

## ОРАЗМЕРЯВАНЕ УКРЕПВАНЕТО НА ЦЕЛИЦИ КАТО ТРИМЕРНИ ТЕЛА

**Юлиян Димитров**

*Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, България, juldin@abv.bg*

**РЕЗЮМЕ.** Геомеханичните модели се характеризират с големи относителни грешки на основни определящи параметри на процесите, като компоненти на напрежението, деформационни показатели и други. Методите за извеждане на зависимости между параметрите на скалния масив често водят до неточни и противоречиви резултати. Необходимо е създаването на числени модели на геомеханиката, които да представят достатъчно точно процесите в скалния масив. В настоящия материал е приложено усъвършенстване на числения модел на укрепен скален масив. Оразмеряват се целици като тримерни тела при различни основни форми на обрушаване и различни условия на контакт. Предложеният подход е приложим при численото моделиране в геомеханиката.

### COMPUTE OF PILLARS BOLTING AS THREE DIMENSIONAL OPTIMAL BODIES

**Yulian Dimitrov**

*University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, juldin@abv.bg*

**ABSTRACT.** The geomechanical models are characterizing with the large relative errors of basic decisive parameters of the processes as components of the stress, deformation parameters and etc. The methods for receiving of dependence between parameters of rock mass often follow to inexact and contradictory results. It is necessary to create numerical models of geomechanics that will present with sufficient precision the processes in rock mass. In this material is applied refinement of numerical model of reinforced rock mass. Pillars are compute as three-dimensional bodies at different basic forms of caving and with different conditions of contact. The offered approach is applicable in numerical modeling in geomechanic.

### Увод

Създаването на подземни минни съоръжения е свързано с оразмеряване на иззети пространства от скалния масив и на специални скални тела (целици), разделящи тези пространства или включени в тях.

При проектирането на минните съоръжения, основна е информацията за механичните свойства на скалата. За оразмеряване на целиците се прилага теорията на Шевяков за равномерното разпределение на натоварването (Шевяков, 1941), методи на непрекъснатите среди и методи на граничното състояние на материала. Оценката на якостта на целика може да се получи чрез сравняване на действащите в целика напрежения с допустимите напрежения.

При прилагането на моделите, данните с които се работи имат определена точност. Като се изследва структурата на данните на даден модел при системната работа с тях могат да се получат важни свойства, отнасящи се до приложението на модела. По технологични съображения в зависимост от формите на обрушаване на целика, той може да се представи чрез дискретни моделни елементи (Димитров, 2005).

### Цел

Да се представи целика чрез скални тела (моделни елементи) със специални свойства и съответна форма на сечението.

Да се предложи метод за оразмеряване на моделния елемент, като тримерна задача за нехомогенно еластично тяло с променящи се стойности на еластичните константи.

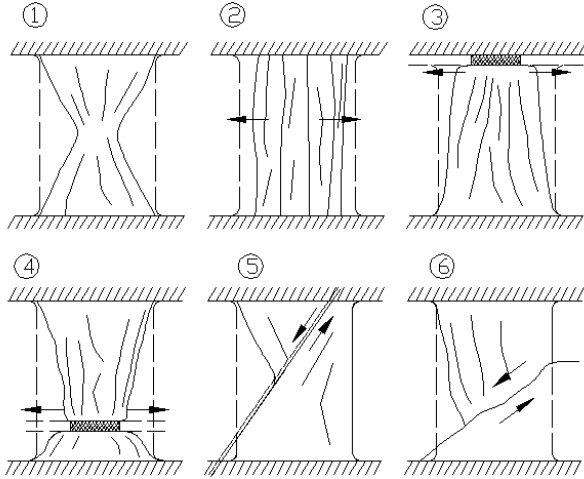
### Основни форми на обрушаване на целика и представянето му чрез моделни елементи

При минни съоръжения с камерно – стълбова система на добив, основен подпорен елемент е целикът. Първоначално формата на целика е на призматично тяло, запънато в тавана и пода. След определено време целикът минава в пределно състояние, след което част от него се разрушава. В зависимост от геомеханичните условия, целикът придобива някои от характерните форми, представени на фиг. 1 съгласно Борщ-Компонинец и Макаров (1986).

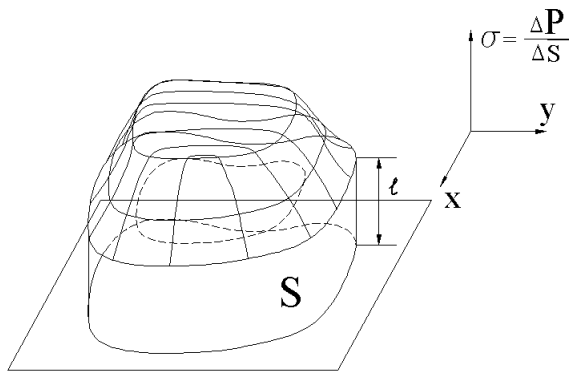
В зависимост от формата, която би се получила след преминаване в гранично състояние, целикът може да се представи като едно или две запънати тела. За целите, на решаването на задачи за оразмеряване на целиците и анкерната мрежа при тяхното анкериране, е особено важно определянето на полето на напреженията на скалата преди преминаване в гранично състояние.

Разгледаните различни случаи на фиг.1 могат да се представят чрез призматично тяло, запънато в единия

край. Поради различни механични и технологични причини физико-механичните свойства на скалните тела се променят до преминаването им в пределно състояние. За построяване на модела на целика ще използваме моделен елемент, който може да се илюстрира със случай 3. от фиг.1 - целик, със слаб контакт при горнището. Съгласно (Фисенко, 1976; Brady and Brown, 1993) целикът има характерна форма на графиката на гранично натоварване (фиг. 2).



Фиг. 1. Основни форми на обрушаване на целика : 1. – при пълно сцепление на горнището и долнището; 2. – без сцепление при горнището и долнището; 3. – при наличие на пластична прослойка при горнището; 4. – наличие на пластична прослойка в целика; 5. – наличие на разлом (тектонско нарушение); 6. – при разработване на залежи с различна мощност



Фиг. 2. Графиката на граничното натоварване на целик

Прилагаме линейна наследствена теория за еластичното състояние на скалата съгласно Амусин и Линьков (1973). В състояние близко до граничното можем да смятаме, че целикът все още има еластични свойства, но еластичните константи са променящи се във времето функции:

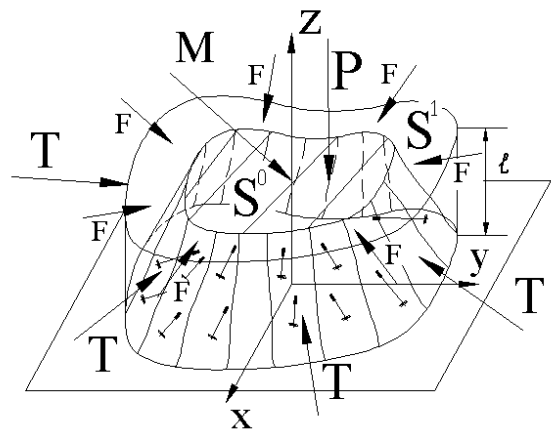
$$v_t = \frac{v + 0.5\psi(t)}{1 + \psi(t)}, \quad (1)$$

$$G_t = \frac{2G(1+v)}{2(1+v) + 3\psi(t)} = \frac{G}{1 + \frac{3\psi(t)}{2(1+v)}}. \quad (2)$$

Поради деформациите модулът на срязване  $G = G(x, y, z)$  е с намалени стойности по външните

части на целика, където тялото е подложено на по-големи деформации. В съответствие с графиката на натоварването на моделния елемент (фиг. 2) приемаме, че той се състои от две части – ядро (вътрешна част) с трапецовидна форма, която има модул на срязване  $G_M = G_t = const$ , характерен за скалния материал при пространствено напрегнато състояние и външна част, на която модулът на срязване е с намалени стойности. Приемаме  $v = v_t = const$ . Това е в сила при анкерен крепеж, който се прилага в началото преди започване на обрушаването на скалното тяло. Тогава изменението на  $v$  е пренебрежимо малко.

В Николаев (1989) е даден видът на функцията  $\psi(t)$  и числени стойности на параметрите, които я определят. Като пример при условия на слаби скали (въглища):



$E = 100 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.25$ ,  $G = 40 \text{ MPa}$ . За  $t = 4 \text{ дни}$   $\psi(t) = 48.65 \cdot 10^{-3}$  и за външната част на скалното тяло еластичните параметри стават  $v_t = 0.262$  и  $G_t = 37.8 \text{ MPa}$ .

За определяне на напрегнатото състояние на моделния елемент ще приемем, както в Димитров (2005), че това скално тяло е изотропно нехомогенно тяло с форма на права призма с височина  $l$ , поставено с основата си в хоризонтална равнина  $Oxy$  (фиг.3). Оста  $\vec{Oz}$  минава по инерционните центрове на хоризонталните сечения на призматичното тяло. По горната основа на тялото е приложено усилие  $P$ . За разгледания случай 3 от фиг.1

средната стойност на усилието е  $\bar{P} = \gamma H_{\parallel} \frac{S_{\parallel}}{S_{II}}$ , където

$H_{\parallel}$  и  $S_{\parallel}$  са приведените височина и площ на призматична област, която поддържа целика. И  $S_{II}$  е площта на сечението на целика. При определени условия, може да приемем, че върху скалния елемент е приложен и момент  $M$ . За случаите 1 – 4 на фиг. 1  $M = 0$ . По околната повърхнина са монтирани анкери, които осигуряват вертикално на повърхнината анкерно усилие равно на  $T$  [ $\text{т/м}^2$ ].

Фиг. 3. Модел на укрепено скално тяло

Нека при  $z = l$  имаме интегрални гранични условия

$$\int_{S^i} \sigma_z(x, y, l) ds = P_z^i, \int_{S^i} \tau_{xz}(x, y, l) ds = P_x^i, \quad (3)$$

$$\int_{S^i} \tau_{yz}(x, y, l) ds = P_y^i, \quad (4)$$

$$\int_{S^i} x\tau_{yz}(x, y, l) - y\tau_{xz}(x, y, l) ds = M_z^i, \quad (5)$$

$$\int_{S^i} y\sigma_z(x, y, l) ds = M_x^i, \int_{S^i} x\sigma_z(x, y, l) ds = M_y^i, \quad (6)$$

където  $P_x^i, P_y^i, P_z^i, M_x^i, M_y^i$  и  $M_z^i$  са компоненти на усилието и момента в  $i$ -та част  $S^i$  от горната граница на скалното тяло. При така разглеждания моделен елемент ще използваме две части от горната граница - част  $S^0$  над ядрото и  $S^1$  над останалата част от тялото.

За външната стена имаме

$$\begin{cases} \overline{\sigma_x} n_x + \overline{\tau_{xy}} n_y = \overline{T} n_x \\ \overline{\tau_{xy}} n_x + \overline{\sigma_y} n_y = \overline{T} n_y \end{cases} \quad (7)$$

където  $\overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_y}, \overline{\tau_{xy}}$  и  $\overline{T}$  са средните стойности на съответните параметри, определени за дадена област ("пълзящ прозорец") от стената на тялото и  $n = (n_x, n_y)$  е единичен и нормален векторът за тази част от околната повърхнина. Ако скалното тяло не е анкерирано то  $T = 0$ .

За получаване на оптимален числен модел, задачата за определяне на напрегнатото състояние на целика разглеждаме като задача за изотропно нехомогенно тяло. Случаят 2 от фиг.1 можем да представим с един моделен елемент, при който ядрото е призматично тяло - частен случай на трапецовидно тяло. Случаите 1 и 4 от фиг.1 се представят с по два моделни елемента, от които вторият е обърнат така, че да се образува характерната за тези случаи форма. Методът, който се разглежда тук е достатъчно общ и е възможно при определени ограничения да се адаптира и за случаите 5 и 6 от фиг.1, но тук няма да обсъждаме този въпрос.

### Определяне на напрегнатото състояние на моделния елемент

За да се оразмери анкерния крепеж на целик е необходимо да се реши задачата за определяне на напрегнатото състояние на анкерирания моделен елемент. При оразмеряването на скално тяло се използват: якостните параметри на масива (Фисенко, 1976), коефици-

циент на структурно отслабване (Борщ-Компонинец и Макаров, 1986) или чрез аналогия с други идеализирани модели, развити като методи за определяне на граничното напрегнато състояние. Основното в идеализираната схема е, че скалното тяло е обемно напрегнато. Усилието  $P$ , приложено върху горната граница на целика непосредствено създава главното максимално напрежение  $\sigma_1$  във вътрешността на целика, а минималното главно напрежение  $\sigma_3$  е с хоризонтално направление (странично приложено) и се създава от силата  $F$  на съпротивление в горницето. При наличие на сцепление с горницето и долницето и при наличие на странично анкерирано усилие  $\sigma_3$  се увеличава.

В зависимост от различните приложни теории при анкерирането се подобряват стойностите на съответни приведени параметри:

- По теорията на Мор, окръжността на главните напрежения се придвижва на дясно, в резултат на което стойността на разрушаващото тангенциално напрежение се увеличава;
- Чрез отчитане на промяната на коефициента на структурно отслабване се получава приведен параметър укрепване на целик (Борщ-Компонинец и Макаров, 1986);
- По метода на граничното равновесие се определя "запас на якост" по повърхнините на приплъзване (Борщ-Компонинец и Макаров, 1986);
- По метода на "структурно армиране" се определя параметър укрепване по опънови напрежения.

Въпреки, че основно се работи с равнинно напрегнато или равнинно деформирано състояние съгласно схемите на деформациите и разрушенията в целика, дадени от Фисенко (1976) и Brady and Brown (1993) могат да се направят следните изводи:

1. Целикът е подложен на вертикални и хоризонтални усилия, приложени в мястото на контакт с горницето, по определена схема, в зависимост от:
  - сцеплението в горницето и долницето;
  - хоризонталните геометрични параметри ширина и дължина на целика;
  - отношението на височината към ширината на целика.
2. Якостните и другите приведени параметри по приложените теории за поведение на скалния масив са обобщаващи (интегрални) и дават състояние при започнало разрушаване. Същевременно икономически изгодно и технологично оправдано е да се монтират анкерите в състояние преди настъпване на разрушенията.

Всички тези свойства се описват оптимално в рамките на дадена технология на разработване на находището, като се приемат следните допускания:

1. В сила са уравненията на еластичността при обемно напрегнато състояние;
2. В сила е принципът на Сен-Венан и от това следва, че граничните условия се изразяват като интегрални в определени дискретни части от контура с определени размери;
3. В дискретни части от квазиеластичното скално тяло, еластичните константи имат определени механично обосновани стойности;

4. Разделянето на дискретни части на скалното тяло и оформянето на моделни елементи се определя от геометричните форми, които се образуват при деформационните прояви на скалните тела и от точността на параметрите описващи модела при дадена технология.

За определяне на напрегнатото състояние на скалния елемент, илюстриран на фиг. 3 могат да се използват функциите на напреженията (Schile, 1965). На тази задача има предложено едно решение в Димитров (2005). Тук ще разгледаме друго по-удобно за приложенията решение. За по-компактен запис и за получаване на някои качествени изводи използваме тензорна форма на функциите на напрежение:

$$Q = \begin{pmatrix} A & N & M \\ N & B & L \\ M & L & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Тогава, за тензора на напреженията

$$G = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (9)$$

е изпълнено

$$\sigma_{lp} = \varepsilon_{ijl} \varepsilon_{pmn} \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial x_j \partial x_n} \quad (10)$$

където  $\varepsilon_{ijl}$  е символ на Леви – Чивита. По тази формула се определя тензорът на напреженията при определени

функции на напреженията  $a_{im}$ .

Уравненията на равновесието се удовлетворяват тъждествено от (10). Условието за съвместимост за нехомогенно тяло се изразяват с

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{pmn} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_n} \left[ \frac{g}{2} \left( \sigma_{ep} - \frac{\nu \sigma}{1 + \nu} \delta_{ep} \right) \right] = 0 \quad (11)$$

където  $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ,  $g = \frac{1}{G}$  и  $\nu = const$ .

Приемаме, че компонентите на напреженията  $\sigma_x, \dots, \tau_{yz}$ ,  $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ,

$$g = \frac{1}{G} = g^0 + zg^1 \quad (12)$$

и функциите

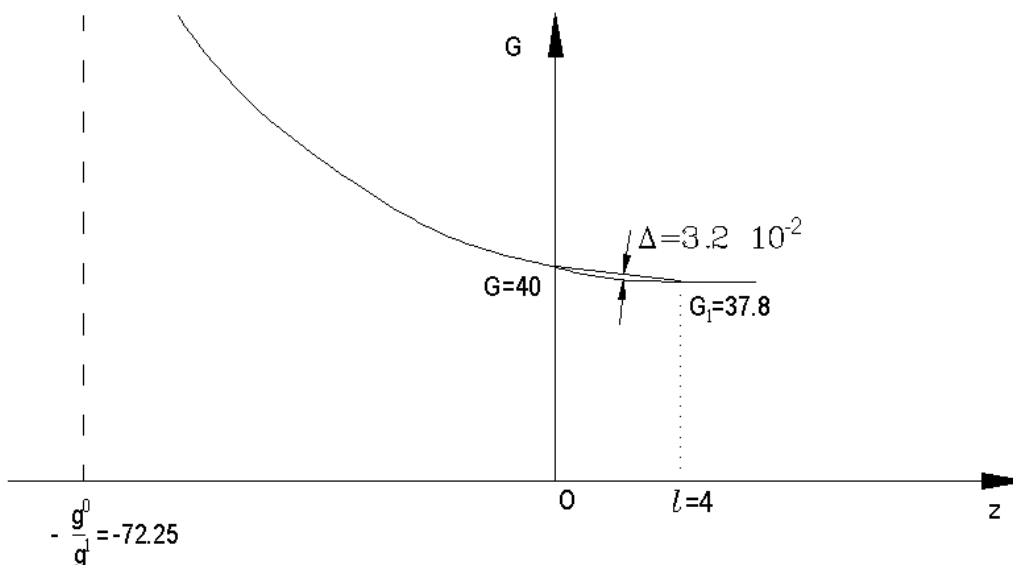
$$a_{ij} = a_{ij}^0(x, y) + za_{ij}^1(x, y) \quad (13)$$

са линейни по  $z$ . При това  $g^0 > 0$  и  $g^1 > 0$ . Тогава съгласно фиг.4 за фиксирани стойности на  $x$  и  $y$  и данните използвани в разгледания по-горе пример функцията

$$G = \frac{1}{g^0 + zg^1} \quad \text{за } z \in [0, l], \text{ има графика близка до}$$

линейна. Така може да приемем, че  $G$  също се мени линейно по  $z$ .

Фиг. 4. Схематично представена графиката на  $G$



Моделния елемент се представя като две призматични тела вътрешно с параметър  $g = g^0 = const$  и външен пръстен, за който  $g = g^0 + zg^1$ .

Приемаме, че  $g^0 = const$  и

$$g^1 = \begin{cases} 0 & (x, y) \in S^0 \\ g^1 = const & (x, y) \in S^1 \end{cases} \quad (14)$$

При така изменения модел на скалното тяло от фиг.3 границата между ядрото и останалата част на тялото е заличена. При подходящ избор на  $g^1$  във всяко хоризонтално сечение на тялото средната стойност на параметъра  $g$  във външния пръстен е равна на средната стойност, когато тялото е с трапецовидно ядро.

При избора на функциите на напрежение използваме следните свойства на укрепления целик – случай 3 от фиг.1:

1. Главните натискови усилия  $P$ , определят максималното главно напрежение  $\sigma_1 = \sigma_z$ , което не зависи от  $z$ . От направените изчисления за функцията на напрежения  $C^1 = a_{33}^1$  се получава

$$\nabla C^1 = -\frac{1+\nu}{\nu g^1}(\gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y); \quad (15)$$

2. Компонентите  $P_x = F_x$  и  $P_y = F_y$  на съпротивителните усилия в горницето определят тангенциалните напрежения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$ , които не зависят от  $z$  или са пропорционални на  $z$ . Приемаме, че  $\tau_{xz}^1 = a = const$  и  $\tau_{yz}^1 = b = const$ ;

3. Поради симетрията  $M_z = 0$  в горницето и по всяко хоризонтално сечение на целика.

След съответни пресмятания се определя функцията  $a_{33} = C_0 + zC^1$ , където

$$C^0 = -bxy^2 - ayx^2 + \frac{\alpha_0}{2}x^2 + \frac{\beta_0}{2}y^2, \quad (16)$$

$$C^1 = \frac{\alpha_1}{2}x^2 + \frac{\beta_1}{2}y^2, \quad (18)$$

$\alpha_0 = \beta_0 = T$  е страничното анкерно усилие при основата на целика и

$\alpha_1 = \beta_1 = \Delta T$  е нарастването по  $z$  на анкерното усилие, когато то е пропорционално на  $z$ .

За съгласуване на граничните условия задачата се решава за призматично тяло с правоъгълно сечение. От  $M_x = M_y = 0$  следва  $a = b = 0$  и тангенциалните напрежения  $\tau_{xz} = \tau_{xz}^0 = F_x$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{yz}^0 = F_y$ . При равномерно приложено анкерно усилие  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$  и за главните напрежения се получава

$$\sigma_1 = \sigma_z = \begin{cases} \nu(\alpha_0 + \beta_0) & (x, y) \in S^0 \\ \frac{\nu+1}{g^1}\delta + \nu(\alpha_0 + \beta_0) & (x, y) \in S^1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{и } \sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y = T.$$

Параметърът  $\delta$  се определя интегрално от натиска  $P_z$ , действащ в областта  $S^1$ . Натискът в тази област е с намалени стойности и може да се определи от графиката за разпределение на напреженията в целика (Brady and Brown, 1993).

От направените изчисления става ясно, че напрегнатото състояние на целика може да се представи, като сбор от равнинно деформирано състояние и едноосов натиск. От изразите за тензора на напреженията се извеждат и формулите за компонентите на преместванията. За други форми на сечението на целика задачата може да се реши чрез използване на конформни преобразувания на равнинните задачи за функциите  $C^1$  и  $C^0$ .

## Определяне на напрегнатото състояние на целика

Изследваните свойства на моделния елемент могат да бъдат използвани за определяне на разрушаващото натоварване на целика, при условия най-близки до реалните. Приема се, че за относително високи целици, при гипсови, солни и някои рудни добивни пластове с голяма мощност, напрежението по напречното сечение на целика е равномерно. За целици с неголяма височина, каквито са целиците във въглищни мини, предположението за равномерно разпределение на напреженията води до преоразмеряване.

Тук се използва общ метод, с който се отчитат както промените в квазиеластичното състояние на различни части на целика, преди преминаване в гранично състояние, така и повишените съпротивителни възможности на материала на ниските целици. Това се постига чрез подходящо избрани моделни елементи на целиците и функция на модула на сръзване за всеки от тях. Ако носещата способност на целика е недостатъчна, то се прилага укрепване с равномерна мрежа от анкери, така че можем да приемем че в този случай се прилага допълнително странично усилие. В този смисъл, предложеният

тук метод е приложим както за укрепени, така и за неукрепени целици.

За численото решаване на задачата за определяне на функциите на напреженията е създадена система за числено моделиране на анизотропно нехомогенно укрепено скално тяло. Чрез диференчни уравнения се описва връзката

$$\varepsilon_{ijl} \varepsilon_{pmn} \frac{\partial^2 a_{im}}{\partial x_j \partial x_n} = \lambda \theta \delta_{e3} + \mu \left( \frac{\partial u_t}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p}{\partial x_t} \right) \quad (19)$$

между полето на преместванията и шестте функции на напреженията. Докато при решаване на задачата в напрежения уравненията спрямо  $a_{im}$  са от четвърти ред, то числената задача в премествания е с по-нисък ред. Задачата се решава със седем възела разположени симетрично в трите направления. Граничните условия са в премествания. За възлите съседни на гранични се прилага асиметрична схема.

Използването на най-общи уравнения за описване на модела дава възможност за добавяне на технологични ограничения и уравнения за гранично състояние. Системата бе експериментирана за определяне на параметрите на анкерния крепеж на целици при слаби скали. Бе установено, че без прилагане на уравненията за гранично състояние точността на резултата съвпада с точността на граничните условия.

## Изводи

Независимо от големите относителни грешки, с които се работи при оразмеряването на целиците, тримерното моделиране води да съществени изводи за процесите в скалата. Предлагаият подход дава лесна за приложение

Препоръчана за публикуване от  
Катедра "Математика", МТФ

изчислителна схема и възможност за получаване на оптимално решение.

При отчитане на анкерното усилие  $T$  не са взети под внимание дължината на анкерите и гъстотата на анкерната мрежа. Използването на тези параметри на анкерния крепеж ще доведе до допълнително усъвършенстване на решението, без да е необходима промяна в метода.

## Литература

- Амусин Б., А.М. Линьков, 1973. Об использовании переменных моделей для решения одного класса задач линейного наследственной ползучести, *Сб. ВНИМИ*, №88
- Борщ-Компонице В. И., А. Б. Макаров, 1986. Горное давление при отработке мощных пологих рудных залежи. – Москва, изд. "Недра".
- Димитров Ю., 2005. Информационни и геометрични свойства на тела със структурна нееднородност. – *Научна конференция с международно участие ВСУ'2005*, I -181-187.
- Димитров Ю., 2005. Оптимален числен модел на укрепено квазиеластично тяло. – *Научна конференция с международно участие ВСУ'2005*, I -175-180.
- Николаев Н. 1989. Развитие на теорията и практиката на анкерния крепеж за подземни съоръжения. – *Дис. За д.т.н.* – Архив МГУ.
- Шевяков Л. Д., 1941. О расчете прочных размеров и деформации опорных целиков. - *Из. АН СССР, ОТН*, 1941, № 7-8-9.
- Фисенко Г. Л., 1976. Предельные состояния грных пород вокруг выработок, - Москва, изд. "Недра".
- Brady В.Н.G., Е.Т. Brown, 1993. *Rock Mechanics for Underground Mining*. – London-New York, *Chapman & Hall*.
- Schile R.D., Sierakowski R.L., 1965. *On the Saint Vencent problem for a nonhomogeneous elastic material* *Quarterly of applied math.*, 23, No. 1.