# МАТРИЧНО ПРЕДСТАВЯНЕ НА ЗАДАЧИ ОТ ПРОСТРАНСТВЕНАТА КИНЕМАТИКА

***Михаил Вълков***

*Минно-геоложки институт "Св. Иван Рилски", 1700 София*

**РЕЗЮМЕ**: В статията се представя обобщен алгоритъм за решаване на задачи от пространствената кинематика. Той се основава на широко приложение на векторните и матрични операции при определяне на основните кинематични параметри на точки от изследвания механизъм. Представен е пример за използването на алгоритъма. Даден е анализ на предимствата и недостатъците на матричното представяне на основните зависимости в кинематиката и сравнение с класическите подходи. Обсъдена е приложимостта на матрични алгоритми в учебния процес и при провеждане на изследвания.

MATRIX PRESENTMENT OF 3D KINEMATICAL PROBLEMS

*Mihail Vulkov*
*University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia*

ASTRACT. In this article is presented generalized algorithm for solving 3D kinematical problems. It is based on wider application of vector and matrix operations for determining the kinematic parameters of the main points of the studied mechanism. An example of using the algorithm is presented. An analysis of the advantages and disadvantages of the matrix presentation of basic kinematics dependencies in comparison with classical approaches is given. Discussed is the applicability of matrix algorithms in the learning process and in scientific research.

## Въведение

Статията има за цел да изложи възможности за решаване на по-сложни задачи от пространствената кинематика и тяхното внедряване в учебния процес при изучаването на теоретична механика във висшите технически училища. Основно внимание се отделя на разширеното ползване на основните кинематични величини и връзките между тях, представени в матричен вид. На тази основа е предложен алгоритъм, който осигурява формализиран подход към сравнително сложни кинематични задачи. По този начин, от една страна, се облекчава възприемането на преподавания материал от студентите и се преодоляват редица психологически бариери у тях. От друга страна алгоритмите, базирани върху матрично представяне на скоростите и ускоренията на точки от движещ се обект, подлежат на сравнително просто адаптиране за решаване с помощта на компютри.

Знанията, необходими за прилагането на споменатите алгоритми, не надхвърлят тези, получавани от курсовете по математика, преподавани във висшите технически училища.

### 1. Теоретични основи

Изходна при съставянето на алгоритъма е зависимостта на Леонард Ойлер (1707-1783), която свързва скоростите на две точки от движещо се твърдо тяло

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}, \qquad (1)$$

където $\vec{v}_A$ е скоростта на полюса (на точката с известна скорост);

$\vec{v}_B$ е търсената скорост на определена точка от тялото;

$\vec{\omega}$ е ъгловата скорост, с която ротира разглежданият обект

Векторите, участващи в (1), могат да бъдат представени аналитично в координатна система Oxyz, както следва

$$\vec{v}_B = v_{B_x}.\vec{i} + v_{B_y}.\vec{j} + v_{B_z}.\vec{k}; \qquad (2)$$

$$\vec{v}_A = v_{A_x}.\vec{i} + v_{A_y}.\vec{j} + v_{A_z}.\vec{k}; \qquad (3)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x.\vec{i} + \omega_y.\vec{j} + \omega_z.\vec{k}; \qquad (4)$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j} + (z_B - z_A).\vec{k}, \qquad (5)$$

където $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ са съответно единичните вектори на оси Ox, Oy и Oz.

Използвайки зависимости (2)-(5), основната формула на кинематиката се записва в матричния вид

$$\begin{vmatrix} v_{B_x} \\ v_{B_y} \\ v_{B_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_{A_x} \\ v_{A_y} \\ v_{A_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

където

$$\begin{vmatrix} 0-\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0-\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}$$ е матрицата на ъгловата скорост.

Чрез еднократно диференциране на Ойлеровата формула спрямо времето се получава известната релация за ускорението на произволна точка B.

При наличие на информация за ускорението на полюса $\vec{a}_A$, за ъгловата скорост $\vec{\omega}$ и ъгловото ускорение $\vec{\varepsilon}$ на движещото се тяло, ускорението на точка B се пресмята чрез

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega} \times \left( \vec{\omega} \times \vec{AB} \right). \qquad (7)$$

Като се отчете, че

$$\vec{a}_B = a_{B_x}.\vec{i} + a_{B_y}.\vec{j} + a_{B_z}.\vec{k};$$
$$\vec{a}_A = a_{A_x}.\vec{i} + a_{A_y}.\vec{j} + a_{A_z}.\vec{k};$$
$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x.\vec{i} + \varepsilon_y.\vec{j} + \varepsilon_z.\vec{k};$$

зависимост (7) може да се представи в матричен вид [1]

$$\begin{vmatrix} a_{B_x} \\ a_{B_y} \\ a_{B_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{A_x} \\ a_{A_y} \\ a_{A_z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & \omega_x\omega_y & \omega_x\omega_z \\ \omega_x\omega_y & -\omega_z^2 - \omega_x^2 & \omega_y\omega_z \\ \omega_x\omega_z & \omega_y\omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

където

$$\begin{vmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix}$$ е матрицата на ъгловото ускорение.

Релация (8) може да се представи в по-компактна форма

$$\begin{vmatrix} a_{B_x} - a_{A_x} \\ a_{B_y} - a_{A_y} \\ a_{B_z} - a_{A_z} \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} -\omega_y^2 - \omega_z^2 & -\varepsilon_z + \omega_x\omega_y & \varepsilon_y + \omega_x\omega_z \\ \varepsilon_z + \omega_x\omega_y & -\omega_z^2 - \omega_x^2 & -\varepsilon_x + \omega_y\omega_z \\ -\varepsilon_y + \omega_x\omega_z & \varepsilon_x + \omega_y\omega_z & -\omega_x^2 - \omega_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}. (9)$$

## 2. Алгоритъм за решаване на пространствени задачи чрез матричните зависимости

Като се използва матричният запис на Ойлеровите формули (6) и (9) кинематични задачи от пространствено движение могат да се решават по следния шест стъпков алгоритъм.

Анализират се връзките, наложени върху изследвания обект. Информацията, която се получава за скоростите и ускоренията на определени точки от наложените ограничения върху разглежданото тяло, се използва при реализиране на следващите стъпки от алгоритъма. С нейна помощ се избира рационално координатна система, опростяват се изчислителната система и следващите пресмятания.

Съставя се изчислителна схема на решаваната задача.

Записват се в аналитичен вид дадените и търсените вектори на скоростите и ускоренията за изучаваните точки от движещия се обект. Те се записват като вектори-стълбове. Съставят се матриците на ъгловата скорост и ъгловото ускорение на тялото.

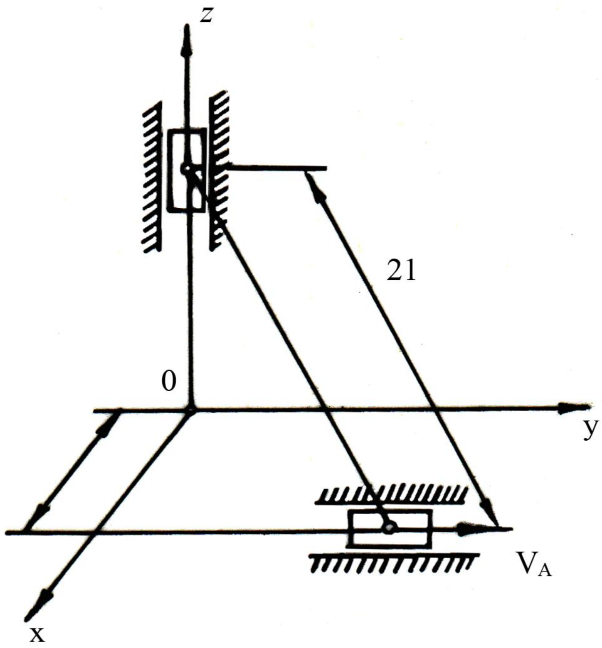
Прилагат се Ойлеровите формули в матричен запис.

Решават се получените системи уравнения спрямо търсените величини.

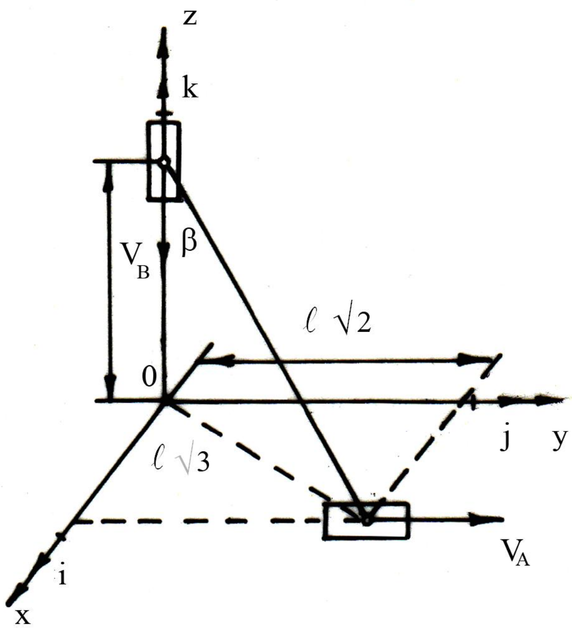
Прави се проверка на определените неизвестни. За целта се използват възможностите на дименсионния анализ, както и алтернативни методи, предлагани от механиката.

## 3. Пример

Плъзгачът A се движи в равнина Oxy по права x=l с постоянна скорост $v_o$, както е показано на фигура 1. Краят B на пръта AB се плъзга по ос Oz. Прътът AB е прикрепен към плъзгачите A и B чрез сферични шарнирни лагери. Да се определят скоростта и ускорението на точка B, в момента, когато разстоянието на тази точка до началото на координатната система е OB=l, ако AB=2l.



**Фиг.** 1



**Фиг.** 2

Решение:

Изчислителната схема на механизма е представена на фиг. 2. Трудността на разглежданата задача се състои в това, че двата плъзгача A и B се движат по две кръстосани прави.

От наложените върху телата на разглеждания механизъм връзки се установява, че

$$\vec{v}_A = v_0.\vec{j};$$
$$\vec{v}_B = v_B.\vec{k};$$
$$\vec{a}_B = -a_B.\vec{k}.$$

Скоростта на точка B може да се определи директно като се използва теоремата за проектираните скорости на две точки от движещо се твърдо тяло върху правата, която ги свързва, тоест

$$\vec{v}_A.\vec{AB} = \vec{v}_B.\vec{AB}. \qquad (10)$$

Трите вектора, участващи в равенство (10), се представят в аналитичен вид

$$\vec{v}_A = v_{A_x}.\vec{i} + v_{A_y}.\vec{j} + v_{A_z}.\vec{k} = 0.\vec{i} + v_0.\vec{j} + 0.\vec{k};$$

$$\vec{v}_B = v_{B_x}.\vec{i} + v_{B_y}.\vec{j} + v_{B_z}.\vec{k} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} - v_B.\vec{k};$$

$$\vec{AB} = (x_B - x_A).\vec{i} + (y_B - y_A).\vec{j} + (z_B - z_A).\vec{k} = -\ell.\vec{i} - \ell\sqrt{2}.\vec{j} + \ell.\vec{k}.$$

Тогава равенството $(10)$ добива вида

$$0.(-\ell) + v_0\left(-\ell\sqrt{2}\right) + 0.\ell = 0(-\ell) + 0\left(-\ell\sqrt{2}\right) - v_B.\ell.$$

От последната зависимост се намира

$$v_B = v_0.\sqrt{2}. \qquad (11)$$

Записва се матричното равенство (2), което свързва скоростите на точките A и B от изследваното тяло, а именно:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -v_0\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\ell \\ -\ell\sqrt{2} \\ \ell \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Равенство (12) е еквивалентно на следната система от уравнения

$$0 = \ell\sqrt{2}\omega_z + \ell\omega_y;$$
$$0 = v_0 - \ell\omega_z - \ell\omega_x;$$
$$-v_0\sqrt{2} = \ell\omega_y - \ell\sqrt{2}\omega_x. \qquad (13)$$

От последната се намират зависимостите

$$\omega_y = -\sqrt{2}\omega_z;$$
$$\omega_x = \frac{v_0}{\ell} - \omega_z. \qquad (14)$$

С помощта на (14) се записват съотношенията между компонентите на ъгловото ускорение

$$\varepsilon_y = -\sqrt{2}\varepsilon_z; \qquad (15)$$
$$\varepsilon_x = -\varepsilon_z,$$

а следователно и

$$\varepsilon_y = \sqrt{2}\varepsilon_x. \qquad (16)$$

За намиране на ускорението на точка B се използва релация (9), която за конкретния случаи има вида

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{B_z} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -\omega_y^2-\omega_z^2 & -\varepsilon_z+\omega_x\omega_y & \varepsilon_y+\omega_x\omega_z \\ \varepsilon_z+\omega_x\omega_y & -\omega_z^2-\omega_x^2 & -\varepsilon_x+\omega_y\omega_z \\ -\varepsilon_y+\omega_x\omega_z & \varepsilon_x+\omega_y\omega_z & -\omega_x^2-\omega_y^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\ell \\ -\sqrt{2}\ell \\ \ell \end{vmatrix}. \quad (17)$$

Окончателно за ускорението $a_B$ се намира

$$a_B = a_{B_z} = -\frac{3v_0^2}{\ell}.$$

За проверка може да се използва фактът, че изразът в дясно на последното равенство има размерност на ускорение.

Алтернативно ускорението на точка B може да бъде определено и от веригата равенства

$$\vec{a}_B =$$

$$\left. \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{AB} + \vec{\omega}\left(\vec{\omega} \times \vec{AB}\right) \right| .\vec{AB} \;;$$

$$\vec{a}_B .\vec{AB} = \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{AB}\right)\right].\vec{AB};$$

$$\vec{a}_B .\vec{AB} = \left[\vec{\omega} \times \left(\vec{v}_B - \vec{v}_A\right)\right].\vec{AB};$$

$$a_B.\ell = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & -v_0 & -\sqrt{2}v_0 \\ -\ell & -\sqrt{2}\ell & \ell \end{vmatrix}.$$

От последното уравнение се пресмята

$$a_B = -\frac{3v_0^2}{\ell}.$$

5. **Методически изводи**

Матричното представяне на основните зависимости в кинематиката предлага един формализиран подход към сложните задачи на този раздел от теоретичната механика. Този подход с успех може да се прилага при обучението на студентите във висшите технически училища.

Разглежданият алгоритъм предлага един алтернативен начин за излагане на материала, който допълва и обогатява знанията за инструментариума, с който разполага теоретичната механика при решаване на пространствени кинематични задачи.

Формализираният подход дава на студентите увереност при сблъскване с по-сложни проблеми и е в съответствие с тяхната нагласа да се възползват от компютрите си при решаването им.

Матричното представяне на основни кинематични зависимости не може да измести класическите методи на обучение, но има място на паралелно съществуване с тях. То дава още една гледна точка към решаваните задачи. Последното, от своя страна, провокира евристичното и креативното мислене на студентите, отваря съзнанието им за нови идеи и подходи. Именно креативното, евристичното и разкрепостено мислене са едни от основните образователни ценности, залегнали в идеята за модерно техническо обучение във висшите училища.

## Литература


Митюшов, Е. А., Берестова, С. А., Теоретическая механика, М., изд. "Академия", 2006, 320с.



*Препоръчана за публикуване от Катедра "Техническа механика", МТФ*