

## АНАЛИТИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА МЕХАНИЧНИТЕ ПАРАМЕТРИ НА ТРИЕЩА СЕ ПОВЪРХНОСТ

**Юлиян Димитров**

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, E-mail: juldim.abv.bg

**РЕЗЮМЕ.** Процесите при триещи се повърхности играят важна роля при някои основни механизми и машинни елементи, като: спирачни системи; шлайф машини; лагери; железопътни системи и др.

В литературата съществуват голям брой различни модели на контактно триене. Разглеждаме модел на контактно съпротивително взаимодействие на еластични тела.

Систематизирани са основни параметри на процеса на триене. Направено е приложение при описване на модела на тестовете на изтегляне на анкери закрепени по цялата дължина.

### ANALYTICAL STUDY OF MECHANICAL PARAMETERS OF FRICTIONAL SURFACE

Julian Dimitrov

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, E-mail: juldim.abv.bg

**ABSTRACT.** Processes in the friction surfaces have an important role in some basic mechanisms and machine parts as: brake system; grinding machine; bearings; wheel-rail systems and others.

In literature there are many different models of contact friction. We consider a model of contact resistance interaction between elastic bodies.

The basic parameters of the process of friction are systematized. An application is made for model of pullout tests of fully grouted rock bolts.

### Въведение

Процесите при триещи се повърхности играят важна роля при някои основни механизми и машинни елементи, като: спирачни системи; шлайф машини; лагери; железопътни системи и др. В литературата съществуват голям брой различни модели на контактно триене. Разглеждаме модел на контактно съпротивително взаимодействие на еластични тела.

Разпределението на фрикционния контакт зависи от:

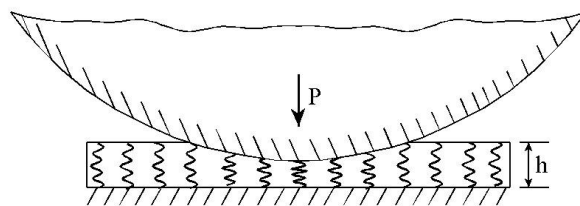
1. Размера на областта на контакта;
2. Тип на нормалната контактна сила – статична или динамична;
3. Условия на контакт в нормално направление – херцов нормален контакт или нехерцов контакт;
4. Преместване в тангенциално направление – микро или макро пълзене.

Условията на контакт, удовлетворяващи теорията на Херц, съгласно Jonson (1989):

1. Повърхностите на контактуващите тела са гладки и несъгласувани (не съвпадат);
2. Деформациите са малки;
3. Всяко от контактуващите тела може да се разглежда като еластично полупространство;
4. Триенето между повърхнините е минимално.

При определяне на контактните напрежения, в рамките на теорията на еластичността, преместването на произволна точка от повърхността на контакт зависи от разпределението на контактния натиск.

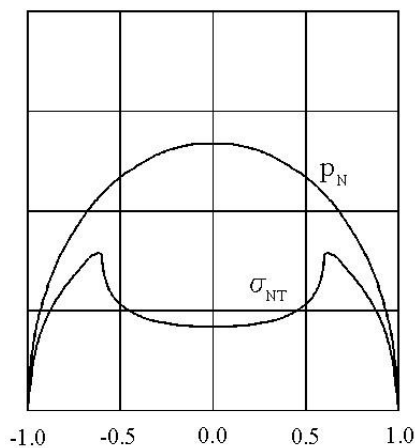
Определянето на параметрите на контактния процес води до решаването на интегрални уравнения. Моделът се опростява като едното от контактните тела се разглежда като еластична основа (Johnson, 1989) (фиг. 1). В този модел контактния натиск във всяка точка зависи само от преместването на точката. Областта на контакт се разглежда като вътрешната част на елипса.



Фиг. 1. Схема на еластичния модел

Приема се, че размерът на контактуващите тела е значително по-голям от размера на контактната зона. Деформациите причинени от контакта са малки и телата могат да се разглеждат като безкрайна еластична среда.

Съгласно Sextro (2007) при херцов контакт и краен коефициент на съпротивление се получава разпределение на нормалния натиск  $p_N$  и тангенциално сцепление  $\sigma_{NT}$  както схематично е представено на фиг. 2.



Фиг. 2. Нормален натиск и тангенциално сцепление по главен диаметър на елипсата на контакт

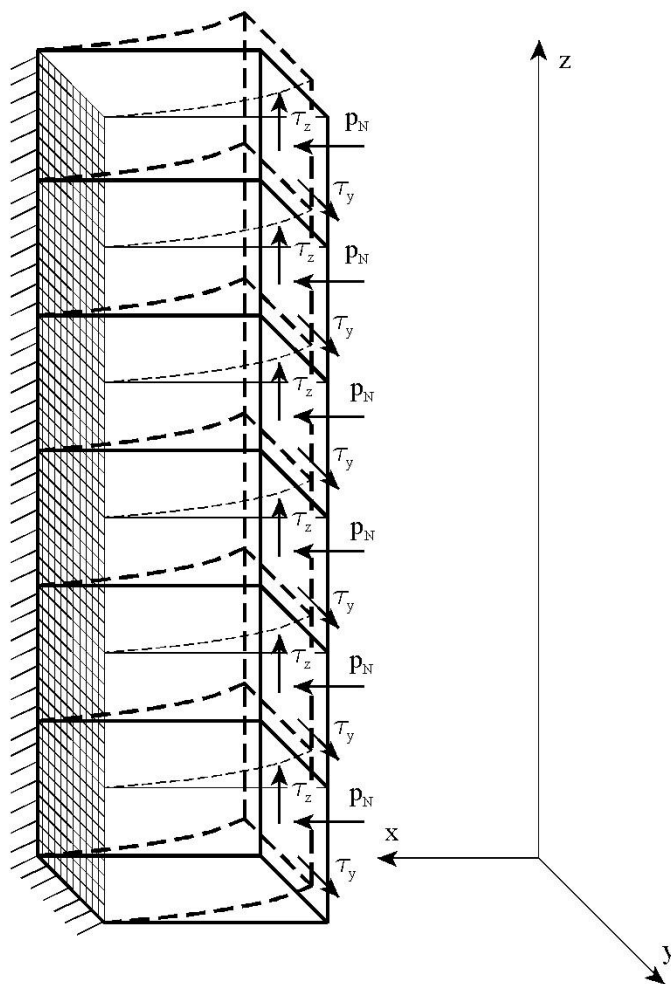
## Модел на контактната повърхнина

### Дискретизиран модел на контактната повърхност

Приема се, че контактният елемент е закрепен кинематично. Разглежда се динамична система, при която основен е фрикционния контакт. Съгласно Sextro (2007) динамичният модел на фрикционния контакт се представя чрез еластична основа, наречена „тънък еластичен контакт“ (фиг. 3).

Моделът се представя дискретно, чрез моделни елементи (тела) с форма на паралелепипед с параметри: ширина  $\Delta h_0$ , дълбочина  $\Delta b_0$  и височина  $l_0$  равна на ширината на еластичната основа. Елементарната (моделна) контактна площ е с лице  $\Delta A_0 = \Delta b_0 \cdot \Delta h_0$ .

Приема се постоянен нормален контактен натиск  $p_N$ . Компонентите на напрежението при приплъзване в направления  $y$  и  $z$ , съответно са  $\tau_y$  и  $\tau_z$ .



Фиг. 3. Недеформирана и деформирана, контактна повърхност

Контактните елементи на модела имат едно и също механично поведение. Деформиращата се контактна повърхнина остава в равнината  $Oyz$ .

### Геометрични параметри на модела

$l_0, l$  - ширина на еластичната основа (по оста  $x$ );

$\Delta h_0$  - ширина на дискретния (моделния) елемент (по  $z$ );

$\Delta b_0$  - дълбочина на дискретния елемент (по  $y$ ).

## Механични параметри

$p_N$  - нормален контактен натиск;

$\tau_y, \tau_z$  - напрежения при приплъзване;

$(p_N, \tau_y, \tau_z)$  - контактен натиск;

$(u_p, v_p, w_p)$  - преместване на контактната повърхност.

...При експериментално изучаване на процеса информацията за нормална и тангенциална коравина на контакта се получава от измерване.

## Три модела на теория на тънките контакти

Напреженията при приплъзване са  $\sigma_{xy} = G \frac{dv}{dx}$ ,

$$\sigma_{xz} = G \frac{dw}{dx}.$$

Приема се, че преместванията в направление на  $y$  и  $z$ , са съответно  $v = const$  и  $w = const$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy} = 0 \text{ и } \sigma_{yz} = 0.$$

Общият вид на тензора на напреженията е

$$\begin{pmatrix} -p_N & -\tau_y & -\tau_z \\ -\tau_y & \sigma_{yy} & 0 \\ -\tau_z & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

### A. Едноосов натиск ( $i = 1$ )

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0, \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -p_N,$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{1}{E} \nu \sigma_{xx} = \varepsilon_{zz}.$$

Контактното усилие е

$$\begin{aligned} (\Delta F_N, \Delta F_y, \Delta F_z) &= (p_N, \tau_y, \tau_z) \cdot \Delta A_0 = \\ &= \left( \frac{E\Delta A_0}{l} u_p, \frac{G\Delta A_0}{l} v_p, \frac{G\Delta A_0}{l} w_p \right). \end{aligned}$$

Означаваме:

$$\Delta C_N = \frac{E\Delta A_0}{l_0} \text{ - нормално контактно съпротивление и}$$

$$\Delta C_R = \frac{G\Delta A_0}{l_0} \text{ - тангенциално контактно съпротив-$$

ление.

### B. Хидростатичен натиск ( $i = 2$ )

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p_N = \frac{E}{1-2\nu} \varepsilon_{xx}.$$

Нормалното контактно съпротивление е

$$\Delta C_N = \frac{E\Delta A_0}{l_0(1-2\nu)} \text{ и тангенциалното контактно съпро-$$

$$\text{тивление е } \Delta C_R = \frac{G\Delta A_0}{l_0(1-2\nu)} \text{ (Jager, 1999).}$$

### C. Осеве деформирано състояние ( $i = 3$ )

$$\sigma_{xx} = -p_N, \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{\nu}{1-\nu} p_N.$$

Съгласно теория на тънките контакти (Bental and Johnson, 1968) нормалното контактно съпротивление е

$$\Delta C_N = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{\Delta A_0}{l_0} \text{ и тангенциалното контактно}$$

$$\text{съпротивление - } \Delta C_R = \frac{G(1-\nu)}{(1+\nu)} \cdot \frac{\Delta A_0}{l_0}.$$

Общо формулите за нормално и тангенциално контактни съпротивления могат да бъдат написани

$$\Delta C_N = \tilde{E} \cdot \frac{\Delta A_0}{l_0} \text{ и } \Delta C_R = \tilde{G} \cdot \frac{\Delta A_0}{l_0}, \text{ където}$$

$$\tilde{E} = \begin{cases} E_1 = E & i = 1 \\ E_2 = \frac{E}{1-2\nu} & i = 2 \\ E_3 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)} & i = 3 \end{cases}$$

$$\tilde{G} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\nu)}.$$

При така въведеното означение контактните напрежения се изразяват чрез преместванията:

$$(p_N, \tau_y, \tau_z) = \left( \frac{\Delta C_N}{\Delta A_0} u_p, \frac{\Delta C_R}{\Delta A_0} v_p, \frac{\Delta C_R}{\Delta A_0} w_p \right).$$

## Вълнови характеристики на контакта

Разглежда се динамиката на взаимодействието на контактните тела.

$$dM = \rho_0 \cdot dV_0 \text{ - маса на моделния елемент}$$

$$dV_0 = dA_0 \cdot dx \text{ - обем на моделния елемент}$$

### a) вибриране в нормално направление

$\sigma_{xx} = \tilde{E}_i \varepsilon_{xx}$  - закон на Хук за нормалния натиск при триене. Моделът се разглежда за  $i = 1, 2, 3$ .

Съгласно законът на Нютон

$$\Delta F = d\sigma_{xx} \cdot dA_0 = dm \cdot \ddot{u}(x, t), \text{ където } \ddot{u} \text{ е}$$

ускорение на моделния елемент.

След заместване с  $\varepsilon_{xx} = u'(x, t)$  се получава вълновото

$$\text{уравнение } \tilde{E}_i u''(x, t) = \rho \ddot{u}(x, t).$$

Всички решения на уравнението са:

$$u_k(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\Delta A_0 l_0 \rho_0}} \cos \left[ \frac{\pi}{2l_0} (2k-1)x \right] \cdot \sin(\omega t), \text{ където}$$

$$\omega = \frac{\pi(2k-1)}{2l_0} \sqrt{\frac{\tilde{E}_i}{\rho}}.$$

### б) вибриране в тангенциално направление

Изпълнено е  $\sigma_{xz} = -\tau_z = \tilde{G}_i \frac{dW}{dx} = \tilde{G}_i W'(x, t)$ . По аналогичен начин се достига до вълновото уравнение  $\tilde{G}_i w''(x, t) = \rho \ddot{w}(x, t)$ . Решението е аналогично, както в случая на вибриране в нормално направление.

Извод: Амплитудите на вибрационните премествания при контактите не зависят от еластичните константи.

### Фрикционни характеристики

Параметрите свързани с процеса триене са:

- коефициент на триене  $\mu$ ;
- относителна скорост  $v_\tau$ ;
- и нормален натиск  $p_N$ .

Коефициентът на триене се определя по формулата  $\mu = \frac{\tau_s}{p_N}$ , където  $\tau_s$  е якост при приплъзване.

Коефициентът на триене при покой е  $\mu_0 = \frac{\tau_{s_0}}{p_N}$ .

При разглеждания модел (фиг. 3) относителната скорост е  $v_\tau = \dot{w}(t)$  -  $w$  е третата компонента на преместването.

Съгласно Sextro (2007) коефициентът на триене зависи от относителната скорост  $\mu(v_\tau) = \frac{\mu_0}{1 + p_v |v_\tau|}$ , където

$p_v = k_r \mu_0 p_N$  е параметър на нормализиран натиск и  $k_r$  - температурен коефициент.

### Microslip ефект, дължащ се на неравни повърхности

Наблюдава се при неравни повърхности, като в една точка има слепване, а в друга приплъзване. Дължи се на неравномерното разпределение на натиска за една елементарна област.

Съгласно модела, представен с фиг. 3, различаваме три състояния на контактната повърхнина:

Отделяне	$\sigma_{xx} = 0, \sigma_{xz} = 0$
Плъзене (фрикционен процес)	$\sigma_{xx} = -p_N, \sigma_{xz} = \mu p_N$
Слепване (адхезионен процес)	$\sigma_{xx} = -p_N, \sigma_{xz} = \tau_z$

$\mu$  - коефициент на триене;

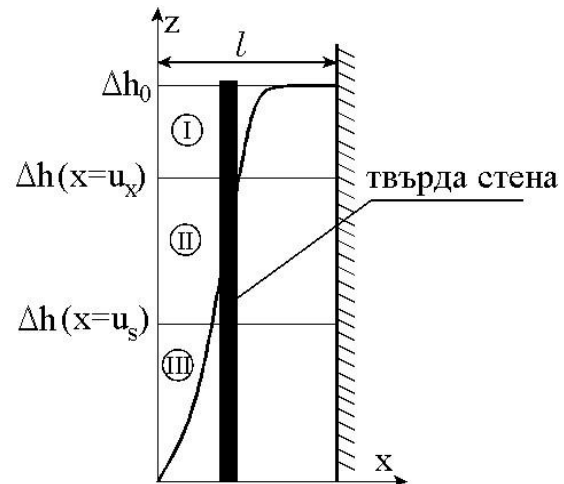
$\tau_z$  - тангенциално сцепление.

При изтегляне на тръбен фрикционен анкер едновременно се наблюдават и трите процеса. Поради свиването на тръбата от страна на планката се образуват

в последователен ред и трите зони (отделяне, плъзене и слепване)(фиг. 4).

За да се определи пластичната зона е необходимо напрежението при плъзгане  $\tau_b$  да достигне достатъчна големина. Едната гранична стойност е тангенциалното сцепление  $\tau_z = \frac{\Delta C_R w_P}{\Delta A_0}$ , където  $\Delta C_R$  е тангенциално

контактно съпротивление и  $w_P$  - третата компонента на преместването.



Фиг. 4. Контактен модел с три зони : I - отделяне; II - плъзене и III - слепване

Втората стойност е якостта на плъзене  $\tau_s$ . Условието за пластично деформиране е  $\tau = \min(\tau_z, \tau_s)$ .

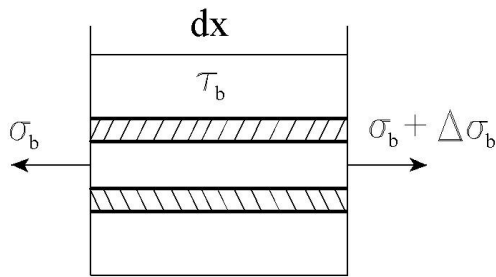
Големината на пластичната област се определя от  $p_N = \frac{\Delta F_N}{\Delta A_0} = \frac{\Delta C_N}{\Delta A_0} (u_x - u_s)$ , ако се приеме равно-

мерен нормален натиск  $p_N$  в пластичната зона.

### Приложение при описване на тестовете на изтегляне на анкери

Разглеждаме къси анкери, закрепени по цялата дължина. В зависимост от вида на анкера, закрепването се осъществява по един или повече от възможните начини чрез: механично закрепващ елемент; адхезивна връзка и фрикционна връзка. Анкерите от типа Сплит-сет и ТФА имат само фрикционна връзка. Анкерите Швелекс имат фрикционна връзка и механично закрепващ елемент.

При изтегляне, най-напред се разрушава адхезионната връзка и след това механично-закрепващия елемент. Разрушаването при анкери, закрепени по цялата дължина започва от планката и последователно се премества навътре.



Фиг. 5. Елемент на анкера

Като най-пълнен пример разглеждаме анкери от типа на бетонните, които са закрепени по цялата дължина (Li and Stillborg, 1999).

На фиг. 5 е представен елемент на анкера с действащи върху него напрежение при приплъзване  $\tau_b$  и осево опъново напрежение  $\sigma_b$ . Доказва се връзката

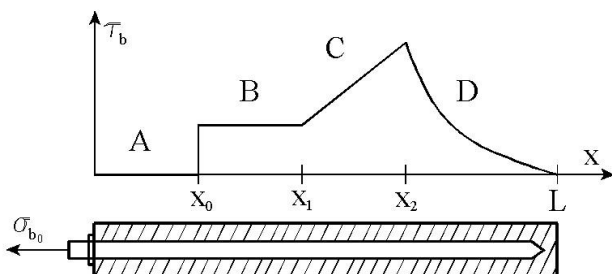
$$\tau_b = -\frac{A}{\pi d_b} \cdot \frac{d\sigma_b}{dx},$$

където  $d_b$  е диаметър на анкера и  $A$  е лицето на сечението на анкера.

Таблица 1.

Формули за напрежението при приплъзване  $\tau_b$  и осево опъновото напрежение  $\sigma_b$

A	$\tau_b(x) = 0,$ $\sigma_b(x) = \sigma_{b0}$
B	$\tau_b(x) = s_\tau,$ $\sigma_b(x) = \sigma_{b0} - \frac{4s_\tau}{d_b}(x - x_0)$
C	$\tau_b(x) = \omega s_p - \frac{x - x_1}{\Delta}(1 - \omega)s_p,$ $\sigma_b(x) = \sigma_{b0} - \frac{2s_p}{d_b} \left[ 2\omega(x - x_0) + \frac{1 - \omega}{\Delta}(x - x_1)^2 \right]$ <p><math>\Delta = x - x_1</math>, <math>\omega = \frac{s_\tau}{s_p}</math>, където  <math>s_\tau</math> е частично нопрежение при плъзгане и <math>s_p</math> - върхово напрежение при плъзгане</p>
D	$\tau_b(x) = s_p e^{-2\alpha \frac{x - x_0}{d_b}},$ $\sigma_b(x) = \frac{2s_p}{\alpha} e^{-2\alpha \frac{x - x_2}{d_b}}$



Фиг. 6. Разпределение на  $\tau_b$  при закрепен по цялата дължина анкер

На фиг. 6 е представено схематично разпределение на напрежението при приплъзване  $\tau_b$  по дължината на анкера. Различават се четири области:

A:  $0 \leq x < x_0$  - отделена част на анкера;

B:  $x_0 \leq x < x_1$  - област на плъзгане;

C:  $x_1 \leq x < x_2$  - част с линейно нарастване на  $\tau_b$ ;

D:  $x_2 \leq x < L$  - част с експоненциално намаляващо  $\tau_b$ .

## Изводи

Систематизирането на моделите на триеща се повърхност е необходимо за аналитично описване на процеса на взаимодействие на анкера със скалата. Начинът на закрепване на анкера е един основен критерий, определящ принципа на неговото действие. Някои анкери като Сплит-сет, Швелекс и ТФА имат като основен - фрикционния начин на закрепване. Изучаването на процесите на триене е необходимо и за описването на тестовите на изтегляне. Силата на изтегляне е един важен

критерий за носимоспособността на анкера. Независимо от вида на анкера, по време на изтегляне протича характерен фрикционен процес. Този процес се характеризира с области на отделяне и области на пълзене по дължината на анкера.

За оразмеряване на оптималните условия за работа на анкера е необходимо да се отчита натоварване, което достига граничното или го надвишава. Прецизният модел на гранично натоварения анкер включва описание на фрикционните процеси. Трябва да се определи носимоспособността на анкера при условия на създадени зона на отделяне и зона на пълзене. Този подход към оразмеряването на анкерния крепеж води до получаване на оптимално решение.

Препоръчана за публикуване от катедра  
„Математика“, МЕМФ

## Литература

- Bental R. Johnson K. 1968. An elastic strip in plane rolling contact. *Int J Mech Sci*, Pergamon Press, Vol 10
- Jäger J. 1999. Equal Layers in Contact with Friction. In: *Gaul and Brebbia: Computational Methods in Contact Mechanics. IV*, WIT Press, Southampton, Boston
- Johnson K.. 1989. *Contact Mechanics*. Cambridge, New York, Melbourne, Cambridge, University Press
- Li C., B. Stillborg. 1999. Analytical models for rock bolts. In: *International Journal of Rock Mechanic and Mining Sciences*, Pergamon, 36, 1013-1029
- Sextro W. 2007. *Dynamical Contact Problems with Models, Friction, Methods, Experiments and Applications*, Springer

## RISK ANALYSIS METHOD FOR OPENCAST MINING PROJECTS

*Kholodnjakov G.A., Fomin S.I.,*

*Saint Petersburg State Mining University. 199106. Saint Petersburg.  
E-mail:fominsi@mail.ru*

**ABSTRACT:** The most commonly used methods of project evaluation in mining exploration rely on expected value analysis as criteria for undertaking the project. Expected value methods summarize the attributes of a project by calculating the average outcome on which decisions are based. Risk analysis is a very powerful tool for certain mining processes where decision under uncertainty is involved. A range of methods is available to support project decision making under uncertainty, such as sensitivity analysis, scenario analysis and risk analysis using simulation. Open cast mine is subject to certain inherent risks, which to some degree apply to all participants of the international metals industry.

### **МЕТОД ЗА АНАЛИЗ НА РИСКА В ПРОЕКТИ ЗА ОТКРИТИ РУДНИЦИ**

**Г. А. Колодняков, С. И. Фомин**

*Санкт Петербургски Държавен минен университет, 199106, Санкт Петербург.  
E-mail:fominsi@mail.ru*

**РЕЗЮМЕ:** Най-често използваните методи за оценка на проекти в минното промишленост се базират на резултатите от анализа на ефективността на проекта. Чрез изчисляване на средните изходни величини, методите за оценка предоставят като крайни изводи най-важните характеристики на проекта. Анализът на риска е много важен елемент за осигуряване на минните процеси, които винаги се реализират при неблагоприятни условия. За обосноваване на проектните решения при неблагоприятни условия се използват поредица от симулативни методи, методи на моделиране и анализ на риска. Съществуващият риск при системите за открито разработване е идентичен с риска в другите области на тежката индустрия.

The most commonly used methods of project evaluation in mining exploration rely on expected value analysis as criteria for undertaking the project. Expected value methods summarize the attributes of a project by calculating the average outcome on which decisions are based.

Risk analysis is a very powerful tool for certain mining processes where decision under uncertainty is involved. A range of methods is available to support project decision making under uncertainty, such as sensitivity analysis, scenario analysis and risk analysis using simulation.

Open cast mine is subject to certain inherent risks, which to some degree apply to all participants of the international metals industry. These include:

- **Commodity Price Fluctuations:** These may be influenced by demand for metals in industry, actual or expected sales by central banks, sales by metal producers in forward transactions and production cost levels in major producing countries.
- **Inflation Rate Fluctuations:** Specifically related to the macro-economic policies of the individual countries.
- **Country Risk:** Specifically country risk including: political, economic, legal, tax, operational and security risks;
- **Exchange Rate Fluctuations.**
- **Legislative Risk:** Specifically changes to future

legislation (tenure, mining activity, labour, occupational health, safety and environmental) within the Russian Federation;

- **Exploration Risk:** Resulting from the elapsed time between discovery of deposits, development of economic feasibility studies to bankable standards and associated uncertainty of outcome;
- **Development Project Risk:** Specifically technical risks associated with green field projects for which technical studies are limited to pre-feasibility studies or less and development and production has not commenced.

This risk is the opportunity to re-assess that portion of the Mineral Resource which is amenable to open-pit mining by extending the optimizations process to include Inferred Mineral Resources. Coupled with further drilling to target upgrading of the currently identified Mineral Resource this may well increase the base for modification to produce Ore Reserves on completion of the appropriate technical studies.

With the improvements in computers and the availability of simulation software, risk analysis using Monte Carlo simulation especially has seen a increase in popularity. Software consists of economic and financial analysis for the evaluation of new mine development proposals.