ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 52, Св. II, Добив и преработка на минерални суровини, 2009
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 52, Part II, Mining and Mineral processing, 2009

ЗА ЕДИН ЕЛАСТОПЛАСТИЧЕН МОДЕЛ В МЕХАНИКА НА МУЛДАТА

Михаил Вълков

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

РЕЗЮМЕ: В статията се разглежда задачата за определяне на мулдата, получена на земната повърхност като следствие на подземен добив на полезни изкопаеми. Скалният масив се разглежда като еластопластична среда на А. А. Илюшин. Основните уравнения на теорията на малките еластопластични деформации се изразяват чрез преместванията. Решението се търси по метода на последователните приближения. Стартира се от еластичното решение. Получените уравнения се решават числено по метода на крайните разлики.

ABOUT AN ELASTOPLASTIC MODEL IN MINING SUBSIDENCE
Mihail Vulkov
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia

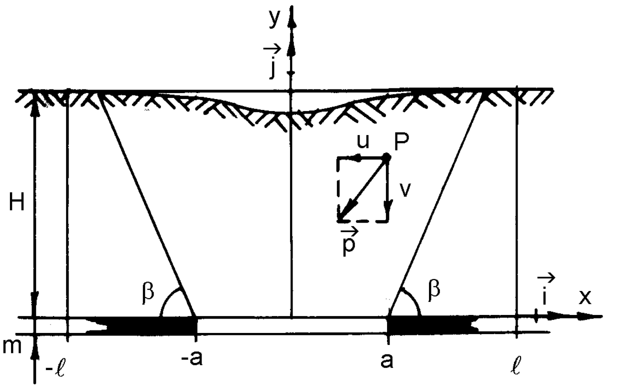
ABSTRACT: This article examines the task of determining the trough received on the earth surface as a result of underground mining of mineral resources. Rock massif is regarded as A. A. Ilyushin's elastoplastic medium. The basic equations of the theory of small elastoplastic deformations are expressed through displacements. The solution is seek via the method of successive approximations. The first step is to obtain the elastic solution. The resulting equations are solved numerically by the method of final differences.

1. Въведение

Скалният масив представлява сложна нееднородна среда. Както се констатира при измервания, зависимостта между напреженията и деформациите има нелинеен характер [4]. Извадeният от равновесие чрез подземни минни работи скален масив, следователно, трябва да се разглежда като нелинейна деформируема среда. Поведението на подобна среда може да се опише адекватно чрез теорията на малките еластопластични деформации на А. А. Илюшин [1,2].

2. Постановка на задачата

Изследва се формирането на минна мулда на земната повърхност в резултат от изваемането на хоризонтален пласт полезно изкопаемо, както е показано на фигура 1.



Фиг. 1.

Добивната минна изработка е симетрична спрямо ос Oy. Предполага се, че изваемaният пласт полезно изкопаемо е с издържана мощност $(m = const)$ и заляга на достатъчно голяма дълбочина $H > 150m$.

Преместването $\vec{p}$ на произволна точка $P(x, y)$ от зоната на влияние на миннинте работи се представя във вида

$\vec{p} = u.\vec{j} + v.\vec{j}$,

където $\vec{i}$ и $\vec{j}$ са единичните вектори съответно на осите Ox и Oy.

По границите на зоната на влияние на минните работи не се наблюдават премествания, т.е. при $x = \pm 1$ $u(\pm \ell, y) = 0$ и $v(\pm \ell, y) = 0$, където u и v са съответно хоризонталното и вертикалното преместване на точка от зоната на влияние (Фиг. 1).

Тъй като най-важната характеристика на мулдата е слягането (вертикалното преместване) на точките от земната повърхност, то задачата се решава в премествания, т.е. търсят се функциите $u(x, H)$ и $v(x, H)$.

3. Теоретични основи

При решаване на равнинната задача за определяне на мулдата механиката на непрекъснати среди разполага със следните уравнения:

- за равновесие на средата;

- зависимости на Коши, даващи връзка между премествания и деформации или зависимостите за съвместимост на деформациите.

Към горните релации се задават съответните гранични условия. За изучавания проблем те имат вида:

$$u(x,0) = 0; \; -\infty \langle x \langle \infty;$$

$$v(x,0) = \begin{cases} v_0 & |x| \leq a; \\ 0 & |x| \rangle a; \end{cases}$$

$$u(\pm\ell, y) = 0; \quad 0 \leq y \leq H;$$

$$v(\pm\ell, y) = 0; \quad 0 \leq y \leq H. \qquad (1)$$

Към основните уравнения на механиката на непрекъснатите среди се добавя физически закон, който дефинира връзката между напреженията и деформациите.

В теорията на малките еластопластични деформации тази връзка се търси от вида [2]:

$$\sigma^i = f\left(\varepsilon^i\right) \quad , \qquad (2)$$

където σ^i е интензивността на напреженията;

ε^i е интензивността на деформациите;

$$\varepsilon^i = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{6\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y\right) + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2};$$

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ са относителни линейни деформации;

γ_{xy} е ъгловата деформация.

В разглеждания модел компонентите на тензора на напрежението се записват [2], както следва:

$$\sigma_x = \sum + \frac{2}{3}.\frac{\sigma^i}{\varepsilon^i}.\varepsilon_x;$$

$$\sigma_y = \sum + \frac{2}{3}.\frac{\sigma^i}{\varepsilon^i}.\varepsilon_y; \qquad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{3}.\frac{\sigma^i}{\varepsilon^i}.\gamma_{xy},$$

където $\sum$ е средното напрежение.

4. **Определяне на** $f\left(\varepsilon^i\right)$

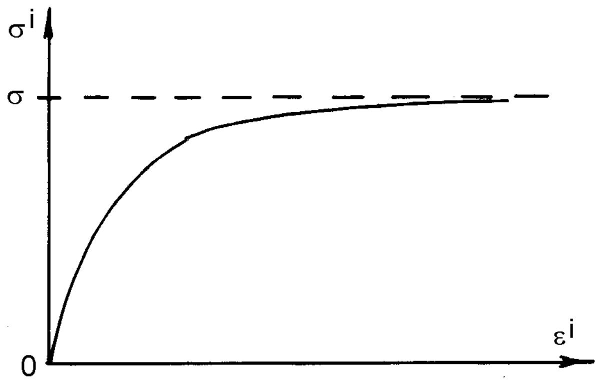
Законът за нелинейната еластичност се представя чрез

$$f\left(\varepsilon^i\right) = E_0\left(1 - \omega^i\right)\varepsilon^i, \qquad (4)$$

където E_0 е началният модул на еластичност;

$\omega^i = \omega^i\left(\varepsilon^i\right)$ е функция на пластичност.

Функционалната зависимост (4) е илюстрирана на Фиг. 2.



Фиг. 2.

За практически цели, тя може да бъде представена във вида:

$$f\left(\varepsilon^i\right) = \sigma_u \, th\left(\alpha\varepsilon^i\right), \qquad (5)$$

където σ_u е границата на временна якост;

$$\alpha = \frac{E_0}{\sigma_u}.$$

От сравнението на (4) и (5) се определя

$$\omega^i\left(\varepsilon^i\right) = 1 - \frac{\sigma_u}{E_0\varepsilon^i} th \frac{E_0\varepsilon^i}{\sigma_u}. \qquad (6)$$

5. **Числено решение**

За решаване на получената гранична задача от минната геомеханика се прилага методът на последователните приближения. Първото решение, в съответствие с [2], е еластично. То се получава като се приеме, че $\omega_0^i = 0.$

На разположение са следните зависимости:

5.1 **Уравнения на Ламе**

В кинематика на мулдата основен интерес представляват преместванията на точките от земната повърхност в зоната на влияние. По тази причина основните уравнения на теория на еластичността се записват в премествания. Уравненията на Ламе за разглежданата задача приемат вида

$$(G+\lambda)\theta_x + G\nabla^2 u + X = $$
$$= G\begin{bmatrix} \omega^i\nabla^2 u + 0{,}333\omega^i\theta_x + 1{,}333\omega_x^i u_x - \\ -0{,}666\omega_x^i v_y + \omega_y^i\left(u_y + v_x\right) \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$(G+\lambda)\theta y + G\nabla^2 v + Y = $$
$$= G\begin{bmatrix} \omega^i\nabla^2 v + 0{,}333\omega^i\theta_y + 1{,}333\omega_y^i v_y - \\ -0{,}666\omega_y^i u_y + \omega_x^i\left(u_y + v_x\right) \end{bmatrix},$$

където $\theta = u_x + v_y$ е обемната деформация

λ, G са коефициентите на Ламе;

∇^2 е операторът на Лаплас;

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ v_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$ и т.н.

5.1. **Гранични условия**

Граничните условия също се записват в премествания.

За разглежданата задача те имат вида (1).

5.2. **Връзки между напреженията и деформациите**

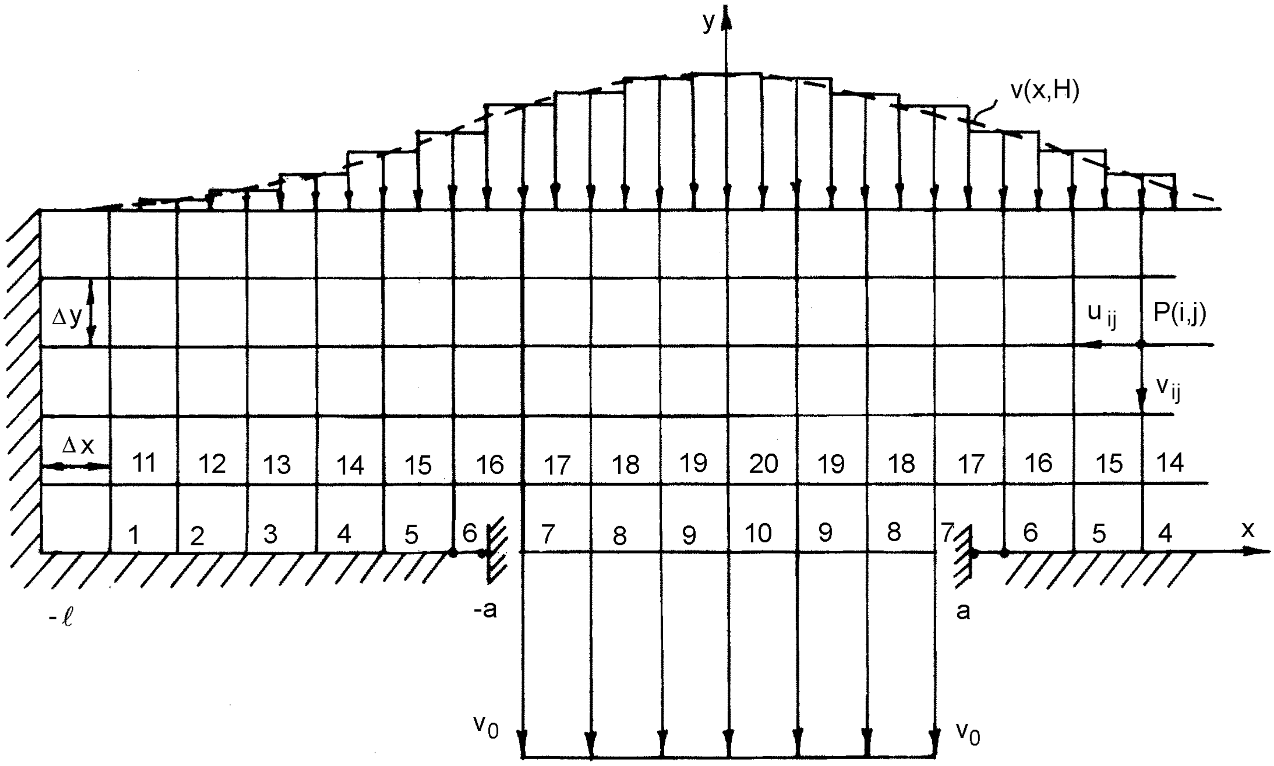
Физическият закон за връзка между напреженията и деформациите се представя както следва:

$$\sigma^i = \sigma_u th(\alpha\varepsilon^i). \qquad (8)$$

6.**Пример**:

Задачата за определяне на полето на преместванията в скалния масив и на земната повърхност в зоната на влияние на подземните минни работи чрез теорията на малките еластопластични деформации може да бъде решена числено по метода на крайните разлики. Той има предимството, че може да бъде реализиран програмно сравнително лесно. Необходимите при това познания не излизат извън рамките на обучението във висшите технически училища.

Изчислителната схема за реализиране на метода на крайните разлики е показана на Фиг.3.



Фиг. 3.

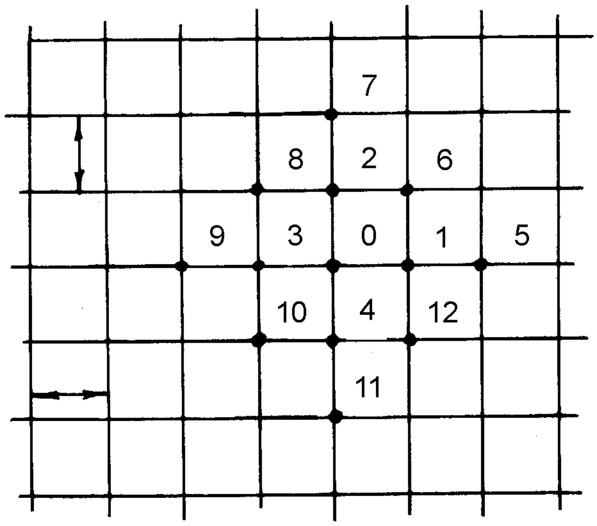
Тъй като мулдата е симетрична спрямо вертикалната ос Oy, то може да бъде разгледана едната половина на повлияната от минните работи ивица на скалния масив (фиг.3).

Областта от тази ивица, включваща напълно зоната на влияние, се ограничава от вертикалите, имащи уравнения $x = \pm\ell$. Тази област се покрива с правоъгълна мрежа, която има стъпки Δx и Δy съответно по оси Ox и Oy.

Производните, влизащи в уравнения (7) се заместват със схеми с крайни разлики. При използване на квадратна мрежа $(\Delta x = \Delta y = \delta)$ за представяне на производните може да се приложи [4] шаблонът, представен на Фиг.4. С негова помощ производните в определящите уравнения се заместват с крайни разлики.

Алгоритъмът за провеждане на численото решение може да се построи, както следва:

- за нулевото ниво стойностите на преместванията (решението) са известни, тъй като е известен начинът, по който се провеждат минните работи;
- за всяко следващо ниво стойностите на търсените функции се определят като решение на системата линейни алгебрични уравнения, получена след замяна на производните в уравнение (7) със схеми от крайни разлики според избрания шаблон.



Фиг.4.

Препоръчана за публикуване от Катедра “Техническа механика”, МТФ

Литература

1. Илюшин, А.А., *Механика сплошной среди*, - М., Изд.-во МГУ 1978, 287 с.
2. Илюшин, А.А., *Пластичность* – М., изд-во АН СССР, 1963, 272 с.
3. Рындин, Н.И., *Краткий курс теории упругости и пластичности*, - Л., Изд-во Ленингр.Ун-та, 1974, 136 с.
4. Тимошенко, С.П., Гудьер Дж., *Теория упругости*, М., Изд-во Наука, 1975, 575 с.