ГОДИШНИК НА МИННО-ГЕОЛОЖКИЯ УНИВЕРСИТЕТ "СВ. ИВАН РИЛСКИ", Том 51, Св. IV, Хуманитарни и стопански науки, 2008
ANNUAL OF THE UNIVERSITY OF MINING AND GEOLOGY "ST. IVAN RILSKI", Vol. 51, Part IV, Humanitarian sciences and Economics, 2008

МАТЕМАТИКА ЗА ИНЖЕНЕРИ ЧРЕЗ "MATHEMATICA"

Петко Лалов[1], Веселин Христов[2]

[1] Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700, София, E-mail: petko@mgu.bg
[2] Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700, София, E-mail: veso@mgu.bg

РЕЗЮМЕ. Основен проблем при обучението по математика за студенти, бъдещи инженери е освен какво да се преподава, как да се преподава. Традиционните методи трудно вече могат да събудят интереса на студентите, особено днес, при бурното развитие на информационните технологии. Очевидно е , че тези технологии трябва да навлязат осезателно при изучаването на математически структури. Днес във виртуалното пространство съществуват множество пакети от приложни програми, които с успех могат да бъдат използвани при преподаването по Математика. В тази статия авторите илюстрират някои възможности на програмната система "Mathematica" и как може да бъде тя използвана при усвояването на някои математични дисциплини.

MATHEMATICS FOR ENGINEERS THROUGH "MATHEMATICA"

Petko Lalov[1], Veselin Christov[2]
[1] University of Mining and Geology "St. Ivan Rilsky", Sofia, Bulgariap Email: petko@mgu.bg
[1] University of Mining and Geology "St. Ivan Rilsky", Sofia, Bulgariap Email: veso@mgu.bg

ABSTRACT. A basic problem in teaching of Mathematics for students in Engineering is what to teach but also how to teach. Traditional methods are not of great interest for students any more, nowadays in the era of steep exponential growth of Information Technologies. It becomes obvious that latter technologies have to penetrate deeply in studying mathematical structures. Multitude of application program packages can be found in virtual space nowadays, and they can be applied in teaching of Mathematics. In the present paper the authors illustrate some capabilities of the program system "Mathematica", how it can be used in mastering some mathematical subjects.

Въведение

Всеки студент, учещ в технически ВУЗ първо се сблъсква с методите и формите на обучение по математика. Вече дълги години се води спор между инженери и математици, какво да се преподава по математика на бъдещия инженер и най- вече, как да се преподава: със строга теоретична насоченост, която изисква аксиоматика, доказателства и редица подробности или с определена практическа насоченост. В днешно време, когато информационните технологии (IT) се развиват изключително бързо, много трудно студентът ще бъде запленен от изучаването на математически структури посредством тебешир (фулмастер) и черна (бяла) дъска. С тези средства той няма да разбере огромната полза от изучаването на математични модели с пряко приложение в инженерната практика, поради ограничените възможности на тези средства по отношение на двумерна (тримерна) визуализация, изчислителни ресурси, обем на обработваните данни.

Целта на настоящата статия е да покаже как използвайки подходящ софтуер, значително може да бъде подобрена ефективността и засилен интереса на студента към сериозното изучаване на математика.

Средства на Mathematica подходящи при преподаване на математика

Системата Mathematica „Wolfram St., 2002" представлява интегрирана среда за технически и математически изчисления. Тя първоначално е разработена от Стефан Волфрам и Версия 1 е пусната през 1988г. През 2007 г. бе пусната Версия 6. Първите версии на Mathematica бяха ориентирани към операционни системи (ОС) с текстов потребителски интерфейс като MS DOS и UNIX. От Версия 2 нататък тя е приспособена да работи в ОС с графичен потребителски интерфейс като MS Windows. Съществуват реализации на Mathematica, както за различни модели компютри (например PC и Macintosh), така и за различни ОС (например: MS Windows, UNIX и LINUX).

Mathematica поддържа подробна помощна информация, самоучител, демонстрации. Към системата са добавени пакети с допълнителни функции. Web сайтът на системата www.wolfram.com съдържа богата допълнителна информация, а също така и много разработени модели от различни области, някои от които могат да се изтеглят свободно.

В Mathematica има вградени повече от 1000 математически функции. Системата дава възможност за:

- Символни (аналитични) преобразувания.
- Числени пресмятания.
- Трансформация на алгебрични изрази.
- Диференциране и интегриране
- Решаване на уравнения.
- Оптимизация и приближаване на функции.
- Вероятности и статистика
- Работа със списъчна и таблична информация.
- Работа със външни файлове с данни.
- Програмиране и много други..

Системата притежава развити средства за представяне на резултатите от математическите пресмятания:

- двумерна и тримерна графика на функции и други математически обекти,
- анимация на резултатите от изчисления
- звуково представяне на резултати
- представяне на резултатите във вид на слайдове, Web страници и PDF страници и др.

Един от недостатъците, който често се споменава при ползване в преподаването на средства за автоматизация на математическите пресмятания е, че те дават готово решение и студентът не може да проследи етапите при решаването на задачите. Mathematica обаче притежава някои средства за тази цел като: функции Trace[], Reduce[] и др.

Авторите на настоящата статия имат издадено ръководство „Лалов П., В. Христов 2004", което дава представа за основните възможности на системата Mathematica и как тя може да се ползва в преподаването не само на математика, но и на физика например.

Примери за използване на Mathematica в различни математически дисциплини

Линейна алгебра и аналитична геометрия

Както е известно обект на изследване на линейната алгебра са матрици, детерминанти, вектори, системи линейни уравнения. Всеки, който е изучавал тази дисциплина знае с какви изчислителни трудности са свързани такива задачи, като пресмятане на детерминанти от висок ред, обръщане на матрици, намиране ранг на матрица, линейни трансформации, решаване на системи линейни уравнения. По долу ще покажем част от възможностите на Mathematica при решаването тези задачи.

Пресмятане на детерминанта на матрица

In[1]:= $a = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0.25 & 7 & 4 & 6 \\ 0 & 1.1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 5.5 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix};$

Det[a]

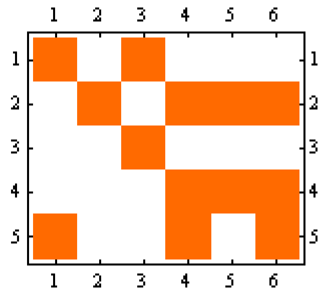
Out[2]= 65.75

Представяне на изображение чрез матрица с елементи 0 и 1

In[3]:= $pic = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

MatrixPlot[pic]

Out[4]=



Обръщане на матрица

In[12]:= $a = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0.25 & 7 & 4 & 6 \\ 0 & 1.1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 5.5 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix};$

Inverse[a] // MatrixForm

Out[13]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2.6057 & -7.75513 & -10.1692 & 10.5992 & 2.08251 \\ 1.98479 & 5.18631 & 6.88213 & -6.93536 & -1.51331 \\ 0.598859 & 2.28897 & 2.76616 & -2.92015 & -0.663498 \\ 0.608745 & 1.51787 & 1.79278 & -2.01217 & -0.379848 \\ -0.318631 & -1.14677 & -1.31939 & 1.50418 & 0.396198 \end{pmatrix}$$

Решаване на параметрична система линейни уравнения

In[16]:= **Solve[{a * x − 2 y + 3 z == 1, x − b * y + z == −1, x + y + z == b}, {x, y, z}]**

Out[16]= $\left\{\left\{x \to -\frac{3(-2+b)}{-3+a},\ y \to 1,\ z \to -\frac{3+a-ab}{-3+a}\right\}\right\}$

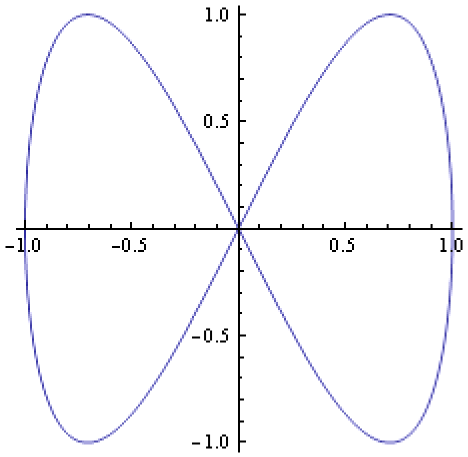
Изчертаване на криви от 2- ра степен, зададени параметрично

Нека изчертаем кривата зададена с параметричното си уравнение

x = sin t; y = sin 2t

```
In[18]:= ParametricPlot[{Sin[t], Sin[2 t]},
           {t, 0, 2 Pi}]
```

Out[18]=



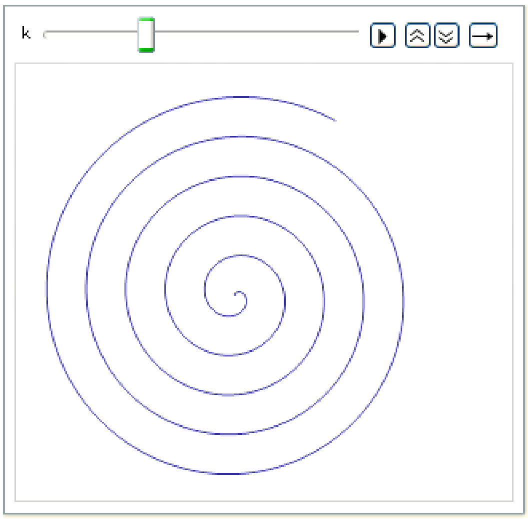
Нека сега изведем графика на крива зададена с уравнението

x=usinu; y=u cosu

но с анимация на кривите за u от 0 до {1, 2,….100}

```
In[20]:= Animate[ParametricPlot[
           {Sin[u] u , Cos[u] u},
           {u, 0, k}, PlotPoints → 125,
           Axes → False], {k, 1, 100}]
```

Out[20]=



Ъгъл между два вектора в радиани

```
In[21]:= VectorAngle[{1, -1, 3}, {0, 4., 1}]
```

Out[21]= 1.64399

Използване на Mathematica при изучаването на Математичен анализ

В тази математична дисциплина възможностите на Mathematica са огромни.

Студент, който е запознат с основните теоретични постановки за работа с функции, може да си спести еднообразните и скучни действия при диференциране, интегриране, развитие в редове и т.н. и да решава много по-бързо тези задачи, като отдели повече време за анализ на резултатите, техните приложения, графичното представяне. По-долу ще илюстрираме възможностите на Mathematica в тази област.

Диференциране

```
In[22]:= f[x_] := x^3 Cos[1 - x^2]
         D[f[x], x]
         D[f[x], {x, 2}]
```

Out[23]= $3 x^2 \mathrm{Cos}[1 - x^2] + 2 x^4 \mathrm{Sin}[1 - x^2]$

Out[24]= $6 x \mathrm{Cos}[1 - x^2] + 12 x^3 \mathrm{Sin}[1 - x^2] + x^3 \left(-4 x^2 \mathrm{Cos}[1 - x^2] + 2 \mathrm{Sin}[1 - x^2]\right)$

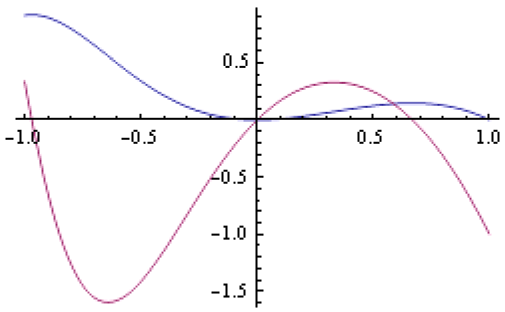
В примера се намират 1-ва и втора производна на функцията x cos(1 - x^2).

Изчертаването на функция и на нейна производна може да стане по следния начин

```
In[25]:= g[x_] := x Sin[x - x^2]
         D[g[x], x]
         Plot[{g[x], %}, {x, -1, 1}]
```

Out[26]= $(1 - 2 x) x \mathrm{Cos}[x - x^2] + \mathrm{Sin}[x - x^2]$

Out[27]=



Интегриране

Задачата $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$, която затруднява поколения студенти

```
In[28]:= Integrate[1 / (1 + x^2) ^4, x]
```

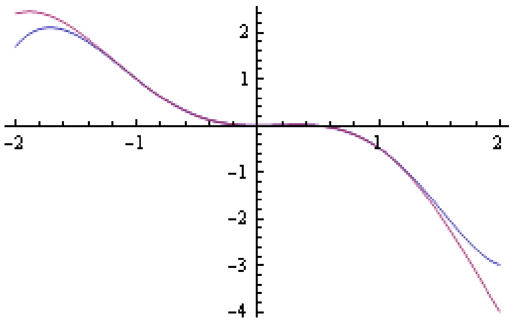
Out[28]= $\dfrac{x \left(33 + 40 x^2 + 15 x^4\right) + 15 \left(1 + x^2\right)^3 \mathrm{ArcTan}[x]}{48 \left(1 + x^2\right)^3}$

Степенни редове

```
In[29]:= Series[x^2 Sin[0.5 - x], {x, 0, 6}]
         Normal[%]
         Plot[{%, x^2 Sin[0.5 - x]}, {x, -2, 2}]
```

Out[29]= $0.479426\,x^2 - 0.877583\,x^3 - 0.239713\,x^4 + 0.146264\,x^5 + 0.0199761\,x^6 + O[x]^7$

Out[30]= $0.479426\,x^2 - 0.877583\,x^3 - 0.239713\,x^4 + 0.146264\,x^5 + 0.0199761\,x^6$

Out[31]=


В примера функцията $x^2 \sin(0.5 - x)$ е развита в степенен ред около точка 0, като са взети членове до 6-та степен и после са изчертани графиките на функцията и реда. Може нагледно да се види, в кой интервал редът достатъчно точно приближава функцията.

Граници на функция

Намиране граница на функция $\dfrac{\sin x}{x}$ при x клонящо към 0 и към ∞ става по следния начин:

```
In[1]:= Limit[Sin[x] / x, x → 0]
```

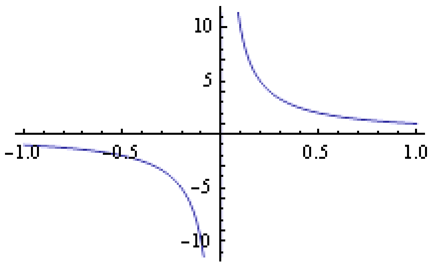
Out[1]= 1

```
In[2]:= Limit[Sin[x] / x, x → Infinity]
```

Out[2]= 0

Намирането на лява и дясна граница на прекъсната функция може да се демонстрира по следния начин

```
In[4]:= Plot[1 / x, {x, -1, 1}]
```

Out[4]=



```
In[5]:= Limit[1 / x, x → 0, Direction → 1]
```

Out[5]= −∞

```
In[6]:= Limit[1 / x, x → 0, Direction → -1]
```

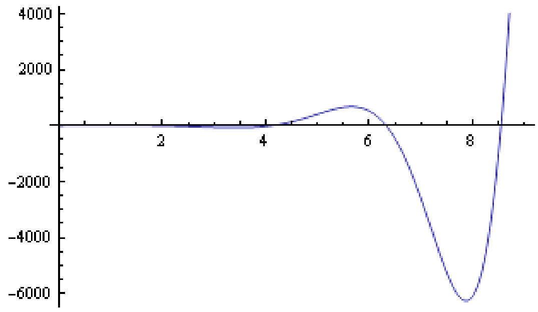
Out[6]= ∞

Решаване на диференциални уравнения

Решаването на обикновено диференциално уравнение с някакви начални стойности и демонстрирането на решението може да стане по следния начин

```
In[6]:= DSolve[{y''[t] - 2 y'[t] + 3 y[t] - 5 == 0,
          y[0] == 3, y'[0] == 5}, y[t], t]
        Plot[y[t] /. %[[1]], {t, 0, 9}]
```

Out[6]= $\left\{\left\{y[t] \to \frac{1}{6}\left(10 + 8\,e^t \operatorname{Cos}\left[\sqrt{2}\; t\right] + 11\sqrt{2}\; e^t \operatorname{Sin}\left[\sqrt{2}\; t\right]\right)\right\}\right\}$

Out[7]=


Ето числено решение на следното параболичното уравнение

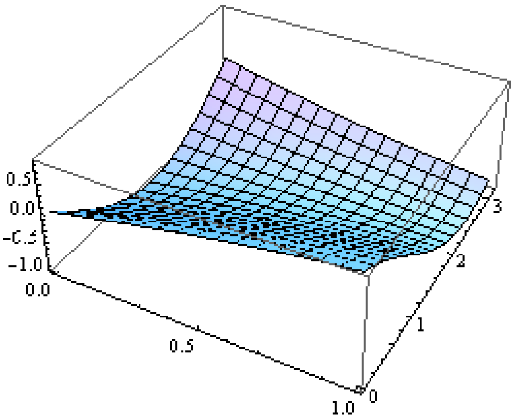
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ u(x,0) = \sin(x), u(0,t) = \sin(t), u(1,t) = \sin(1-t) \end{cases}$$

```
In[10]:=
      NDSolve[{D[u[x, t], t] == D[u[x, t], x, x],
        u[x, 0] == Sin[x], u[0, t] == -Sin[t],
        u[1, t] == Sin[1 - t]}, u[x, t], {x, 0, 1},
       {t, 0, Pi}]
```

Out[10]= {{u[x, t] → InterpolatingFunction[{{0., 1.}, {0., 3.14159}}, <>][x, t]}}

In[11]:= `Plot3D[u[x, t] /. First[%], {x, 0, 1}, {t, 0, Pi}]`

Out[11]=



Препоръчана за отпечатване от
Катедра „Информатика", МГУ

Заключение

Всички разгледани примери показват нашата теза, че за много от изучаваните математични дисциплини след кратко излагане на теоретичните основи, използвайки подходящ софтуер могат да се решават много задачи с практическа насоченост. Така студентът ще осъзнае ползата от изучаването на тези дисциплини и няма да задава често срещания въпрос днес „това защо го учим".

Литература:

Wolfram St., 2002, The Mathematica Book. – Forth Edition, Wolfram Media.

Лалов П., В. Христов 2004,, Използване на програмна система за математически пресмятания в обучението на студенти и минни специалисти – София, 84 с.