ГОДИШНИК на Минно-геоложкия университет "Св. Иван Рилски", Том 51, Св.III, Механизация, електрификация и автоматизация на мините, 2008
ANNUAL of the University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", Vol. 51, Part III, Mechanization, electrification and automation in mines, 2008

НЯКОИ ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА АНАЛИТИЧНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ТРИМЕРНИ ПОТЕНЦИАЛНИ ПОЛЕТА

Андрей Козаров, Снежана Стоянова

Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски", София 1700
Минно-геоложки университет „Св. Иван Рилски", София 1700; E-mail: stoyanova_8000@abv.bg

РЕЗЮМЕ. Изведени са изразите за потенциалните функции на пространствени електрични полета. Предимство на метода е възможността за аналитично изследване на интензитета на конкретно реално електрично поле.
Ключови думи: потенциални функции, електрическа интензивност, идентични потенциални повърхности

SOME POSSIBILITIES FOR ANALYTICAL STUDYING OF 3-D POTENTIAL FIELDS

Andrey Kozarov, Snejana Stoyanova
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski , Sofia 1700, Bulgaria
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski , Sofia 1700, Bulgaria; E-mail: stoyanova_8000@abv.bg

ABSTRACT. Expressions of potential functions for spacail electric fields are found. The priority of the method is the possibility for an analytic investigation of the intensity for a concrete real electric field.
Key words: potential functions, electric intensity, potential identical surfaces.

Известно е[1], че методът на комплексната променлива дава възможност да се получат неограничен брой аналитични изрази, определящи потенциала на плоскопаралелни полета. Аналогичен подход може да се използва и за анализ на тримерни потенциални полета въз основа на следните разсъждения.

Разглежда се комплексната аналитична функция $\dot{\pi}$ = $\dot{\pi}(x,y,z)=R_e(\dot{\pi})+jI_m(\dot{\pi})$,

където $R_e(\dot{\pi})=U_R(x,y,z)$ и $I_m(\dot{\pi})=U_I(x,y,z)$ са реални функции на координатите. Нека функцията $\dot{\pi}(x,y,z)$ зависи от координатите по следния начин:

$$\dot{\pi}=\dot{\pi}(\dot{W}),\ \text{където}\ \dot{W}=\dot{\alpha}x+\dot{\beta}y+\dot{\gamma}z$$

В такъв случай, за да бъде изпълнено условието на Лаплас $\Delta\dot{\pi}=0$, е достатъчно да е в сила равенството:

$$\frac{\partial^2\dot{\pi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\dot{\pi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\dot{\pi}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\dot{\pi}}{\partial \dot{W}^2}.\dot{\alpha}^2+\frac{\partial^2\dot{\pi}}{\partial \dot{W}^2}\dot{\beta}^2+\frac{\partial^2\dot{\pi}}{\partial \dot{W}^2}\dot{\gamma}^2=0$$

Следователно, за да удовлетворява функцията $\dot{\pi}$ условието на Лаплас, е достатъчно да е в сила равенството:

$$\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\gamma}^2=0 \qquad (1)$$

Лесно се установява, че ако функцията $\dot{\pi}$ удовлетворява уравнението на Лаплас, то и реалната и имагинерната й части задължително трябва да удовлетворяват това уравнение. От тук се установява, че функциите $U_R(x,y,z)$ и $U_I(x,y,z)$ са потенциални.

Вижда се, че съществува възможност да се получават неограничен брой потенциални функции, някои от които може да имат практическо приложение. Интерес представляват функциите от вида:

$$U(x,y,z)=U_1(W_1)+U_2(W_2),\ \text{където:}$$

$W_1=\dot{\alpha}_1 x+\dot{\beta}_1 y+\dot{\gamma}_1 z$ и $W_2=\dot{\alpha}_2 x+\dot{\beta}_2 y+\dot{\gamma}_2 z$;

$$\frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2}\neq const$$

и съответните коефициенти отговарят на условието (1).

С помощта на съвременната изчислителна техника лесно може да се анализират голям брой тримерни потенциални функции и да се архивират тези, които може да имат отношение към решаването на конкретни задачи, например в електростатиката.

Вижда се, че методът на конформното изображение, прилаган при плоскопаралелни полета представлява частен случай, определен от условието:

$\alpha=1$, $\beta=j$, $z=0$; $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$.

Пример 1:

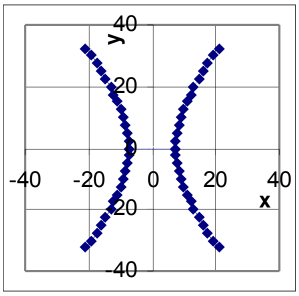
$$U=R_e\{\dot{\pi}_1+\dot{\pi}_2\}=R_e\{\dot{W}_1^2+k\dot{W}_2^2\};$$

$\alpha_1=1$, $\beta_1=j$, $\gamma_1=0$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=0$, $\gamma_2=j$. От тук се получава

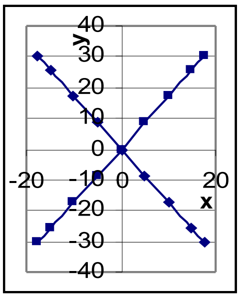
(2) $U=x^2(1+k)-y^2-kz^2$; k=const

Еквипотенциални повърхнини се получават от условието $U=C$=const.

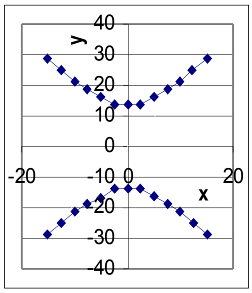
На фиг.1 са показани пресечниците на три еквипотенциални повърхнини при $C>0$, $C=0$, $C<0$ с равнината $z=0$. Навсякъде е прието $k=2$. Пресечните линии на еквипотенциалните повърхнини с равнината $y=0$ са аналогични, а с равнината $|x|=C\neq 0$ представляват елипси.



C=+27



C=0



C=-27

Фиг.1. Пресечници на три еквипотенциални повърхнини с равнината *z*=0 и *k*=2

Пример 2:

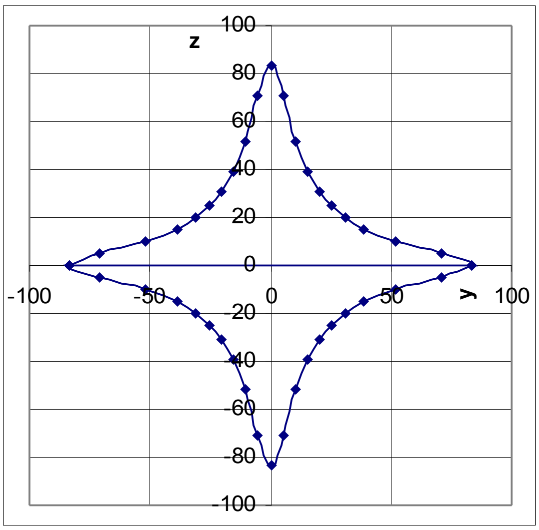
$$U(x,y,z)=R_e\left\{\frac{1}{\dot{W}_1}+\frac{1}{\dot{W}_2}\right\}$$

$\alpha_1=1$, $\beta_1=j$, $\gamma_1=0$; $\alpha_2=1$, $\beta_2=0$, $\gamma_2=j$

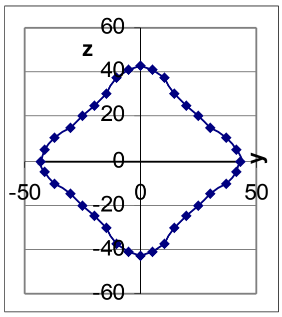
Получава се:

$$U(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+z^2}$$

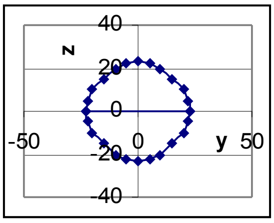
Фигура 2 дава представа за еквипотенциалната повърхност $U(x,y,z)=0{,}2$. Показани са кривите при пресичане на тази повърхност с равнините $x=9$, $x=7$, $x=5{,}5$.



x=5,5



x=7



x=9

Фиг.2. Криви на пресичане на еквипотенциалната повърхност *U*(*x*,*y*,*z*)=0,2 с равнините *x*=9, *x*=7 и *x*=5,5

Интерес представлява аналитичното определяне на електрическия интензитет в една характерна точка-върхът на изпъкналостта с координати: x=10, y=0, z=0.

$$\vec{E} = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = k_U \cdot \frac{2}{x^2}\vec{i}$$

Тук коефициентът k_U се определя от стойността на потенциала на разглежданата еквипотенциална повърхност, изразен във волтове и приетата единица за измерване на координатите. При стойност на потенциала U=100 *kV* и единица за измерване на координатите [*см*], k_U=500 *kV.см*. Тогава $E=E_x$=10 *kV/см*.

Интересно е да се отбележи, че ако околността на връхната точка, например с радиус 3 *см* се апроксимира със сфера, заредена до същия потенциал U= 100000 *V*, за чиито радиус се получава R=5*см*, интензитетът се получава $E_{сф.}$=20 *kV*/*см*.

Значението на предложения подход е твърде ограничено. Причината е обстоятелството, че получаваните тримерни потенциални функции за цялото пространство не отговарят на полета, създадени от реални електроди. Ползата все пак е във възможността да се определят аналитично и сравнително лесно потенциални тримерни функции, които да са твърде близки до реални полета в отделни области от пространството. При наличието на изчислителни устройства с много голяма памет е възможно да се създаде база данни за много голям брой такива аналитични функции, измежду които компютърът да намира най-подходящия аналитичен израз за зададена част от еквипотенциална повърхност.

Предимство на аналитичното изразяване на потенциалното поле, дори и за ограничена област от пространството, е възможността да се определи аналитично и полето на електрическия интензитет чрез израза:

$$\vec{E} = -gradU$$

Литература:

Нейман, Л.Р. и К.С. Демирчан. Теоретические основы электротехники т.II.

Препоръчана за публикуване от
Катедра “Електротехника”, МЕМФ