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right) - \frac{1}{4\sqrt{c}}$$

$$\left(ie^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-iErf\left[\frac{\alpha - i\beta + 2c(-r + x)}{2\sqrt{c}}\right] + e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erfi\left[\frac{-i\alpha + \beta - 2ic(-r + x)}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right).$$

Опростеният вид се записва, както следва:

$$I_3^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}}\left(e^{\frac{(\alpha - i\beta)^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(Erf\left[\frac{\alpha - i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}}\right] - Erf\left[\frac{\alpha - i\beta - 2cr + 2cx}{2\sqrt{c}}\right] - \right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{i}e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}\left(Erfi\left[\frac{-i\alpha + \beta + 2ic(r - x)}{2\sqrt{c}}\right] - Erfi\left[\frac{-i\alpha + \beta - 2icx}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right)\right)$$

За интеграла I_4 се получава:

$$I_4 = \int_{-r}^0 sin[\beta(x - s)]exp\left[-\alpha(x - s) - c(x - s)^2\right]ds =$$

$$= \frac{e^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha + i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}}\right] + Erfi\left[\frac{i\alpha + \beta + 2icx}{2\sqrt{c}}\right]\right)}{4\sqrt{c}} - \frac{1}{4\sqrt{c}}$$

$$\left(e^{\frac{\alpha^2}{4c} - \frac{i\alpha\beta}{2c} - \frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha + i\beta + 2c(r + x)}{2\sqrt{c}}\right] + Erfi\left[\frac{i\alpha + \beta + 2ic(r + x)}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right)$$

и в опростен вид

$$I_4^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}}\left(e^{\frac{(\alpha - i\beta)^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-ie^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha + i\beta + 2cx}{2\sqrt{c}}\right] + \right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{i}e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erf\left[\frac{\alpha + i\beta + 2c(r + x)}{2\sqrt{c}}\right] + Erfi\left[\frac{i\alpha + \beta + 2icx}{2\sqrt{c}}\right] - Erfi\left[\frac{i\alpha + \beta + 2ic(r + x)}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right).$$

Аналогично за I_5 се намира:

$$I_5 = \int_{-r}^0 \cos[\beta(x - s)]\exp\left[-\alpha(x - s) - c(x - s)^2\right]ds =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{c}}\left(ie^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-iErf\left[\frac{\alpha-i\beta+2cx}{2\sqrt{c}}\right]+e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erfi\left[\frac{-i\alpha+\beta-2icx}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right)+\frac{1}{4\sqrt{c}}$$

$$\left(ie^{\frac{\alpha^2}{4c}-\frac{i\alpha\beta}{2c}-\frac{\beta^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-iErf\left[\frac{\alpha-i\beta+2c(r+x)}{2\sqrt{c}}\right]+e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}Erfi\left[\frac{-i\alpha+\beta-2ic(r+x)}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right).$$

Опростеният му вид е

$$I_5^* \approx \frac{1}{4\sqrt{c}}\left(e^{\frac{(\alpha-i\beta)^2}{4c}}\sqrt{\pi}\left(-Erf\left[\frac{\alpha-i\beta+2cx}{2\sqrt{c}}\right]+Erf\left[\frac{\alpha-i\beta+2c(r+x)}{2\sqrt{c}}\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathrm{i}e^{\frac{i\alpha\beta}{c}}\left(Erfi\left[\frac{-i\alpha+\beta-2icx}{2\sqrt{c}}\right]-Erfi\left[\frac{-i\alpha+\beta-2ic(r+x)}{2\sqrt{c}}\right]\right)\right)\right).$$

Решенията на интегралите I_2, I_3, I_4 и I_5 се представят в комплексната равнина, което е особеност на ползвания софтуер. При числени експерименти се установява, че имагинерната част е безкрайно малка. В разглежданите случаи имагинерната част съдържа множители от порядъка 10^{-100}, т.е. резултатите са чисто реални величини.

От съпоставянето на двата подхода могат да се направят следните изводи:

Като недостатъци на първото решение могат да се изтъкнат:

- трудното определяне на константите, η_j за прилагане формулата на Боне;
- необходимост от съставяне на (макар и проста) програма за пресмятане на слягането по зависимости (2), след като в тях бъдат заместени релациите за I_2, I_3, I_4 и I_5;
- необходимост от персонал със значителен опит (в съответните маркшайдерски отдели, следящи преместванията на земната повърхност).

Съществени предимства на информационно-технологичния подход са свързани с:

- фактора време за решаване на задачите;
- липса на допълнителни усложнения при провеждане на решението;
- тежестта на изследователската работа е пренесена на правилното място – там където се прави научният анализ и се формулират важните за практиката задачи. Ползваният продукт (както и неговите по-късни версии и аналози) дава увереност на изследователя, че поставеният проблем, въпреки неговата сложност, ще бъде решен бързо и ефективно.

В заключение трябва да се подчертае, че информационно технологичният подход е в съответствие и с цялостното преориентиране на дейността в маркшайдерските отдели на минните предприятия към електронно (цифрово) набиране, съхранение, обработка и интерпретиране на информация за дадено находище и прилаганите в него технологии.

Литература

Будрык, В. и др. 1956, *Вопросы расчета сдвижении поверхности под влиянием горных разработок*, Москва, Углетехиздат, стр.64.

Вълков М. 2005, *За уточненото задаване на граничните условия в стохастичната теория на Й. Литвинишин*, С., Научна конференция с международно участие ВСУ 2005, стр. VII-77÷VII-81.

Litwiniszyn J., 1974., Stochastic Methods in Mechanics of granular bodies. Wien, Heidelberg, New York, Springer Verlag.

Borecki H., 1980(red.) Ochrona powirzchni, Katowice, Slask.

Препоръчана за публикуване от катедра
"Техническа механика", МТФ