ПРИЛАГАНЕ МЕТОДА НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ В УСЛОВИЯТА НА ИЗМЕНЧИВОСТ НА СВОЙСТВАТА НА СКАЛИТЕ

***Георги Трапов*[1], *Георги Михайлов*[2]**

[1] *Минно-геоложки университет "Св.Иван Рилски", 1700 София, E-mail:* trapov@abv.bg
[2] *Минно-геоложки университет "Св.Иван Рилски", 1700 София*

РЕЗЮМЕ. Физикомеханичните свойства на скалния масив са природна даденост. Те имат ясно изразен вероятностен характер. Това обикновено не се отчита при прилагане метода на крайните елементи. Изследваните величини най-често са неслучайни функции на свойствата на скалите и следователно имат също стохастичен характер. При извеждане на вероятностните закони на тези величини в аналитичен вид се срещат редица трудности. Стохастичното моделиране позволява да се получат стойностите на важни за практиката числени характеристики на величините.
Съставен е модел, компютърната реализация на който представлява имитационно моделиране на изследваните величини.
Решени са примери, които дават основание за анализ, съпоставка и оценка на предложения подход.

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN CONDITIONS OF ALTERATION OF THE ROKS PROPERTIES

Georgy Trapov[1]*, Georgy Mihaylov*[2]
[1]*University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, e-mail:* trapov@abv.bg
[2]*University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia*

ABSTRACT. The physical and mechanical properties of the rock mass are a natural fact, which usually is not taken into consideration at the application of the finite element method. Most often, the researched values are non-random functions of the rock properties and consequently also have stochastic character. There are a series of difficulties at the derivation of the probabilistic laws of these values in analytic form. The probabilistic modeling allows the values of important for practice numeric characteristics to be obtained.
A model, which computer realization is a simulative modeling of the researched values, is composed.
Examples, which give grounds of analysis, comparison and assessment of the approach suggested, are solved.

1. **Постановка на задачата**.

Основните фактори, влияещи на устойчивостта на минни изработки са геоложки, хидрогеоложки, физико-механични, климатични и минно технически.

Физикомеханичните свойства на скалите са физични (зърнометричен състав, плътност, порестост), водни (водно съдържание, набъбване и свиване, размекване, лепкавост), якостни (якост на: натиск, опън, срязване, огъване), деформационни (относителна деформация, коефициент на Поасон, модул на еластичност, модул на срязване, модул на обемно свиване, коефициент на странично разширение,модул на деформация) и реологични (деформации на пълзене, вискозитет).

Особено внимание по-нататък ще бъде обърнато на влиянието на физикомеханичните свойства при изследване на напрегнатото и деформирано състояние на масива по метода на крайните елементи. Почти всички тези величини са количествени.

Рудникът е сложна система и нейното състояние се определя от съвместното влияние на много фактори (величини). В математическите модели, посредством които се описва нейното състояние и в частност напрегнатото и деформирано състояние на масива, тези фактори участват с числените си стойности. На практика изследователя или този, който трябва да вземе управленско решение разполага със стойностите на тези величини, получени посредством наблюдение или подходящ експеримент. Точността на получените данни зависи от точността на апаратурата за измерване и от условията на експеримента.

При провеждане на инженерна дейност в скалния масив е необходимо да се знае поведението на скалите, особено в близост до минните изработки. Голямото разнообразие в свойствата на скалния масив, дължащо се на влиянието на множество природни фактори, налага необходимостта от тяхното изучаване. Характеристиките на масива се изследват или в условията на естественото му залягане чрез непосредствени натурни измервания, или върху подходящо избрани образци. Методиките за подбор на пробите и изготвянето на образците са изложени в инструкции, ръководства, статии и като отделни части от различни монографии.

Същност на методите за оразмеряване на конструктивни елементи е изследването и определяне на степента на натоварване на целици, напрегнатото и деформирано състояние около проучвателни, подготвителни и добивни изработки. За целта се използва математическо моделиране и се прилагат съответни методи за решаване и изследване. Тъй като не е възможно да се отчетат всички действуващи фактори, най-често скалният масив се разглежда като еластична, еднородна, изотропна среда.

В съвременната инженерна наука и практика широко приложение намират методите, използуващи апарата на теорията на еластичността (Тимошенко С. П., Д. Губьер, 1979), (Партон В. З., П. И. Перлин, 1981), в която решаването на пространствената задача се свежда до определяне на компонентите на преместванията u, v, w, на напреженията $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ и на деформациите $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ във всяка точка на разглежданото тяло. За целта е необходимо съставянето на система от 15 диференциални уравнения, чието съвместно решаване дава възможност да се определи напрегнатото и деформирано състояние на реалния обект. Задачата може да се реши в напрежения, в деформации или в премествания. Тук е приета третата от посочените форми. В този случай от 15-те диференциални уравнения се изключват напреженията и деформациите и се получава диференциално уравнение спрямо преместванията.

В повечето случаи обаче геометричната конфигурация на телата и граничните условия са толкова сложни, че определянето на преместванията, напреженията или деформациите чрез решаване на съответните диференциални уравнения се оказва крайно трудна, а понякога и непосилна задача. Стремежът към по-висока адекватност на математическият модел и реалния обект води до отчитане на множество фактори, което трудно може да се направи в рамките на класическата теория на еластичността. Това изискване, заедно със възможността за използване на съвременни бързодействуващи електронноизчислителни машини водят до бурно развитие на числените методи и в частност до широко използуване на вариационното смятане в строителната и скалната механика.

Основната задача на вариационното смятане е да се намери функция, за която функционала на общата потенциална енергия на системата, изразена като функция на преместването, достига екстремум.

Решението на вариационната задача обикновено се търси числено, т.е. с така наречените преки методи (Courant R., Hilbert D., 1951; Нечас, 1967). За създател на класически пряк метод (Ritz W., 1908) се счита Ритц (1878-1909). В съответствие с принципа на Лагранж, най-често с метода на Ритц (метод на крайните елементи) се търси минимумът на функционала на общата потенциална енергия на системата.

При метода на крайните елементи се достига до решаване на система линейни уравнения, която в матричен вид може да се запише така

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

Това равенство представлява основното уравнение на метода на крайните елементи, решението на което е

$$\{u\} = [K]^{-1}\{F\} . \qquad (1)$$

Матрицата $[K]_{3m,3m}$, където n е броят на възлите в мрежата, е обобщената матрица на коравината на системата. Нейните елементи се определят от геометрията на възлите (координатите им) и от деформационните характеристики на разглежданата среда. Намирането на обобщената матрица на коравината на системата се извършва по различни начини. Относително най-лесният е да се намерят матриците на коравината $[k]_e$ на отделните елементи, след което техните членове да се адресират и прибавят към съответните им елементи на обобщената матрица $[K]_{3m,3m}$ на коравината на системата.

Елементите на матрицата стълб $\{u\}$ са преместванията, а $\{F\}$ - действащите сили във всеки възел на мрежата на дискретизация.

За да се илюстрират идеите за прилагане на метода на крайните елементи в условията на изменчивост на свойствата на скалите тук се разглежда еднородна и изотропна среда, като при дискретизация на средата се използва триъгълен елемент.

Нека се разгледа триъгълен елемент с върхове *i, j, k*, които да са и възлите на дискретизация. Под действието на силите

$$(f_x)_i, (f_x)_j, (f_x)_k, (f_y)_i, (f_y)_j, (f_y)_k, (f_z)_i, (f_z)_j, (f_z)_k ,$$

приложени във върховете на елемента се получават премествания $\{\delta\}_e = \{u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k\}^T$ на всеки от възлите.

Тогава деформациите $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$ се намират по формулата

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}_e , \qquad (2)$$

където $[B]$ е матрица, елементите на която зависят само от координатите на възлите на триъгълника.

При линейна зависимост между напреженията $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$ и деформациите обобщеният закон на Хук в матричен вид може да бъде записан така

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} , \qquad (3)$$

където $[D]$ е матрицата на еластичността.

При равнинно напрегнато състояние

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5(1-\mu) \end{pmatrix} . \qquad (4)$$

Тук *E* и μ са съответно модулът на Юнг и коефициентът на Поасон.

При равнинно деформирано състояние

$$[D] = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

където λ и *G* са коефициентите на Ламе:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, G = \frac{E}{2(1+\mu)} .$$

Може да се покаже, че матрицата на коравината [*k*] на разглеждания триъгълен елемент с лице *S* се намира посредством равенството

$$[k] = S[B]^T [D][B] . \qquad (6)$$

2. **Модел**, **отчитащ случайния характер на свойствата на скалите и на величините**, **които са функции от тях**

Вероятностната природа на свойствата на скалите ще бъде обоснована с анализ на изменението на физико-механичните свойства на скалите и в частност на якостните свойства. Значителното изменение на якостта на скалите често е свързана (Смирнов Б. В., 1983) с механични процеси, водещи до концентрация на напреженията в отделни участъци на масива, което довежда или до уплътняване и повишаване на якостта на минералните агрегати, или в условия на пренатоварване, води до нарушаване на действащите в тях връзки и понижаване на якостта под определена граница, при което настъпва пълно разрушаване. Освен механичните процеси на якостта влияят топлинни, хидравлични, химични процеси и др.

Казаното показва, че даже елементарни инженерно-геоложки процеси зависят от много взаимодействащи си или взаимно независими фактори. Още по-сложна и многообразна е причинната обусловеност на по-сложни процеси. Ето защо развитието на инженерно-геоложките процеси зависи от съчетанието на разнообразни тенденции с неизвестни предварително флуктоации, предизвикани от трудно предсказуемите влияния на съвкупността от действуващи фактори. По друг начин казано, стойностите на свойствата на скалите се изменят, както по време така и по място, а определени значения на тези показатели в конкретен случай се реализират с някаква вероятност. Всичко това показва ясно изразения вероятностен характер на свойствата на скалите.

Но щом модулът на Юнг *E*, коефициентът на Поасон μ и обемното тегло ρ са случайни величини, то и всички неслучайни функции с тези аргументи са също случайни величини. От (4) или (5) става ясно, че матрицата *D* зависи от *E* и μ. Тогава по силата на (6) и матрицата [*k*] зависи от тях. Същият извод е в сила и за обобщената матрица на коравината. Силите {*F*} в (1) са функция на случайната величина обемно тегло. Тогава пак според (1) преместванията {*u*} във възлите са също случайни величини, тъй като са неслучайни функции на случайните величини *E*, μ и ρ. Равенства (2) и (3) показват, че деформациите и напреженията са също случайни величини.

Както е известно, научно обосновани методи за анализ на посочените случайни величини са разработени в теория на вероятностите, математическата статистика и други математически дисциплини. Да се търси аналитично решение на проблема е нецелесъобразно. Единственият път остава съставянето на числен модел. Тук е избран методът на имитирането на случайни величини. Вероятностното моделиране е възможно и достъпно посредством съвременните компютри и заедно с идеите (Обретенов А., 1978), (Соболь И. М., 1972) за получаване на случайни числа с желан вероятностен закон на разпределение.

За по-голяма прегледност на изложението се приема, че ρ е константа, а само *E* и μ са случайни величини. Съвкупността от двете слагаеми (E, μ) представлява двумерна случайна величина. Предполага се, че в резултат на извършени наблюдения (лабораторни изпитания) е известна извадка с обем *n* за двумерната случайна величина (E, μ). Съставен е нейният интервален емпиричен закон на разпределение, който представлява двумерна таблица от числа. Това всъщност е съвместното разпределение на (E, μ). По-долу стойностите на *E* са означени с *x*, а тези на μ - с *y*. С *F*(*x,y*) ще бъде означена съвмесната функция на разпределение на (E, μ).

Съгласно формулата

$$F(x,y) = F_x(x).F_{yx}(y/x)$$

може да се получим последователно имитирането на величината (E, μ), посредством произволна двойка η_1, η_2 независими, равномерно разпределени в интервала [0; 1] случайни числа. За целта се използват обратните функции на $F_x(x)$ и $F_{yx}(y/x)$ в следната последователност. Посредством намереното число η_1 и обратната функция F_x^{-1} се намира стойността $x^* = F_x^{-1}(\eta_1)$. От *x** се вижда коя е съответната условна функция на разпределение $F_{yx}(y/x^*)$. С помощта на нея, чрез намереното число η_2 и обратната функция F_{yx}^{-1} се определя реализацията *y** на процеса при втората стъпка по формулата $y^* = F_{yx}^{-1}(\eta_2/x^*)$. С това е извършена една имитация на величината (E, μ).

Този процес се изпълнява многократно, за да се получат достатъчно на брой такива реализации, като при всяка от тях чрез намерените премествания се получават напреженията и деформациите в определени възли. Целта е чрез тях да се намерят оценки на определени характеристики (най-често на математическото очакване) на случайните величини $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}\}^T$ и $\{\sigma\}=\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\}^T$.

3. Машинна реализация на модела

Макар да бяха приети някои условия, опростяващи задачата, практическата реализация на този директен метод на имитиране е съпроводена с редица трудности, дори в разглеждания от нас двумерен случай. Това се запазва даже и при използване на компютър, тъй като се налага да се съхраняват в паметта на изчислителната машина редица таблици, а и организирането на изчислителния процес е твърде сложно.

Като входни данни за реализиране на построения алгоритъм се използват:

- брой на реализациите на имитиране;
- данни за *E*, μ и ρ от лабораторни изпитания;

Машинното изпълнение се извършва в следната последователност:

1. Прочитат се входните данни;

2. Посредством извадката за трите случайни величини *E*, μ и ρ се намира таблицата на съвместното интервално статистическо разпределение и съответната комулативна функция;

3. С генератор на случайни числа се получават три (η_1,η_2,η_3) независими, равномерно разпределени в интервала [0; 1] случайни числа, чрез които се имитира, по указания по-горе начин, случайната величина (E,μ,ρ);

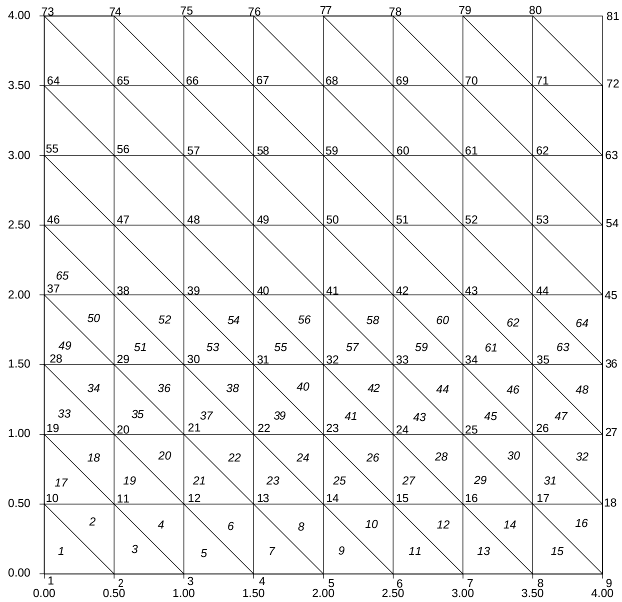
4. С използване на създадения изчислителен модул за прилагане на метода крайните елементи се намира поредната реализация на величините $\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}\}^T$ и $\{\sigma\}=\{\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}\}^T$; Точки 3 и 4 се изпълняват зададения брой пъти, след което се преминава към точка 5;

5. Получава се желаната оценка за $\{\varepsilon\}$ и $\{\sigma\}$ и резултатите се извеждат на подходящо външно устройство (монитор, принтер, външно запомнящо устройство).

С това приключва реализирането на изложения алгоритъм

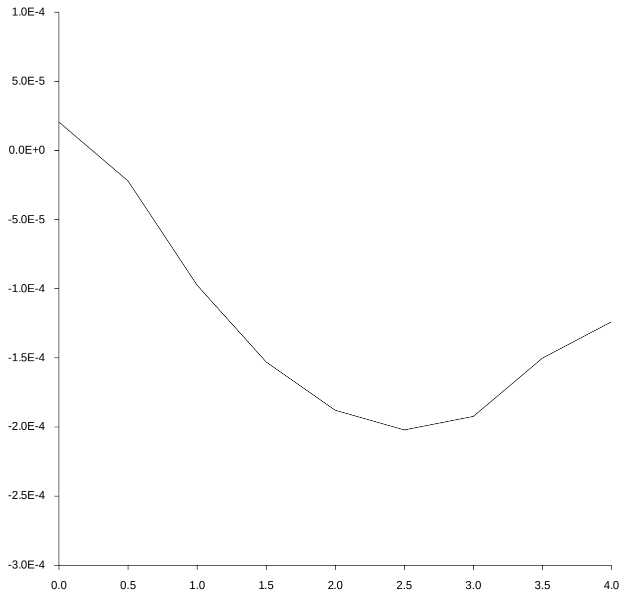
4. Резултати и изводи

С помощта на предложеният модел е изследвано поведението на „гредостена" (фигура 1), която се разглежда като еднородно, хомогенно и изотропно тяло. Дискретизирането на средата е извършено с 128 триъгълни елемента. След многократно изпълнение на изчислителната процедура са получени преместванията, напреженията и деформациите. За онагледяване са използвани получените стойности за напреженията σ_y, взети по сечение „19-27", свързващо възлите с номера 19 и 27.



Фиг. 1. **Схема на дискретизация за примера „гредостена"**

За няколко изпълнения е получена картината, изобразена на фигура 2.



Фиг. 2. **Напрежения** σ_y **по сечение** „19-27"

Налагат се някои изводи:

- Прилагането на метода на крайните елементи в условията на изменчивост на свойствата на скалите дава възможност за по-пълно отчитане на извършените натурни и лабораторни наблюдения. Това води до по-висока адекватност на математическия модел и изследвания обект;

- Предложеният подход се реализира с обработка на голям обем данни, което изисква създаване на специализирани програмни продукти.

Извършените реализации на модела дават основание да твърди, че той с успех може да се разглежда като надстройка на традиционното приложение на метода на крайните елементи. Аналогичен подход може да се използва и при прилагане на други методи за изследване на напрегнатото и деформирано състояние на скалния масив.

Литература

Обретенов А. Вероятности и статистически методи. „Наука и техника", София 1978.

Партон В. З., П. И. Перлин. Методы математической теории упругости. Москва, "Наука", 1981.

Смирнов, Б. В. Вероятносные методы прогнозирования в инженерной геологии. Москва, "Недра", 1983.

Соболь И. М. Метод Монте-Карло. „Наука", Москва, 1972.

Тимошенко С. П., Д. Губьер. Теория упрогости. Москва, "Наука", 1979.

Courant R., Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. – Berlin: Springer Verl., 1924. (Руски превод: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики.- М. – Л.: Гостехиздат, 1951.)

Ritz W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations Probleme der Matematischen. – Physik, 1908, 135, H. 1.

Препоръчана за публикуване от Катедра "Подземно разработване на полезни изкопаеми ", МТФ