

## ЕДИН КОМБИНИРАН МОДЕЛ В МЕХАНИКА НА МУЛДАТА

**Михаил Вълков**

*Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски“, 1700 София*

**РЕЗЮМЕ.** Статията е фокусирана върху геомеханичните проблеми на мулдообразуването. Скалният масив е разгледан като съставна среда. Зоната на обрушаване е приета за сипеца се среда. Тя се подчинява на стохастичната геомеханика на Й.Литвинишин. Останалата част от зоната на влияние на подземните минни работи е разгледана като непрекъсната среда, моделирана като линейно-еластична. Решена е спрегната задача, като на границата между двете среди са наложени кинематични условия. Решението е реализирано по метода на крайните разлики. Направени са изводи и препоръки за развиване на модела.

### ABOUT A COMBINED MODEL IN MINING SUBSIDENCE

*Mihail Vulkov*

*University of Mining and Geology "St. Iv. Rilski", 1700 Sofia*

**ABSTRACT.** The article is focused on the geomechanical problems of the mining through formation. The rock mass is considered as a forming medium. The collapsed zone is taken to be a loose medium. It follows the laws of I. Litvinishin's stochastic geomechanics. The remaining portion affected by the underground mining works is assumed to be a continuous medium which is modeled as a linear-elastic one. The conjugated problem is solved as kinematical conditions are placed on the boundaries of the two media. The solution is realized by the method of the finite differences. Conclusions and recommendations for further development of the model are made.

### 1. Въведение

Разработката е фокусирана върху механика на мулдата. При решаване на задачи за определяне на полето на преместванията в зоната на влияние на подземните минни работи, най-често, изваденият от равновесие скален масив се разглежда като еднородна среда – еластична, стохастична, еласто-пластична и др.п.

Това приемане представлява силна идеализация, която в редица случаи води до съществени отклонения на изчисленията от действителните премествания. Както е известно от практиката, над добивните изработки при достатъчна дълбочина на залагане ( $H > 150$  m) се формират три крупни характерни зони: зона на обрушаване, зона на разслояване и формиране на пукнатини и зона, в която непрекъснатостта на средата е съхранена в максимална степен.

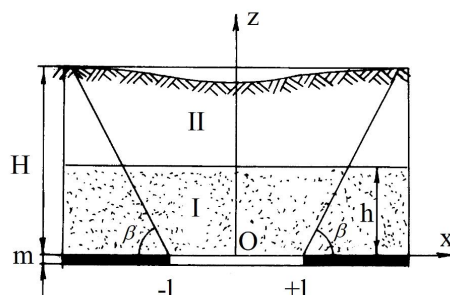
Още в разглежданията на Х.Гил [3] е подчертано, че скалният масив над отработеното пространство е необходимо да се разглежда като съставна среда. Гил приема, че масивът, при решаване на равнинна задача, може да се моделира с двуслойна ивица.

Първият слой, лежащ непосредствено над добивната изработка, се разглежда като дискретна среда. Втората ивица, която се разпростира над първия слой и достига до земната повърхност, е приета за линейно-еластична (Фиг.1).

Както е известно след изземането на полезното изкопаемо скалният масив непосредствено над добивната изработка се обрушава\*. Формира се т.н. свод на обрушаване (фиг.2).

Скалният масив между долнището на изработката и свода на обрушаване е преминал в дискретно състояние и основателно може да бъде третиран като сипеца се среда.

Останалата част от масива в зоната на влияние на минните работи в по-голяма или в по-малка степен запазва своята непрекъснатост и най-често [2] се държи като еластично тяло по отношение на мулдообразуването.



Фиг.1.

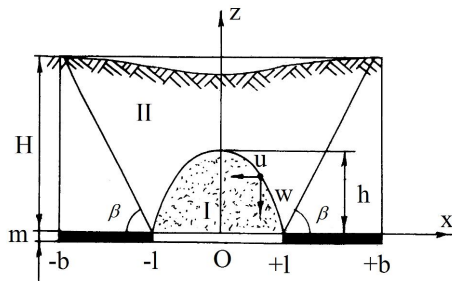
## 2. Формулиране на задачата

Направеният анализ дава основание проблемът за формиране на минната мулда в следствие на подземен добив да бъде формулиран като спрегната задача.

В зоната на обрушаване I на Фиг.2 масивът се моделира със сипеща се среда, подчиняваща се на стохастични закономерности [4]. За определяне на вертикалните премествания в тази област са на лице следните уравнения и гранични условия (Фиг.2):

$$w_z = A(z)w_{xx}, \quad -\infty < x < \infty; \quad z > 0, \quad (1)$$

$$\varphi(x) = w(x,0) = \begin{cases} m\eta & |x| \leq l \\ 0 & |x| > l, \end{cases} \quad (2)$$



Фиг.2.

където  $w(x, z)$  е слягането на точка с координати  $x, z$  от зоната на обрушаване;

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$A(z)$  е коефициент, който определя поведението на скалния масив по отношение на мулдообразуването;  $m$  е иззежданата мощност;  $\eta$  е коефициент на слягане.

Хоризонталните премествания се изчисляват по зависимостта на С.Г.Авершин :

$$u(x, z) = -A(z)w_x. \quad (3)$$

Във втората зона масивът е моделиран с еластична среда. Решава се равнинна задача за равнинно-деформационно състояние. Тъй като граничните условия във втората зона са в премествания, то логично е да се запишат уравненията на Ламе. За равнинна задача те имат вида:

$$(\lambda + G)\Theta_x + G\nabla^2 u = 0; \quad (4)$$

$$(\lambda + G)\Theta_z + G\nabla^2 w = 0, \quad (5)$$

$$\text{където } \lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

са коефициенти на Ламе;

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_z \text{ е относителната обемна деформация;}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ е операторът на Лаплас;}$$

$\mu, E$  са съответно коефициентът на Поасон и модулет на Юнг.

За гранични условия на уравнение (4)-(5) се задават преместванията на граничните точки от свода на обрушаване. Последните се получават като решения на задачата за сипещата се среда по методите на стохастичната механика.

## 3. Решение на спрегнатата задача

### 3.1. Определя се границата на зоната на обрушаване

Зоната на обрушаване се моделира с полуелипса. Тя има за свои полуоси линейните размери  $l$  и  $h$ . (фиг.2).

От условието за равенство на площите преди и след дискретизацията се стига до израз за височината на зоната на обрушаване

$$h = \frac{4m}{\pi(k-1)},$$

където  $m$  е мощността на иззежания пласт;  $k$  е коефициентът на разбухване за вместващите скали.

Уравнението на граничната крива има вида

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{\pi^2(k-1)^2}{16m^2} z^2 = 1. \quad (7)$$

В уравнение (7) фигурират само физико-механични и минно-технологични характеристики.

### 3.2. Решава се задачата на Коши за уравнението на Фурие за обрушената зона, т.е. задача (1)-(2).

Вертикалните премествания се определят за всички точки от полуравнината. Сляганята за точката от границата между двете области, намерени като решение на стохастичната задача, се задават като гранични условия на задачата от равнинната теория на еластичността.

Необходимо е да се отбележи, че решението на задачата на Коши дава стойностите на вертикалните

премествания в цялата горна полуравнина (фиг.2) с уравнение  $z > 0$ . Замяната на преместванията в отделни точки на областта с решенията за тези точки, получени за полуравнина от сипеца се среда, не е теоретично обоснована. Причина за това е, че не всички условия по границата са изпълнени. Многобройни примери от практиката обаче показват [1], че получаваните по този начин решения дават удовлетворителни приложни резултати.

По границата между двете области се изисква да са изпълнени кинематичните условия:

$$u_I(x_{zp}, z_{zp}) = u_{II}(x_{zp}, z_{zp}) \quad -l \leq x_{zp} \leq l; \quad (8)$$

$$w_I(x_{zp}, z_{zp}) = w_{II}(x_{zp}, z_{zp}) \quad 0 \leq z_{zp} \leq h,$$

където  $x_{zp}, z_{zp}$  са координатите на точките от свода на обрушаване, т.е. на граничните точки между двете области.

### 3.3. Решават се уравненията на Ламе (равнинна задача) за еластичната област

Ако скалният масив бъде моделиран с несвиваема среда, за която

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

то уравнения (4)-(5) приемат вида

$$\nabla^2 u = 0; \quad (10)$$

$$\nabla^2 w = 0.$$

#### Реализиране на решението

В настоящата работа се предлага числено решение на разглежданата спрегната задача. Използва се методът на крайните разлики. Определящото уравнение (1) за първата зона чрез полагането

$$z = \eta(\zeta), \quad (11)$$

където  $\eta$  е обратима функция, т.е съществува

$$\zeta = \psi(z)$$

се трансформира в

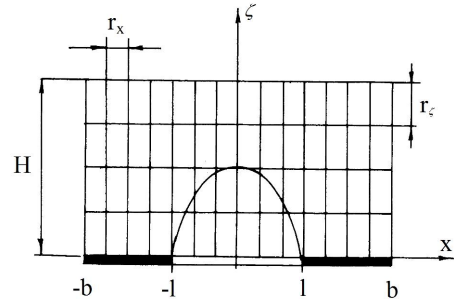
$$\bar{w}_\zeta = \bar{w}_{xx}, \quad (12)$$

където

$$w(x, z) = \bar{w}[x, \eta(\zeta)] = \bar{w}(x, \zeta);$$

$$\zeta = \psi(z) = \int_0^z \frac{ds}{A(s)}.$$

След това геометричната ивица, която включва напълно зоната на влияние, се покрива с правоъгълна мрежа (фиг.3).



Фиг.3.

Интервалът  $[-b, b]$  се дели чрез точки  $x_i = i \cdot r_x$  ( $i = \overline{1, m}$ ), където  $r_x$  е стъпката по ос Ох.

Аналогично, интервалът  $[0, H]$  се дели с точки  $\zeta_j = j \cdot r_\zeta$  ( $j = \overline{1, m}$ ), където  $r_\zeta$  е стъпката по ос  $O_\zeta$ .

Стъпката  $r_x$  се избира по съображения за точност, а стъпката  $r_\zeta$  се определя от уравнението на свода на обрушаване, т.е. от

$$r_\zeta = \frac{h}{l} \sqrt{l^2 - r_x^2}. \quad (13)$$

Точките  $(x_i, \zeta_j)$  определят възлите на правоъгълната мрежа, в които се търси решението.

Преместванията на възлите на мрежата са съответно

$$\bar{w}(x_i, \zeta_j) = \bar{w}_{i,j}; \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\bar{u}(x_i, \zeta_j) = \bar{u}_{i,j}$$

$$\bar{w}(x_i, 0) = \varphi_i; \quad i = \overline{1, n},$$

$$\bar{u}(x_i, 0) = 0,$$

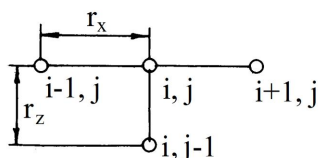
където  $\varphi_i$  са стойностите на функцията  $\varphi(x_i)$  в граничните точки.

Производните в (12) се заместват с диференчните схеми:

$$\bar{w}_{xx} \approx \frac{\bar{w}_{i+1,j} - 2\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{i-1,j}}{r_x^2};$$

$$\bar{w}_z \approx \frac{\bar{w}_{i,j} - \bar{w}_{i,j-1}}{r_z}$$

по четириточковия шаблон на фиг.4.



Фиг.4.

Замествайки (14) в (12) се получава системата линейни уравнения

$$\bar{w}_{i,j} = \frac{1}{1+2k} (\bar{w}_{i,j-1} + k\bar{w}_{i+1,j} + k\bar{w}_{i-1,j});$$

$$\bar{w}_{-b,j} = \bar{w}_{b,j} = 0;$$

$$\bar{w}_{i,0} = \bar{\varphi}(x_i) = \bar{\varphi}_i; \quad (15)$$

където

$$k = \frac{r_z}{r_x^2}.$$

След решаване на (15) се намират стойностите на вертикалните премествания в точките  $(i, j)$  от мрежата на първата област в т.ч. и стойностите на сляганията в граничните точки от полуелипсата, ограничаваща зоната на обрушаване.

Хоризонталните премествания се определят от зависимостта

$$\bar{u}_{i,j} = -A(\zeta_i) \frac{\bar{w}_{i+1,j} - \bar{w}_{i,j}}{r_x}, \quad (16)$$

където производната  $\bar{w}_x$  е заместена с диференчната схема.

$$\bar{w}_x \approx \frac{\bar{w}_{i+1,j} - \bar{w}_{i,j}}{r_x}.$$

Изчислените стойности на преместванията на точките от мрежата по границата се задават като гранични условия за еластичната задача.

При нея се решават уравненията на Лаплас

$$\bar{u}_{xx} + \bar{u}_{zz} = 0; \quad (17)$$

$$\bar{w}_{xx} + \bar{w}_{zz} = 0.$$

Частните производни в тях се заменят със схеми от крайни разлики

$$\bar{u}_{xx} \approx \frac{\bar{u}_{i-1,j} - 2\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i+1,j}}{r_x^2};$$

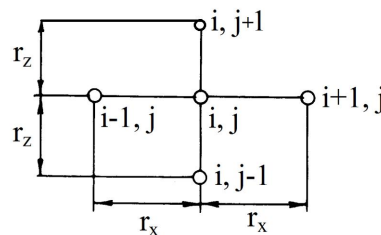
$$\bar{u}_{zz} \approx \frac{\bar{u}_{i,j-1} - 2\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j+1}}{r_z^2};$$

$$(18)$$

$$\bar{w}_{xx} \approx \frac{\bar{w}_{i-1,j} - 2\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{i+1,j}}{r_x^2};$$

$$\bar{w}_{zz} \approx \frac{\bar{w}_{i,j-1} - 2\bar{w}_{i,j} + \bar{w}_{i,j+1}}{r_z^2}.$$

За съставянето на (18) е използван петточковият шаблон на фиг.5.



Фиг. 5.

Получават се системи линейни уравнения  
а) за определяне на хоризонталните премествания

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{2(1+\delta)} [\bar{u}_{i-1,j} + \bar{u}_{i+1,j} + \delta(\bar{u}_{i,j-1} + \bar{u}_{i,j+1})] \quad (19)$$

$$i = 1, \bar{n}-1$$

$$j = 1, \bar{m}$$

$$\bar{u}_{\pm b,j} = 0, \quad 0 \leq \zeta_i \leq \bar{H};$$

$$\bar{u}_{i,j} = 0, \quad -b \leq x_i < -l; \quad l < x_i \leq b; \quad \zeta_i = 0;$$

$$\bar{u}_{i,j} = \bar{u}_{i,j}^{ep}; \quad -l \leq x \leq l; \quad \zeta_i = \frac{h}{l} \sqrt{l^2 + x_i^2}.$$

б) за определяне на вертикалните премествания

$$\bar{w}_{i,j} = \frac{1}{2(1+\delta)} \left[ \bar{w}_{i-1,j} + \bar{w}_{i+1,j} + \delta(\bar{w}_{i,j-1} + \bar{w}_{i,j+1}) \right]$$

$$i = 1, \overline{n-1}$$

$$j = 1, \overline{m}$$

$$\bar{w}_{\pm b,j} = 0; \quad 0 \leq \zeta_i \leq \bar{H};$$

$$\bar{w}_{i,0} = 0; \quad -b \leq x_i < l; \quad l < x_i \leq b; \quad (20)$$

$$\bar{w}_{i,j} = \bar{w}_{i,j}^{ep}; \quad -l \leq x_i \leq l; \quad \zeta_i = \frac{h}{l} \sqrt{l^2 + x_i^2},$$

където  $\delta = \frac{r_x^2}{r_\zeta^2}$ .

Получените резултати от решението на (19) и (20) се ретрансформират за изходната координатна система.

### Заклучение

От направените разсъждения може да се установи, че е необходимо и възможно, изваденият от равновесие скален масив да бъде моделиран в различните му зони с различни типове среда, които характеризират най-адекватно мулдообразуването.

Препоръчана за публикуване от Катедра  
"Техническа механика", МТФ

Предложеното решение (с цената на някои компромиси) помирява две коренно различни парадигми за поведението на скалния масив – тази за дискретна и тази, за непрекъсната среда. Така, обаче, се постига по-голяма близост до физическата същност на процеса и до наблюдаваните реални явления при подземен добив на полезни изкопаеми.

Разглежданата спрегната задача може да бъде решена и аналитично. Търсенето на аналитично решение ще е обект на следващи изследвания.

### Литература

1. Димова В., Механика на мулдата, С., ИК „Св. Иван Рилски“, 1995 г.
2. Мартынов Ю. И., Управление деформированием подрабатываемого массива горных пород глубокими скелями, Москва, Стройиздат, 1983 г.
3. Gil H., Distribution of displacements in a horizontal directed layer composed of loose and elastic media, Bull. Acad. Polon. Sci Serie des sci techn, XIV, 2, 1968
4. Litwiniszyn J., Gebirgsbewegungen über Abbau als stochastischer Prozeß aufgefasst, Freib. – Forschungshefte, 22, 1956, s. 45-64.