# МЕТОДИКА ЗА СИНТЕЗ НА ДВУМАСОВИ ВИБРАЦИОННИ МАШИНИ

***Емил Асенов Цуцеков[1], Петко Недялков[2], Лъчезар Лазов[3], Драгомир Вражилски[4]***

*[1] ТУ – София, МФ, кат. ИЛПТСТ, emil_assenov@yahoo.com*
*[2] ТУ – София, МФ, кат. ИЛПТСТ, nedpetko@mail.bg*
*[3] ТУ – София, МФ, кат. ИЛПТСТ, lcho@mail.bg*
*[4] ТУ – София МФ, кат. ИЛПТСТ, vrajilski@bitex.bg*

**РЕЗЮМЕ.** В работата се създава методика за синтез на кинематични и силови параметри на двумасови вибрационни машини. На базата на съставена система диференциални уравнения за двумасови вибрационни машини с две степени на свобода се анализират значимите параметри и се дават препоръки за избор на основните кинематични и динамични параметри на вибрационни машини. Анализира се и пусковия процес като се отчита променливата смущаваща сила в този етап на работата на вибрационната машина. Създадената методика може да се прилага за синтез на основните параметри на вибрационни мелници, вибрационни пресеватели, вибрационни сепаратори.
**КЛЮЧОВИ ДУМИ**: моделиране, двумасов модел, вибрации, динамика.

**METHODIC FOR SYNTHESIS OF TWO-MASS VIBRATING MACHINES**
***Emil Tzutzekov[1], Petko Nedyalkov[2], Lachezar Lazov[3], Dragomir Vrazhilski[4]***
*[1,2,3,4] TU – Sofia, Faculty of Mechanical Engineering*

**ABSTRACT.** The aim of this job is to create method for synthesis of kinematical and dynamical parameters of two-mass vibrating machines. There is analysis of important parameters based on the solved system of differential equations. Also there are recommendations for the choice of the basically kinematical, dynamical and energetically parameters of the vibrating machines. The starting process has been analysed. Application of this methodic is suitable for the synthesis and choice of basic parameters of vibrating comminution mills, vibrating screens, vibrating separators.
**KEY WORDS**: modeling, two-mass model, vibrations, dynamics.

## Въведение

Както е известно от механиката трептящите системи могат да бъдат разглеждани като едно и многомасови. Многомасовите системи са такива, при които еластичната система на окачване на съсредоточените или разпределените маси не позволява еквивалентна замяна с едномасов модел. Използването на много масови модели и в частност на двумасов, позволява да се използват различни динамични явления, като резонанс, антирезонанс. Резонансните явления при едномасовите системи най–често са вредни и водят до нарушения целостта на машинния агрегат. При двумасова е възможно вредните ефекти да бъдат избегнати. Положителните ефекти при използване на резонансни ефекти е възможността за използване на ефекта на динамично усилване т.е. - минимална енергия за задвижване, а при използване на антирезонансни е ефектът на динамично гасене, широко използван във виброгасенето и виброизолацията. Конструирането и експлоатацията на такава система обаче е свързано с определени трудности, част от които са наличие на паразитни резонанси, нестабилност на преходните процеси и т.н.

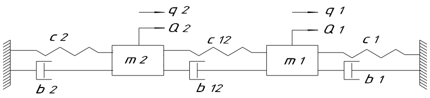
Преодоляването на недостатъците на двумасовите системи е част от задълбочен теоретичен и експериментален анализ на процесите и явленията свързани с динамиката на двумасови механични системи, част, от която е синтезът проведен в настоящата работа.

Двумасови системи могат да бъдат използвани при вибрационни пресеватели, сепаратори, мелници и т.н.

## Изследване и резултати

Теоретичното изследване започва с изграждането на коректен математически модел на системата. Определят се всички масови, еластични параметри, както и съпротивителните и смущаващи сили, които влияят на движението на системата. Тези параметри могат да бъдат измерени експериментално, а част от тях могат да бъдат получени при изграждането и изследването на CAD модела на машината.

На фиг. 1 е дадено графично представяне на двумасова механична система. Параметрите на системата са съсредоточени, движението е само по една транслационна координата.




**Фиг. 1. Двумасова система**

В настоящото изследване масата на материала върху машината се приема като присъединена към съответната маса на трептящата ситовата повърхност.

Динамиката на системата се описва със система диференциални уравнения. За коректно получаване на параметрите на системата се използват диференциалните уравнения на Лагранж от втори род:

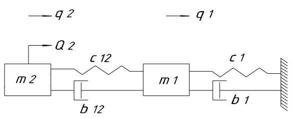
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial E_p}{\partial q_j}=Q_j-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j},\ j=1\div s, \tag{1}$$

където:

$E_k$ – кинетична енергия; $E_p$ – потенциална енергия;

$\Phi$ – дисипативна енергия; $Q_j$ – обобщена сила.

Често едната от връзките към неподвижните опори се премахва: $c_2=0; b_2=0$, също и задвижването се локализира в една от масите: например $Q_1=0$.




**Фиг. 2. Двумасова система**

При тази система изразите за кинетичната, потенциалната и дисипативната енергия са:

$$E_k=\frac{m_1}{2}*\dot{q}_1^2+\frac{m_2}{2}*\dot{q}_2^2 \tag{2}$$

$$E_p=\frac{c_1}{2}*x_1^2+\frac{c_{12}}{2}*\left(x_1-x_2\right)^2 \tag{3}$$

$$\Phi=\frac{b_1}{2}*\dot{q}_1^2+\frac{b_{12}}{2}*\left(\dot{q}_2^2-\dot{q}_1^2\right) \tag{4}$$

Получават се следните уравнения за движение:

$$m_1\ddot{q}_1+c_1*q_1+c_{12}*\left(q_1-q_2\right)+b_1*\dot{q}_1+b_{12}*\left(\dot{q}_1-\dot{q}_2\right)=0 \tag{5}$$

$$m_2\ddot{q}_2+c_{12}*\left(q_2-q_1\right)+b_{12}*\left(\dot{q}_2-\dot{q}_1\right)=Q_j \tag{6}$$

Системата ДУ се представя в матричен вид:

$$A\cdot\ddot{q}+B\cdot\dot{q}+C\cdot q=Q, \tag{7}$$

където:

$$A=\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\ C=\begin{pmatrix} c_1+c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_{12} \end{pmatrix}.$$

Матрица на B има същата структура, като C.

Представянето на системата ДУ в каноничен вид е:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \tag{8}$$

За да се определят собствените стойности и собствените вектори на системата, се използва каноничното уравнение на недемпфираната система:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^{-1}C & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix} \tag{9}$$

От полученото матрично уравнение лесно се определят собствените кръгови честоти, които са всъщност нулите на детерминантата от следната матрица:

$$\Omega=\left(C-\omega^2\cdot A\right)^{-1} \tag{10}$$

Собствените честоти се пресмятат от: $F=\left|Im\Omega\right|$.

Амплитудно-честотните и фазово честотните характеристики на системата се получават при използване на матричното уравнение на демпфираната система:

$$\Omega=\left(C-\omega^2\cdot A+i*\omega*B\right)^{-1} \tag{11}$$

Амплитудно-честотните и фазово-честотните характеристики позволяват много лесен анализ на режимите на работа на системата, и улесняват в следващия подбор на следните три характерни режима на работа:

а) динамично усилване – когато принудената честота съвпадне с една от собствените честоти на системата. При този резонансен случай се реализира задвижване на системата с минимална енергия.

б) динамично гасене – когато се реализира режим на антирезонанс. При този случай се нулират динамичните сили във фундамента.

в) динамична стабилизация – когато амплитудите на съответната маса не зависят от параметрите на масата.

За конкретен конструктивен пример ще се разгледа вибрационен пресевател със следните параметри: $M=4000\ kg, X=0.015\ mm, \omega=102.63\ rad/s$.

Ако реализираме конструкция на този пресевател като едномасова система, смущаващата сила би следва да бъде: $F=M*X*\omega^2=4000*0.015*102.63^2=6.319*10^5 N$.

Реализирането на такива динамични сили води до ниска надеждност на лагеруването.

В този случаи подходящо е използването на ефекта на динамично усилване. Използва се смущаваща сила с честота съвпадаща с една от собствените честоти на системата. Детерминира се следната матрица със собствените честоти на системата:

$$\Omega = \left( \omega_1, -\omega_1, \omega_2, -\omega_2 \right)^{-1}.$$

Развитието на вековото уравнение има следният вид:

$$\Omega = \left( c_1 + c_{12} - \omega_i^2 * m_1 \right) * \left( c_{12} - \omega_i^2 * m_2 \right) - c_{12}^2 \qquad (12)$$

Решението на тази система уравнения, в случая 2 квадратни уравнения дава изразите, от които се пресмятат коравините на пружините, така че системата да работи в резонанс. Дадените от Бауман (1970) изрази са олекотени и опростени, като се пренебрегва влиянието на $c_1$ върху $c_{12}$. Точните изрази от решението на тази система са доста обемисти, а решенията са двойни. Дават се числените стойности на еластичните коефициенти за посочената по-горе машина.

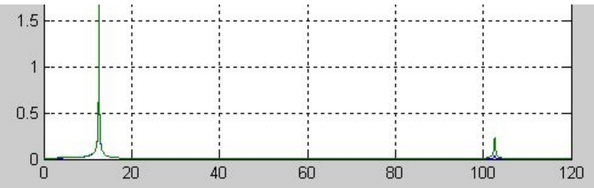
$$\omega_1 = 12.57\ rad/s, \omega_2 = 102.63\ rad/s$$

$$m_1 = 4000\ kg, m_2 = 1500\ kg$$

$$c_1 = 873541, c_{12} = 1.14234*10^7; c_1 = 4.1886*10^7, c_{12} = 238238$$

Първите стойности на решението обуславят търсеният случай на динамично усилване.

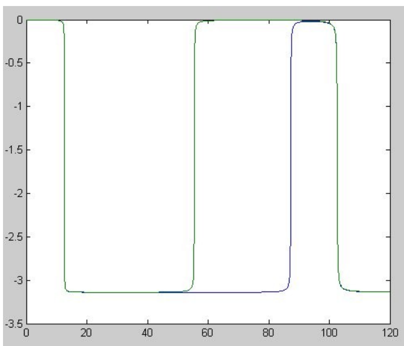
На фиг. 3. и фиг. 4. са дадени амплитудно-честотните и фазово- честотните характеристики на така параметризираната система.




**Фиг. 3. Амплитудно-честотни характеристики.**

Вторите стойности на решението също са реални, но не отговарят на условието за предаване на минимална сила към фундамента.

Като обобщение, за да е възможно синтезиране на двумасова система, е необходимо да бъдат известни:
а) масовите параметри на системата;
б) честотни параметри на динамичната система.




**Фиг. 4. Фазово-честотни характеристики.**

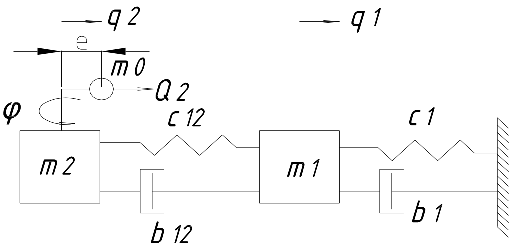
Най-често параметрите на едната маса се подбират в зависимост от технологичен показател на исканата машина. Честотните параметри се избират чисто практически:

- първа резонансна честота – от условието за минимизиране на силата предавана към фундамента;
- втора резонансна честота – да съвпада с честотата на възбуждащата сила.

За първоначално детерминиране на масовите параметри е най-лесно да се подбере съотношение между двете маси на двумасовата система - $k_m = m_1 / m_2$. Първи етап е избор на схемата на двумасовата система. Втори етап включва подбор на това отношение в зависимост от различни критерии:

- конструктивни и якостни критерии;
- геометрични и ергономични критерии;
- енергетични и мощностни критерии.

При случая на динамично усилване системата е в резонанс и теоретичните мощност и енергия за задвижване, клонят към нула за консервативни системи, а в останалите случаи са равни на енергията на загубите в механичната система. Т.е. енергетично и мощностно условие за задвижване на системата в установен режим не могат да бъдат дадени. Енергетично условие за задвижване на системата може да бъде дадено само за пусковия процес.




**Фиг. 5. Двумасова система**

Придържаме се към системата дадена на фиг.5. записваме кинетичната и потенциалната енергия съгласувано с Beer (1988), получават се следните изрази:

$$E_k = \frac{1}{2} * \left[ J_0 * \dot{\varphi}^2 + m_1 * \dot{q}_1^2 + m_2 * \dot{q}_2^2 \right] + m_0 * l * \dot{\varphi} * \dot{q}_2 * \cos\varphi$$

$$E_p = m_0 * l * \sin\varphi + \frac{1}{2} * \left[ c_1 * q_1^2 + c_{12} * \left( q_1^2 - q_2^2 \right) \right] \qquad (13)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} * \left[ b_0 * \dot{\varphi}^2 + b_1 * \dot{q}_1^2 + b_2 * \dot{q}_2^2 \right]$$

$$Q_2 = m_0 * e * \dot{\varphi}^2; M_{cp} = 0.5 * d * \mu * m_0 * l * \dot{\varphi}^2, \qquad (14)$$

$$J_0 = e^2 * m_{0дб} + J$$

където:

$M$ – въртящ момент на двигателя;

$M_{cn}$ – съпротивителен момент в лагерите;

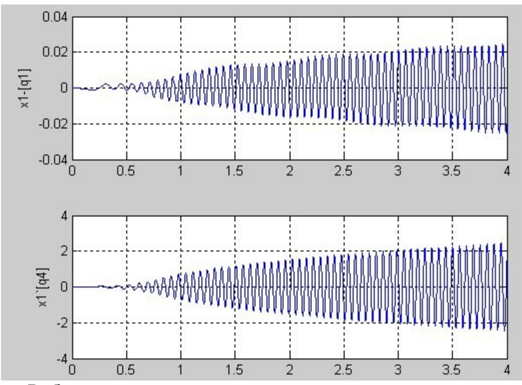
$J$ – инерционен момент на вибровъзбудителя и двигателя;

$m_0$ - маса на дебаланса.

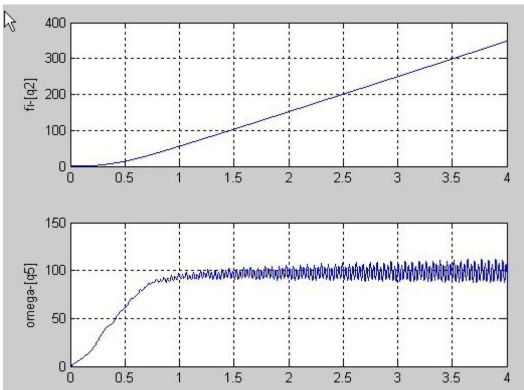
ДУ за движението на системата по време на пусковия процес са:

$$
\begin{aligned}
& m_1 * \ddot{q}_1 + c_1 * q_1 + b_1 * \dot{q}_1 = 0 \\
& m_2 * \ddot{q}_2 + c_1 * q_1 + c_{12} * (q_1 + q_2) + b_1 * q_1 + \\
& + b_{12} * (\dot{b}_1 + \dot{b}_2) m_2 * \dot{q}_2^2 + m_0 * l * \dot{\varphi}^2 * \sin\varphi = Q_2 \\
& J_0 * \ddot{\varphi} + m_0 * g * e * \cos\varphi + b_0 * \dot{\varphi} = M - M_{сп}
\end{aligned} \tag{15}
$$

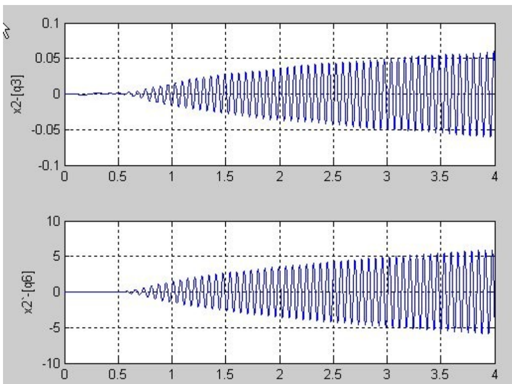
Решенията на системата ДУ за времето на пусковия процес са дадени в графичен вид:




**Фиг. 5. Виброскорости и амплитуди на първа маса.**

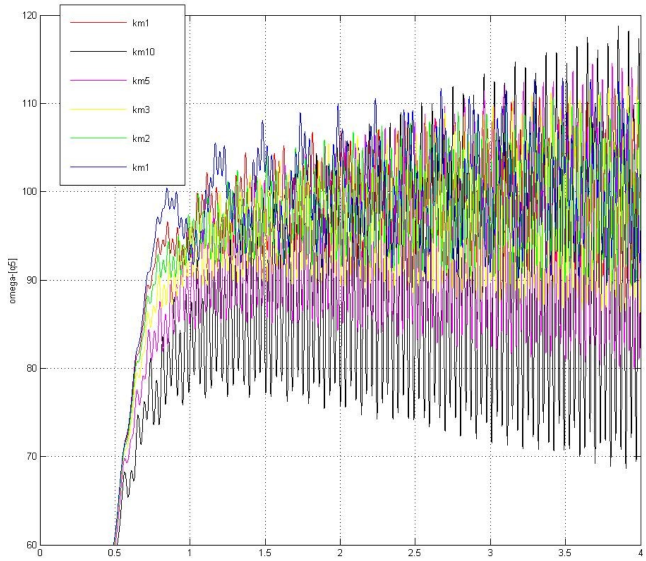



**Фиг. 6. Ъглова скорост и ъгъл на завъртане на ротора на вибровъзбудителя.**




**Фиг. 7. Виброскорости и амплитуди на втора маса.**

Изследват се пусковите характеристики на системата при различно съотношение на масите $k_m$. Подобно изследване е дадено за пръв път от Зомерфелд и носи неговото име - Йорданов (2004).




**Фиг. 8. Пускови процеси при различно $k_m$.**

На фиг. 8. са насложени графиките на изменение на ъгловата скорост на вибрационния вал при различно съотношение на масите $k_m$.

Основни изводи от изследването на пусковите характеристики са:

- при съотношение $k_m$ близко до 1 (синя линия – фиг.8.) изменението на ъгловата скорост е със стабилен размах и ниска честота. Т.е. пускането е трудно, но стабилно.
- при съотношение $k_m$ близко до 10 (черна линия – фиг.8.) изменението на ъгловата скорост е с нестабилен размах и висока честота. Т.е. пускането е лесно, но нестабилно. В този случай ъгловата честота се колебае около установената честота на вала, което е вредно за цялата система на задвижване.
- препоръчително съотношение $k_m$ е в диапазона $1.5$ ё $3.5$.

## Изводи

1. Създадена е методика за синтез и анализ на кинематичните и динамични параметри на двумасови вибрационни машини.
2.Изследва се пусковия процес на двумасови вибрационни машини с отчитане ефекта на Зомерфелд.
3.Създадената методика е приложена за реална вибрационна машина.

## Литература

Бауман В. А. 1970. *Вибрационные машины в строительстве и производстве строительных материалов*. М. „Машиностроение".

Йорданов Й. Т. 2004. *Приложение на MatLab в инженерните изследвания – Част I и II*. Русе. „Русенски Университет".

Beer F. P. & E. R. Johnston, Jr. 1988. *Vector Mechanics for Engineers: Dynamics*. USA "McGraw Hill Book Company".

Препоръчана за публикуване от Редакционен съвет на секция Механизация, електрификация и автоматизация на мините