ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 52, Св. II, Добив и преработка на минерални суровини, 2009
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 52, Part II, Mining and Mineral processing, 2009

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ТЕНЗОРНИ ПРЕСМЯТАНИЯ ПРИ СМЯНА НА КООРДИНАТНАТА СИСТЕМА

Юлиян Димитров

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София, E-mail: juldim@abv.bg

РЕЗЮМЕ. Основни величини в скалната механика се представят тензорно. Използва се специфичен аналитичен апарат, включващ функционални диференциални зависимости.
В настоящия материал се предлага една техника на пресмятане на диференциални зависимости. Въвежда се специално означение за диференцирането при умножение на векторни, матрични и тензорни величини.

DIFERENTIAL TENSOR CALCULUS AT TRANSFORMING OF COORDINATE SYSTEM

Julian Dimitrov
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, e-mail: juldim@abv.bg

ABSTRACT. Basic quantities in rock mechanics are presented as tensors. Specific analytical apparatus is used, that includes functional differential dependencies.
In this material offers a techniques for calculation of differential dependencies. A special denotation for differentiating of vector, matrixes and tensor quantities is introduced.

Въведение

Механиката на непрекъснатите среди и по-специално, механика на скалите, използват специфичен аналитичен апарат, включващ функционални и диференциални зависимости между скаларни, векторни и матрични (тензорни) величини. Тези величини приемат стойности спрямо определена координатна система и представлява интерес един общ метод за преобразуване на изразите при смяна на координатната система.

В механика на еластичните среди един от основните параметри е тензора на напреженията $T_{xy} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$. Основно означение за диференциален оператор е векторът на градиента $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$, който както и тензорът на напреженията T_{xy} са спрямо декартова координатна система (Влахов, 2001; Минчев, 1980).

Ако при смяна в полярна координатна система $O_{xy} \to O_{r\theta}$ се направят съответните пресмятания, както във Върбанов (1965) може да се запише в матричен вид

$$T_{xy} = \Lambda' T_{r\theta} \Lambda \,, \tag{1}$$

където $\Lambda = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ е матрицата на прехода при завъртане на ъгъл θ и $T_{r\theta} = \begin{pmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta \end{pmatrix}$ е тензорът на напреженията в полярни координати.

Също така векторът $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$ ще наричаме <u>*полярен градиент*</u> и е записан като вектор – стълб.

Градиентът може да се запише и като вектор – ред във вида $\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \Lambda'$. Както се забелязва в сила е правилото за транспониране на матрици при тяхното умножение.

Уравнението на статиката може да се представи в матричен вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) T_{xy} = (0,0). \tag{2}$$

Ако, обаче, искаме да запишем съответното уравнение, получено чрез транспониране, ще срещнем определени затруднения. Това се дължи на факта, че записът $T_{xy} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$

по – скоро се възприема като $\begin{pmatrix}\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \\ \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix}$

отколкото $\begin{pmatrix}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\end{pmatrix}$.

За да укажем начина на действие на градиента ще въведем означение, при което със стрелка се посочва множителят, който е подложен на диференциране. По този начин за съответното на (2) транспонирано уравнение на статиката получаваме

$$T_{xy}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix} \quad . \tag{3}$$

Най общо така въведеното означение ще наричаме означение за ДТП (означение за диференциално тензорно пресмятане).

Цел

Да се предложи един начин за преобразуване на тензорно представени диференциални зависнимости, който тук ще наричаме диференциално тензорно пресмятане (ДТП).

Да се формулират основните свойства определящи коректността на ДТП и да се представи приложение на метода.

Същност на ДТП

Определение: Оператора $L(a)$, действащ в множеството от реални числа R, наричаме скаларен, линеен, диференциален оператор, когато за произволни числа $a, b, \lambda, \mu \in R$ е изпълнено

$$L(\lambda a + \mu b) = \lambda L(a) + \mu L(b) \text{ и} \tag{4}$$

$$L(ab) = aL(b) + bL(a) \tag{5}$$

Свойство: Линейната комбинация на скаларни линейни диференциални оператори е линеен диференциален оператор.

Доказателство:

Нека $D(x) = \lambda L(x) + \mu G(x)$ е линейна комбинация на линейните и диференциални оператори L и G.

Тогава

$$D(pa+qb) = \lambda L(pa+qb) + \mu G(pa+qb) =$$
$$= \lambda pL(a) + \lambda qL(b) + \mu pG(a) + \mu qG(b) =$$
$$= p[\lambda L(a) + \mu G(a)] + q[\lambda L(b) + \mu G(b)] =$$
$$= \lambda D(a) + \mu G(b).$$

Също $D(ab) = \lambda L(ab) + \mu G(ab) =$

$$= \lambda[aL(b) + bL(b)] + \mu[aG(b) + bG(b)] =$$
$$= a[\lambda L(a) + \mu G(a)] + \mu[\lambda L(b) + \mu G(b)] =$$
$$= aD(b) + bD(a).$$

Определение: Нека $L(x)$ и $G(x)$ са скаларни линейни диференциални оператори. Тогава вектора $(L,G) = (L(x), G(x))$ наричаме линеен диференциален оператор вектор ред.

Дефинираме действие на оператора върху произведение от две числови матрици.

Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$.

Тогава въвеждаме означението

$$(L,G)AB = (a_{11}L + a_{21}G, a_{12}L + a_{22}G)B =$$
$$= a_{11}L(b_{11}) + a_{21}G(b_{11}) + a_{12}L(b_{21}) + a_{22}G(b_{21}) +$$
$$+ a_{11}L(b_{12}) + a_{21}G(b_{12}) + a_{12}L(b_{22}) + a_{22}G(b_{22}).$$

При така въведеното означение матрицата A наричаме *линеен операнд*, а матрицата B - *диференциален аргумент*.

Елементарен случай:

В частност ще ползваме и означението

$(L,G)A = (L,G)EA = (L,G)A$, където E е единичната матрица.

При така въведеното означение:

Линейният операнд задава (дефинира) оператор - ред с елементи линейни комбинации на първоначалните елементи L и G на оператора.

Диференциалният аргумент е обекта върху който се действа след умножението на оператора с линейния операнд.

Въведеното означение за ДТП се обозначава с указател стрелка започваща от оператора и сочеща към диференциалния операнд.

Свойства на оператора – вектор:

Свойство 1: $(L,G) = (L(x), G(x))$ е линеен оператор.

$$(L,G)(\lambda A + \mu B) = \lambda (L,G)A + \mu (L,G)B \tag{6}$$

Свойство 2: Изпълнени са дистрибутивните закони

$$(L,G)A(B+C) = (L,G)AB + (L,G)BC \tag{7}$$

$$(L,G)(A+B)C = (L,G)AC + (L,G)BC \tag{8}$$

Диференциране на векторни, матрични и тензорни операции

Операците между векторни и матрични величини са събиране и умножение (Ланкастер, 1978; Ражевский, 1967). За да направим обобщени изводи, тук ще използваме като означения за векторните и матричните величини големи латински букви $A, B, C, \ldots$. Векторите и матриците са с елементи числа или означения за диференциране, като $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \; u \; \frac{\partial}{\partial z}$.

Вторият случай може да се разглежда, като оператор-скалар или елементи на оператор-вектор или оператор-матрица.

Матриците, които разглеждаме са квадратни матрици от втори ред и от трети ред. Когато дадени матрични величини участват в специални тензорни операции те се наричат тензори.

Събирането винаги се означава със знака +. Умножението със скалар се означава без знак, като скалара се записва първи. Останалите видfве умножение се означават със специални знаци.

Събирането е почленно спрямо елементите на операндите и диференцирането на сума е също почленно.

Диференцирането на произведение на вектор или матрица със скалар се свежда до почленно диференциране на произведението на скалара със съответния елемент.

Ще спрем вниманието си върху диференцирането на произведението на вектори и матрици, което ще означаваме с $*n$, където $n = 1, 2, \ldots$ задава вида на операцията. Нека Ω е диференциален оператор. Съгласно въведените означения за деференциален оператор имаме:

Случай 1 $\quad \Omega *_1 A *_2 B, \quad B *_1 A *_2 \Omega \qquad (9)$

Случай 2 $\quad \Omega *_1 A *_2 B, \quad B *_1 A *_2 \Omega \qquad (10)$

В случай 1 операндът A и в случай 2 - B са линейни операнди.

В случай 1 операндът B и в случай 2 операндът A са дифенциални аргументи.

Ще покажем, че свойството на диференциалния оператор:

$$\Omega *_1 A *_2 B = \Omega *_1 A *_2 B + \Omega *_1 A *_2 B$$

и $\qquad (11)$

$$B *_1 A *_2 \Omega = B *_1 A *_2 \Omega + B *_1 A *_2 \Omega$$

е в сила при всеки вид умножение $*_1 \; u \; *_2$. За целта ще опишем видовете умножение между вектори и матрици (тензори) и как тези операции се свеждат до умножение на по два елемента на операндите.

1. Скаларно произведение на вектори

$$A \cdot B = \lambda \qquad \lambda = \sum_i a_i b_j$$

2. Векторно произведение на вектори

$$A \times B = C \qquad c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k .$$

Тук ε_{ijk} е смвол на Кронекер.

3. Умножение на вектор-ред с матрица

$$A \cdot B = C \qquad c_i = \sum_i a_i b_{ij}$$

4. Умножение на матрици (скаларно умножение на матрици)

$$A \cdot B = C \qquad c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

5. Тензорно умножение на вектор-стълб по вектор-ред

$$A \otimes B = C \qquad c_{ij} = a_i b_j .$$

От формулите за поелементно описание на всяко от произведенията се вижда, че формулите (11) са изпълнени.

Също така, за случай 1 се установява и свойство свързано с линейния операнд:

$$\Omega *_1 A *_2 B = \Omega *_1 A *_2 B$$

$$B *_1 A *_2 \Omega = B *_1 A *_2 \Omega \qquad (12)$$

Приложение на ДТП за получаване на преместванията и деформациите в полярни координати

За да илюстрираме приложението на метода ДТП ще получим формулите за тензора на деформациите в полярни координати $D_{\tau\theta}$ използвани в Парашкевов (1969). За целта ще извършим трансформация с тензора на деформациите в декартови координати D_{xy} съгласно формулата $D_{\tau\theta} = \Lambda' D_{xy} \Lambda$. Тази формула може да се напише по съответните направени изчисления във Върбанов (1965), където

$$D_{xy} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} \text{ и } D_{r\theta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} \\ \frac{1}{2}\gamma_{r\theta} & \varepsilon_\theta \end{pmatrix}.$$

Нека с $u(x, y)$ и $v(x, y)$ сме означили преместванията съответно по x и y, а с $\xi(r, \theta)$ и $\eta(r, \theta)$`- радиалните и тангенциални премествания. Тогава може да се изведе връзката $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ (Върбанов, 1965). Същевременно за деформациите в декартови координати имаме

$$D_{xy} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{D(u, v)}{D(x, y)} + \left(\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right)'\right],$$ където сме въвели означението за матричен якобиан

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (13)$$

Тук $\otimes$ е означение за тензорно умножение на вектори.

От $\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Lambda \Rightarrow$

$$D_{xy} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \otimes (u,v)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Lambda^{'}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\Lambda + \Lambda^{'}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \otimes (\xi,\eta)\Lambda\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\Lambda^{'}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\Lambda + \Lambda^{'}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \otimes (\xi,\eta)\Lambda\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\Lambda^{'}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \otimes \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\Lambda + \Lambda^{'}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} \otimes (\xi,\eta)\Lambda\right] =$$

(I)

$$= \Lambda^{'}\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{1}{2r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{2r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{pmatrix}\Lambda +$$

(II)

$$+ \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial(\Lambda^{'})}{\partial \theta}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \otimes (0,1)\Lambda + \Lambda^{'}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (\xi,\eta)\frac{\partial(\Lambda)}{\partial \theta}\right],$$

където $\frac{\partial(\Lambda)}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$.

За двете части от сумата имаме

$D_{r\theta(I)} = \Lambda^{'} D_{xy(I)} \Lambda$ и $D_{r\theta(II)} = \Lambda^{'} D_{xy(II)} \Lambda$

$\Rightarrow$

$$D_{r\theta(I)} = \Lambda^{'} D_{xy(I)} \Lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{1}{2r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{2r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} & \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$D_{r\theta(II)} = \frac{1}{2r}\left[\Lambda\frac{\partial(\Lambda^{'})}{\partial \theta}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \otimes (0,1) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (\xi,\eta)\frac{\partial(\Lambda)}{\partial \theta}\Lambda^{'}\right]$$

От

$$\Lambda\frac{\partial(\Lambda^{'})}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

И

$$\frac{\partial(\Lambda)}{\partial \theta}\Lambda^{'} = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$D_{r\theta(II)} = \frac{1}{2r}\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ 0 & \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2r}\left[\begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ 0 & \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\eta & \xi \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\eta}{2r} \\ -\frac{\eta}{2r} & \frac{\xi}{r} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

За компонентите на тензора на деформациите

$$\varepsilon_r = \frac{\partial \xi}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \frac{\xi}{r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} - \frac{\eta}{r}$$

Матричен запис

$$D_{\tau\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{D(\xi,\eta)}{D(\tau,\theta)} + \left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(\tau,\theta)}\right)^{'}\right] + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\eta}{2\tau} \\ -\frac{\eta}{2\tau} & \frac{\xi}{\tau} \end{pmatrix}$$

Изводи

От формулиранете свойства на метода ДТП и примера за приложението му може да се направи изводът за коректността и общовалидността на въведеното означение за преобразуване на диференциални зависимости. Методът ДТП предоставя единна техника за извеждане на формулите на механика на непрекъснатите среди. Това от една страна ограничава допускането на технически грешки при пресмятанията и от друга страна улеснява получаването на формулите.

Методът ДТП има приложение при формализиране на теорията на механиката на непрекъснатите среди и може да се прилага в обучението на специалистите по механика на скалите.

Литература

Влахов Й. П. 2001. *Математични методи на физиката*, С., Св. Кл. Охридски, 261 с.

Върбанов Х. П. 1965. *Теория на еластичността,* С., Техника, 456 с.

Ланкастер П. Л. 1978. *Теория матриц*, М., Наука, 280 с.

Минчев И. Т. 1980. *Механика на непрекъснатите среди*, С., Техника, 291 с.

Парашкевов Р. Д. 1969. *Механика на скалите*. С., Техника, 268 с.

Рашевский П. К. 1967*. Риманова геометрия и тензорный анализ*, М., Наука, 664 с.

Препоръчана за публикуване от
Катедра "Математика", МГУ