ИЗСЛЕДВАНЕ НА ЕДИН МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛ НА ЧЕТИРИПРОВОДНА ПРЕДАВАТЕЛНА ЛИНИЯ

Любомир Георгиев, Васил Ангелов

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, e-mail: lubo_62@mgu.bg
Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, e-mail: angelov@mgu.bg

РЕЗЮМЕ. Представено е общото решение на една система от диференциални уравнения, характеризираща модела на четирипроводна предавателна линия.

INVESTIGATION ON MATHEMATICAL MODEL OF FOUR-CONDUCTOR TRANSMISSION LINE
Vasil Angelov, Ljubomir Georgiev
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, e-mail: lubo_62@mgu.bg

ABSTRACT: A solution of system of differential equations, arising in the model of four-conductor line is presented.

Въведение

Актуалността на проблемите на електромагнитната съвместимост са изложени в книгите на C.R. Paul (1992, 1994, 2002). В настоящата работа се изследва един модел на елекромагнитната съвместимост на четирипроводна предавателна линия, представен от В. Ангелов (2006). Там се поставя задачата за намиране най-напред на общото решение на една система от 6 диференциални уравнения със 6 неизвестни - напреженията (u_k) и токовете $(i_k), k = 1, 2, 3$, на трите предавателни линии (за четвърта е прието замасяване или заземяване). Основната цел на настоящия доклад е представянето на полученото общо решение.

Постановка на задачата

Разглеждаме системата

$$\frac{du}{dt} + M\frac{du}{dx} = 0\,, \tag{1}$$

където $u = (u_1, i_1, u_2, i_2, u_3, i_3)^T = u(t, x)$ е 6-мерна вектор-функция на позицията x и времето t, $\frac{du}{dt}, \frac{du}{dx}$ - съответните производни, а M е 6×6-матрица:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 & 0 & C_6 \\ D_1 & 0 & D_3 & 0 & D_5 & 0 \\ 0 & C_6 & 0 & C_2 & 0 & C_4 \\ D_5 & 0 & D_1 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & C_4 & 0 & C_6 & 0 & C_2 \\ D_3 & 0 & D_5 & 0 & D_1 & 0 \end{pmatrix},$$

чийто елементи са както следва:

$$C_2 = \frac{(1+\alpha)^2}{C_\alpha}, C_4 = \frac{\alpha(1+\alpha)}{C_\alpha}, C_6 = \frac{\alpha^2}{C_\alpha}$$

$$C_\alpha = C(1 + 3\alpha + 3\alpha^2);$$

$$D_1 = \frac{1}{L_\alpha}, D_3 = -\frac{\alpha}{L_\alpha}, D_5 = \frac{\alpha^2}{L_\alpha}$$

$$L_\alpha = L(1+\alpha^3) \quad (\alpha = const > 0).$$

Търсим общото решение на (1).

Основен резултат

Теорема: Нека $f_1(p), f_2(p)$ са произволни диференцируеми функции и нека двойките (хармонични) функции $(g_3, h_3), (g_4, h_4)$ са произволни решения на системата (условия) на Коши-Риман, т.е.

$$(g_k)'_x = (h_k)'_y, (h_k)'_x = -(g_k)'_y \ (k = 1, 2)$$

Тогава общото решение u на системата (1) има координати:

$$u_1 = \frac{f_1(x - t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) - f_2(x + t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3C}} + \frac{\theta(t,x) - \sqrt{3}\beta(t,x)}{\sqrt{3}};$$

$$i_1 = \frac{f_1(x - t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) + f_2(x + t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3L(1+\alpha)}} + \frac{\gamma(t,x) - \sqrt{3}\delta(t,x)}{\sqrt{3}};$$

$$u_2 = \frac{f_1(x - t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) - f_2(x + t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3C}} + \frac{\theta(t,x) + \sqrt{3}\beta(t,x)}{\sqrt{3}};$$

$$i_2 = \frac{f_1(x - t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) + f_2(x + t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3L(1+\alpha)}} + \frac{\gamma(t,x) + \sqrt{3}\delta(t,x)}{\sqrt{3}};$$

$$u_3 = -\frac{2\theta(t,x)}{\sqrt{3}} + \frac{f_1(x - t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) - f_2(x + t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3C}};$$

$$i_3 = -\frac{2\gamma(t,x)}{\sqrt{3}} + \frac{f_1(x - t/\sqrt{LC(1+\alpha)}) + f_2(x + t/\sqrt{LC(1+\alpha)})}{\sqrt{3L(1+\alpha)}},$$

където функциите (на (t,x)) $\theta, \beta, \gamma, \delta$ се изразяват чрез g_3, h_3, g_4 и h_4 както следва:

$$\theta(t,x) = R_c[g_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) - g_4(x + tR_\mu, tI_\mu)] - I_c[h_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) - h_4(x + tR_\mu, tI_\mu)];$$

$$\beta(t,x) = R_c[h_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) - h_4(x + tR_\mu, tI_\mu)] + I_c[g_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) - g_4(x + tR_\mu, tI_\mu)];$$

$$\gamma(t,x) = R_d[g_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) + g_4(x + tR_\mu, tI_\mu)] - I_d[h_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) + h_4(x + tR_\mu, tI_\mu)];$$

$$\delta(t,x) = R_d[h_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) + h_4(x + tR_\mu, tI_\mu)] + I_d[g_3(x - tR_\mu, -tI_\mu) + g_4(x + tR_\mu, tI_\mu)],$$

$$R_c = \sqrt{\frac{c_0}{2}(1 + \varphi(\alpha))}, I_c = -\sqrt{\frac{c_0}{2}(1 - \varphi(\alpha))}$$

$$(c_0 = \frac{1}{C\sqrt{1 + 3\alpha + 3\alpha^2}}, \quad \varphi(\alpha) = \frac{2 + 3\alpha}{2\sqrt{1 + 3\alpha + 3\alpha^2}}),$$

$$R_d = \sqrt{\frac{d_0}{2}(1 + \psi(\alpha))}, I_d = \sqrt{\frac{d_0}{2}(1 - \psi(\alpha))}$$

$$(d_0 = \frac{1}{L\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}, \quad \psi(\alpha) = \frac{2 - \alpha}{2\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}),$$

$$R_\mu = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}(1 + \chi(\alpha))}, I_\mu = \sqrt{\frac{\mu_0}{2}(1 - \chi(\alpha))}$$

$$(\mu_0 = c_0 d_0, \quad \chi(\alpha) = \frac{1 + \alpha}{\sqrt{(1 + \alpha)^2 + 3\alpha^4}}).$$

Преди да преминем към доказателството, отбелязваме, че тъй като α е малко положително число, стойностите на функциите $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ и $\chi(\alpha)$ са по-малки, но приблизително равни на 1 - съответно I_c, I_d и I_μ са приблизително равни на 0, а $R_c \approx \sqrt{c_0} \approx \sqrt{\frac{2}{C(2 + 3\alpha)}}$,

$$R_d \approx \sqrt{d_0} \approx \sqrt{\frac{2}{L(2 - \alpha)}},$$

$$R_\mu \approx \sqrt{c_0 d_0} \approx \frac{1}{\sqrt{LC(1 + \alpha)}}.$$

Основни елементи от доказателството:

Тук ще скицираме само основните елементи от доказателството на теоремата. Представянето на подробното доказателство ще бъде изложено в следваща работа.

Обикновено най-напред се търсят собствените стойности на матрицата M. Втората степен на M е циркулантата

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & m_2 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 & m_2 & 0 & m_4 \\ m_4 & 0 & m_0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & m_4 & 0 & m_0 & 0 & m_2 \\ m_2 & 0 & m_4 & 0 & m_0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & m_4 & 0 & m_0 \end{pmatrix}, \text{ където}$$

$$(m_0 m_2 m_4) = (C_2 C_4 C_6) \begin{pmatrix} D_1 D_3 D_5 \\ D_5 D_1 D_3 \\ D_3 D_5 D_1 \end{pmatrix}.$$

Намираме собствените стойности на M^2 - те са стойностите на $f(p) = m_0 + m_2 p^2 + m_4 p^4$, когато

p описва множеството от всички 6-ти корени на 1: $p_1 = 1,\ p_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$;

$p_3 = -\overline{p_2},\ p_4 = -p_1,\ p_5 = -p_2, p_6 = \overline{p_2}$.

Тогава числата:

$\mu_1 = f(\pm 1) = m_0 + m_2 + m_4$,

$\mu_2 = f(\pm \overline{p_2}) = m_0 - m_2 p_2 - m_4 \overline{p_2}$,

$\overline{\mu_2} = f(\pm p_2) = m_0 - m_2 \overline{p_2} - m_4 p_2$

са трите различни (и трите - двукратни) собствени стойности на M^2.

В частност собствените стойности на M са:

$\pm\lambda, \pm\mu, \pm\overline{\mu} : \lambda^2 = \mu_1 = \dfrac{1}{CL(1+\alpha)}$;

$$\mu^2 = \mu_2 = \frac{(1+\alpha) + i\sqrt{3}\alpha^2}{CL(1 + 3\alpha + 3\alpha^2)(1 - \alpha + \alpha^2)}.$$

Умножаваме отляво двете страни на (1) с M, въвеждаме нова вектор-функция $u = Tv$, където T е матрицата, за която $T^{-1}M^2T = P = diag\left(\mu_1 \mu_1 \mu_2 \mu_2 \overline{\mu_2}\,\overline{\mu_2}\right)$, след това умножаваме още веднъж отляво с T^{-1} и получаваме (с $N = T^{-1}MT$) системата:

$$N\frac{dv}{dt} + P\frac{dv}{dx} = 0. \tag{2}$$

Последната система се състои от три независими системи от по две уравненни с две неизвестни, тъй като

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu & 0 & \overline{\nu} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \nu & 0 & \overline{\nu} \\ 1 & 0 & \overline{\nu} & 0 & \nu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \overline{\nu} & 0 & \nu \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\nu = p_2);$$

$$N = T^{-1}MT = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{c_\nu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{d_\nu} & 0 \end{pmatrix},$$

където

$$c = \frac{1}{C}, d = \frac{1}{L(1+\alpha)}\ (cd = \lambda^2);$$

$$c_\nu = \frac{1}{C(1 + \alpha + \alpha\nu)}, d_\nu = \frac{1}{L(1 - \alpha\nu)}\ (c_\nu d_\nu = \mu^2).$$

Системата от първите две уравнения в (2) е еквивалентна на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dv_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dv_1}{dx} \\ \dfrac{dv_2}{dx} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \tag{3}$$

чието общо решение е двумерната вектор-функция с координати:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{C}}[f_1(x - t\lambda) - f_2(x + t\lambda)]$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{L(1+\alpha)}}[f_1(x - t\lambda) + f_2(x + t\lambda)]$$

с произволни диференцируеми функции на една реална променлива f_1 и f_2.

Системата от третото и четвъртото от уравненията в (2) е еквивалентна на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dv_3}{dt} \\ \dfrac{dv_4}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_\nu \\ d_\nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{dv_3}{dx} \\ \dfrac{dv_4}{dx} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Системата (4) се състои от две уравнения с комплексни коефициенти за две неизвестни функции (на (t,x)) с комплексни стойности. Нейното общо решение е двумерната вектор-функция с координати:

$$\begin{aligned} v_3 &= \theta(t,x) + i\beta(t,x) \\ v_4 &= \gamma(t,x) + i\delta(t,x), \end{aligned} \tag{5}$$

където $\theta, \beta, \gamma, \delta$ са представените по-горе функции с реални стойности на двойната променлива (t,x).

Поставеното условие (на Коши-Риман) за двойките функции $(g_3, h_3), (g_4, h_4)$, заедно с избора на числата R_c, I_c, R_d, I_d:

$(R_c + iI_c)^2 = c_\nu$, $(R_d + iI_d)^2 = d_\nu$, е достатъчно общото решение на (4) да се задава с (5).

Системата от последните две уравнения в (2) е с коефициенти пред неизвестните v_5 и v_6, които са комплексно спрегнати на съответните коефициенти в (4).

Тъй като търсим реални решения на поставената в началото задача, а от смяната $u = Tv$ следва

$$v = T^{-1}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} u_1 + u_2 + u_3 \\ i_1 + i_2 + i_3 \\ \bar{\nu}\, u_1 + \nu\, u_2 - u_3 \\ \bar{\nu}\, i_1 + \nu\, i_2 - i_3 \\ \nu\, u_1 + \bar{\nu}\, u_2 - u_3 \\ \nu\, i_1 + \bar{\nu}\, i_2 - i_3 \end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$v_5 = \overline{v_3},\ v_6 = \overline{v_4}$, решението на последната система е вектор-функция с координати:

$$v_5 = \theta(t,x) - i\beta(t,x)$$

$$v_6 = \gamma(t,x) - i\delta(t,x).$$

Общото решение на (1) $u = (u_1, i_1, u_2, i_2, u_3, i_3)^T$ получаваме като заместим намерените $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ в първоначалната смяна $u = Tv$:

Препоръчана за публикуване от катедра “Математика”, МТФ

$$u_1 = \frac{v_1 + \operatorname{Re} v_3 - \sqrt{3}\operatorname{Im} v_3}{\sqrt{3}} = \frac{v_1 + \theta - \sqrt{3}\beta}{\sqrt{3}};$$

$$i_1 = \frac{v_2 + \operatorname{Re} v_4 - \sqrt{3}\operatorname{Im} v_4}{\sqrt{3}} = \frac{v_2 + \gamma - \sqrt{3}\delta}{\sqrt{3}};$$

$$u_2 = \frac{v_1 + \operatorname{Re} v_3 + \sqrt{3}\operatorname{Im} v_3}{\sqrt{3}} = \frac{v_1 + \theta + \sqrt{3}\beta}{\sqrt{3}};$$

$$i_2 = \frac{v_2 + \operatorname{Re} v_4 + \sqrt{3}\operatorname{Im} v_4}{\sqrt{3}} = \frac{v_2 + \gamma + \sqrt{3}\delta}{\sqrt{3}};$$

$$u_3 = \frac{v_1 - 2\operatorname{Re} v_3}{\sqrt{3}} = \frac{v_1 - 2\theta}{\sqrt{3}};$$

$$i_3 = \frac{v_2 - 2\operatorname{Re} v_4}{\sqrt{3}} = \frac{v_2 - 2\gamma}{\sqrt{3}},$$

което приключва доказателството на теоремата.

Литература

Paul, C. R. 1992: Introduction to electromagnetic compatibility, *Wiley InterScience, New York* (1992)

Paul, C. R. 1994: Analysis of multiconductor transmission lines, *A Wiley InterScience Publication, J. Wiley&Sons, New York* (1994)

Paul, C. R. 2002: Solution on the transmission line equations under weak-coupling assumption, *IEEE Transactions on Electromagnetic compatibility, v.44, №3 (2002), 413-423*

Angelov, V. G. 2006: Investigation on electromagnetic compatibility of four-conductor transmission line, *Proceedings International Conference VSU 2006, Sofia – Bulgaria, vol I, 55-60*

Ангелов, В. Г. 2003: Намиране на напреженията на прислушване в трипроводна предавателна линия, *ЮНС 2003, ВСУ "Л. Каравелов",* 93-99