ЕДНА ВЪЗМОЖНОСТ ЗА ПРИЛОЖЕНИЕ НА ПОВТОРНА ЛИНЕЙНА ИНТЕРПОЛАЦИЯ

Паулин Златанов

Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

РЕЗЮМЕ. Много често при някои минни практически задачи се налага да се изчисляват стойности на функции, зададени таблично, в точки несъвпадащи с тези, в които тя е определена. В тези случаи, обикновено се използват полиноми от различна степен за прогнозиране на желаната (търсената) стойност. За облекчаване на изчислителните процедури се предлага параболично интерполиране по схемата на Ейткин-Невил.

AN OPPORTUNITY FOR APPLICATION OF REPEATED LINEAR INTERPOLATION ASSOCIATE

Paulin Zlatanov
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia

ABSTRACT. In some practical task in mining very often is needed to compute some values of functions, given in table form, in points that don't coincide with these for which it is defined. In such cases usually some polynomials of different ranks is used to forecast value given. To relieve the computing procedures we suggest parabolic interpolation following the scheme of Atkin-Navill.

При решаване на задачи от различно естество свързани с минното производство, често пъти се налага да се използват зависимости получени по експериментален път (в лаборатории или в производствени условия).

Така например, за оценката на устойчивостта на откосите на стъпалата и бордовете в откритите рудници е необходимо да се знаят стойностите на якостните показатели на литоложките разновидности изграждащи масива – ъгъл на вътрешно триене (φ) и кохезия (C). Те се определят от функционалната зависимост между съпротивлението на срязване (τ) и нормалното напрежение (σ_n), т.е. $\tau = f(\sigma_n)$. Лабораторните изпитания за определяне на зависимостта $\tau = f(\sigma_n)$ за глините в условията на Източномаришките открити рудници се извършват при нормални натоварвания в използваната апаратура σ_n = 1, 3, 5, 7 kg/cm^2, т.е. нормалния товар се изменя в интервала [1, 7]. Резултатите от изследването на сините глини в този диапазон на натоварване са посочени в таблица 1 [3].

Таблица 1.

i	0	1	2	3
σ_i, kg/cm^2	1	3	5	7
τ_i, kg/cm^2	0,35	0,48	0,59	0,65

Апроксимирането на функцията $\tau = f(\sigma_n)$, по дадените стойности в горната таблица може да се извърши по метода на най-малките квадрати, с интерполационните полиноми на Нютон и Лагранж. Този подход е оправдан в случаите, когато за оценка на устойчивостта се използва имитационен или друг аналитичен модел изискващ голям обем от стойности за τ и σ_n.

За условието на някоя конкретна задача, стойностите на нормалните напрежения се определят в зависимост от статичния товар на хоризонтите. Те почти никога не съвпадат с тези използвани при лабораторните изследвания от интервала [1,7]. В този случай, вместо да се създават споменатите по-горе аналитични модели може да се използва леката за приложение повторна линейна интерполация или интерполация на Ейткин – Невил [2]. Същността и се състои в следното. От математиката е известно [1], че ако функцията $y_i = f(x)$ е зададена в две точки x_0 и x_1 със стойностите си y_0 и y_1, то като се използва формулата за линейното интерполиране

$$f(x) \approx \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1,$$

може да се изчисли стойността й в точката $x \in [x_0; x_1]$. Стойността на функция в точката x се означава с $P_{0,1}(x)$, а формулата за линейно интерполиране се представя във вида:

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix},$$

където в дясната част стои детерминанта от втори ред.

Освен това

$$P_{0,1}(x_0)=\frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix}y_0 & x_0-x_0\\ y_1 & x_1-x_0\end{vmatrix}=y_0\ ,\ P_{0,1}(x_1)=y_1\ .$$

Нека сега разглежданата функция f е зададена в точките x_0, x_1, и x_2 и стойностите й са y_0, y_1, и y_2. Необходимо е да се изчисли стойността й в точка $x\in[x_0;x_2]$. В този случай, по схемата на Ейткин – Невил се изчисляват първо стойностите на двата линейни многочлена $P_{0,1}(x)$ и $P_{1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix}y_1 & x_1-x\\ y_2 & x_2-x\end{vmatrix}$, а след това и стойността на квадратичния многочлен от вида:

$$P_{0,1,2}(x)=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix}P_{0,1}(x) & x_0-x\\ P_{1,2}(x) & x_2-x\end{vmatrix}$$

С непосредствено заместване се получава, че $P_{1,2}(x_1)=y_1$; $P_{1,2}(x_2)=y_2$; $P_{0,1,2}(x_0)=y_0$; $P_{0,1,2}(x_1)=y_1$; $P_{0,1,2}(x_2)=y_2$. Лесно се доказва, че $P_{0,1,2}(x)$ съвпада с формулата на Лагранж при три точки на интерполиране. Разглежданата схема се обобщава и за по-високи степени.

Схемата на Ейткин – Невил позволява да се получат и добри практически резултати при неравноотстоящи възли на интерполация.

За конкретния случай да предположим, че стойността на функцията $\tau=f(\sigma)$ в точка 1 при $\sigma=3\,kg/cm^2$ е неизвестна. Нейната стойност ще се използва за проверка на достоверността на схемата на Ейткин – Невил, при условие на неравноотстоящи възли на интерполация.

Известни са стойностите на функцията $\tau=f(\sigma_i)$ при напрежения $\sigma_i=1,\ 5$ и $7\,kg/cm^2$ $(i=0,2,3)$.
По схемата на Ейткин – Невил имаме:

$$P_{0,2(3)}=\frac{1}{x_2-x_0}\begin{vmatrix}y_0 & x_0-x_1\\ y_2 & x_2-x_1\end{vmatrix}=\frac{1}{5-1}\begin{vmatrix}0{,}35 & 1-3\\ 0{,}59 & 5-3\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{0{,}35.2-0{,}59.(-2)}{4}=\frac{1{,}88}{4}=0{,}47\ kg/cm^2$$

$$P_{2,3(3)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0{,}59 & 5-3\\ 0{,}65 & 7-3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0{,}59 & -2\\ 0{,}65 & -4\end{vmatrix}=\frac{1{,}06}{2}=0{,}53\,kg/cm^2$$

$$P_{0,2,3(3)}=\frac{1}{x_3-x_0}\begin{vmatrix}P_{0,2(x)} & x_0-x_1\\ P_{2,3(x)} & x_3-x_1\end{vmatrix}=\frac{1}{7-1}\begin{vmatrix}0{,}47 & 1-3\\ 0{,}53 & 7-3\end{vmatrix}=$$
$$=\frac{1{,}88+1{,}06}{6}=0{,}49\,kg/cm^2$$

За стойността на функцията $\tau = f(\sigma_i)$ в точката $\sigma_1=3\,kg/cm^2$ се получава $\tau_1=0{,}49\,kg/cm^2$ при таблична стойност $\tau_1=0{,}48\,kg/cm^2$, т.е. грешката е 2,08 %.

От приведените изчисления се вижда, че алгоритъмът за пресмятане на неизвестната стойност е лесен за приложение, получените резултати са с достатъчна точност и се елиминира процедурата по създаването на аналитичен модел. В литературата се посочва [2], че при използването на интерполационния полином на Лагранж от втора степен пресмятанията изискват 26 аритметични действия, докато при същите условия при повторната линейна интерполация са необходими 18 аритметични операции.

Литература

Димова-Начева, В.С., Н.В. Стоянов. 1973. Висша математика, част I, Техника, С.

Дорн, У.С. 1977. Числени методи и програмиране на Фортран IV, Наука и изкуство, С.

Тодорова, М., П. Стоева. 1972. Изследване механизма на деформиране на откосите в многослойна среда във връзка с устойчивостта на бордовете и насипищата на ДМП "Марица изток", *Доклад на МНИПКИ "Минпроект"*.

Препоръчана за публикуване от
Катедра "Открито разработване на полезни изкопаеми и взривни работи", МТФ